Přírodovědecká fakulta

Univerzita Palackého v Olomouci

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2

Jan Tomeček

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace vznikla za podpory projektu OP VVV s názvem Univerzita Palackého jako komplexní vzdělávací instituce, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002337

Recenzenti: RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.
Mgr. Ivona Tomečková, Ph.D.

1. vydání

ISBN 978-80-244-5853-3

Obsah

Předmluva

Tato skripta vznikla jako učební text k předmětu *Matematická analýza 2* vyučovanému v rámci studijních programů *Aplikovaná matematika* a *Matematika* na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci a navazují na skripta Matematická analýza 1, viz [13].

První část těchto skript, tvořena kapitolami 1–4, je věnována diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných a vektorových funkcí. Bohužel nebyl prostor pro detailnější popis, čtenáře lze odkázat třeba na skripta [3,10,12]. Druhá část, tvořená kapitolami 5–9, se zabývá nekonečnými řadami a to jak čísel, tak funkcí. Je zakončena kapitolami o Taylorových a Fourierových řadách. Podrobnější výklad lze nalézt např. v [4]. Skripta neobsahují téměř žádné příklady k procvičování. Existuje však nepřeberné množství materiálu k počítání v knihovnách a na internetu, viz citovaná skripta a sbírky příkladů [1, 2, 5–7, 9, 14].

Na tomto místě by autor rád poděkoval recenzentům RNDr. Pavlu Ludvíkovi, Ph.D. a Mgr. Ivoně Tomečkové, Ph.D. za jejich cenné připomínky a rady.

Tato skripta vznikla za podpory projektu OP VVV s názvem Univerzita Palackého jako komplexní vzdělávací instituce, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002337

Kapitola 1

Struktury nad $\mathbb{R}^N$

Ve skriptech [13] jsme se na začátku věnovali množině všech reálných čísel, a to zejména proto, že nás zajímaly reálné funkce jedné reálné proměnné. Jedním z ústředních pojmů těchto skript je funkce více proměnných a vektorová funkce. Proto se nejprve seznámíme s definičním oborem a oborem hodnot těchto zobrazení, což jsou množiny uspořádaných N-tic reálných čísel, kde $N \in \mathbb{N}$. Zejména nás budou zajímat operace na této množině, velikosti jejích prvků, vzdálenosti mezi jejími prvky, apod.

Začněme od podlahy, tedy pojmem uspořádané N-tice reálných čísel. Jak uvidíme, bude nám tento pojem připomínat posloupnost reálných čísel.

Definice 1.1 Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak zobrazení množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme *uspořádanou N-ticí reálných čísel*. Je-li x uspořádaná N-tice reálných čísel a $j \in \{1, \ldots, N\}$, pak obraz $x(j)$ nazýváme *j-tý prvek N-tice x* a značíme symbolem x_j. Píšeme pak

$$x = (x_1, \ldots, x_N),$$

kde $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$. *Množinu všech uspořádaných N-tic reálných čísel* značíme symbolem $\mathbb{R}^N$.

Poznámka 1.2 Uspořádané N-tice se dají definovat bez pomoci pojmu zobrazení, a to na základě pojmu uspořádané dvojice. Jsou-li x_1, x_2 a x_3 reálná čísla, pak se dá uspořádaná trojice definovat jako

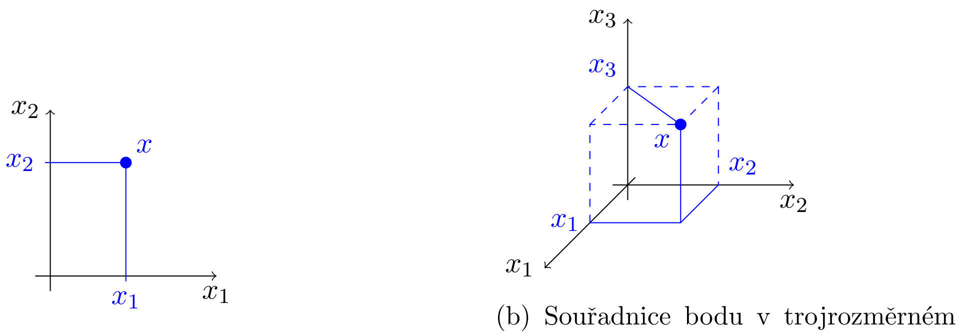
$$(x_1, x_2, x_3) := \big((x_1, x_2), x_3\big),$$

tedy jako uspořádaná dvojice, kde první prvek je uspořádaná dvojice (x_1, x_2) a druhý prvek je číslo x_3. Obecně se pro $N \in \mathbb{N}$ dá definovat uspořádaná N-tice reálných čísel $x_1, \ldots, x_N$ jako

$$(x_1, \ldots, x_N) = \big((x_1, \ldots, x_{N-1}), x_N\big),$$

tedy jako uspořádaná dvojice, kde první prvek je uspořádaná $(N-1)$-tice $(x_1, \ldots, x_{N-1})$ a druhý x_N.

Uspořádané N-tice budeme často chápat a používat jako *souřadnice* bodů v „N-rozměrném prostoru“, ze začátku nejčastěji pro $N = 2, 3$, viz Obrázek 1.1. Z toho důvodu budeme občas psát místo (x_1, x_2) jen (x, y) a místo (x_1, x_2, x_3) jen (x, y, z) – kvůli nižší přehlednosti nejsou indexy úplně nejvhodnější. Pro větší N se jim už ale nevyhneme.



(a) Souřadnice bodu v rovině.

(b) Souřadnice bodu v trojrozměrném prostoru.

Obrázek 1.1: Jak si představovat uspořádané dvojice a trojice?

Nad množinou $\mathbb{R}^N$ zavedeme operaci *sčítání* a levou vnější operaci *násobení skalárem.*

Definice 1.3 Zobrazení $+ : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definované předpisy

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N) \quad \text{a} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N)$$

pro každé $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme po řadě *sčítáním* a *násobením skalárem* prvků z $\mathbb{R}^N$.

S takto definovanými operacemi tvoří množina $\mathbb{R}^N$ vektorový prostor. Připomeňme jeho definici.

Definice 1.4 Nechť je dána neprázdná množina X a zobrazení

$$+ : X \times X \to X \qquad \text{a} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

(pro jednoduchost budeme místo $+(x, y)$ psát $x + y$ a místo $\cdot(\alpha, x)$ budeme psát $\alpha \cdot x$ nebo jen αx pro všechna $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Jestliže platí:

(a) $\forall x, y \in X \ : \ x + y = y + x$ (komutativita sčítání),

(b) $\forall x, y, z \in X \ : \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita sčítání),

(c) $\exists o \in X \ \forall x \in X \ : \ x + o = x$ (prvek o nazýváme *nulový prvek*),

(d) $\forall x \in X \ \exists -x \in X \ : \ x + (-x) = o$ (prvek $-x$ nazýváme *opačný k prvku* x),

(e) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x, y \in X \ : \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

(f) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall x \in X \ : \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

(g) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall x \in X \ : \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

(h) $\forall x \in X \ : \ 1 \cdot x = x$.

Pak uspořádanou trojici $(X, +, \cdot)$ nazýváme *reálným vektorovým prostorem* a prvkům množiny X říkáme *vektory*.

Poznámka 1.5

- Pokud bychom v Definici 1.4 všude místo $\mathbb{R}$ psali $\mathbb{C}$ (množinu komplexních čísel), mluvili bychom o *komplexním* vektorovém prostoru. Zde budeme pracovat pouze s reálnými vektorovými prostory, takže přívlastek reálný budeme vynechávat.
- Pokud to bude z kontextu jasné, pak budeme místo uspořádané trojice $(X, +, \cdot)$ psát pouze X, např. zde budeme mluvit o „vektorovém prostoru $\mathbb{R}^N$".
- Čtenář by si již měl sám dokázat, že $(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$ *s operacemi sčítání a násobení skalárem z Definice 1.3 tvoří vektorový prostor*! Přitom nulovým vektorem je vektor

  $$o = (0, 0, \ldots, 0)$$

  tzn. uspořádaná N-tice, jejíž všechny prvky jsou nulové. Dále ke každé uspořádané N-tici $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ je opačný vektor $-x$ uspořádaná N-tice o složkách

  $$-x = (-x_1, \ldots, -x_N).$$

- V dalším textu se od čtenáře očekávají další znalosti pojmů z vektorových prostorů. Zejména *lineární nezávislost vektorů, báze vektorového prostoru* a jeho *dimenze.*

Kromě toho v souvislosti s $\mathbb{R}^N$ definujeme zobrazení přiřazující každé uspořádané dvojici prvků z $\mathbb{R}^N$ reálné číslo.

Definice 1.6 Zobrazení

$$(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},$$

které každé dvojici $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ přiřadí číslo

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

nazýváme *standardní skalární součin v* $\mathbb{R}^N$.

V literatuře se často místo (x, y) píše $x \cdot y$ či $\langle x, y \rangle$, apod. Jednoduchá geometrická aplikace standardního skalárního součinu bude uvedena dále v Poznámce 1.15.

Poznámka 1.7 Pro standardní skalární součin platí následující výroky:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^N \ : \ (x, x) \geq 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N \ : \ (x, x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = o$,

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N \ : \ (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$,

(iv) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^N \ : \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N \ : \ (x, y) = (y, x)$.

Dokázání jejich pravdivosti je přenecháno čtenáři jako jednoduché cvičení.

Pomocí skalárního součinu můžeme definovat délku vektorů.

Definice 1.8 Zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definované vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

nazýváme *eukleidovskou normou v* $\mathbb{R}^N$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ nazýváme číslo $\|x\|$ *eukleidovskou velikostí (normou) vektoru* x.

Podíváme-li se pořádně na výraz vyjadřující normu vektoru x v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, vidíme, že jde o délku úsečky dané vektorem x.

Cvičení 1.9 Dokažte, že pro každé $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ a $i = 1, \ldots, N$ platí

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{N} \max\{|x_j| \; ; \; j = 1, \ldots, N\}.$$

Poznámka 1.10 Pro eukleidovskou normu platí následující výroky:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^N \; : \; \|x\| \geq 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N \; : \; \|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = o$,

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R}^N \; : \; \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

Důkaz jejich pravdivosti je přenechán čtenáři jako cvičení.

Věta 1.11 (Cauchyova–Schwarzova nerovnost)**.** *Pro* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *platí*

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Důkaz. Zvolme $x, y \in \mathbb{R}^N$ libovolně. Rozlišíme dva možné případy: (a) $\|x\| = 0$ nebo (b) $\|x\| \neq 0$.
ad (a): Podle Poznámky 1.10(ii) pak x je nulový vektor a platnost Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti ověříme dosazením $x = o$ do obou stran této nerovnosti.
ad (b): Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ podle Poznámky 1.7(i) platí

$$(\alpha x + y, \alpha x + y) \geq 0.$$

Upravíme-li levou stranu nerovnosti (s využitím (iii)-(iv) z Poznámky 1.7 a definice eukleidovské normy), dostáváme

$$\alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha(x,y) + \|y\|^2 \geq 0.$$

Vzhledem k předpokladu nenulovosti $\|x\|$ se na tuto nerovnost můžeme dívat jako na kvadratickou nerovnici o neznámé α, jejíž diskriminant D je nekladné číslo (proč?). To znamená, že

$$0 \geq D = 4(x,y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Zjednodušením dostáváme již požadovanou nerovnost. $\square$

Poznámka 1.12 Rozepíšeme-li si Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost po souřadnicích, dostáváme, že pro $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}$$

neboli

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i^2.$$

Věta 1.13 (speciální případ Minkowského nerovnosti)**.** *Pro $x, y \in \mathbb{R}^N$ platí*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

tzn. pro $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}.$$

Důkaz. Pro $x, y \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2, \end{aligned}$$

kde jsme postupně využili vlastností standardního skalárního součinu z Poznámky 1.7 a Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti. Odmocněním obou stran získané nerovnosti dostáváme tvrzení této věty. □

Definice 1.14 Vektorům majícím velikost rovnu jedné říkáme *normované vektory*.

Poznámka 1.15 Čtenář se může prostředky základní a střední školy sám přesvědčit (i když ne úplně jednoduše), že pro každé nenulové $x, y \in \mathbb{R}^N$, kde $N = 2$ a $N = 3$ je číslo $\alpha \in [0, \pi]$ splňující

$$\cos\alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

odchylkou vektorů x a y, viz Obrázek 1.2. Z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti vidíme, že pro každé dva nenulové vektory x a y je číslo α dobře definované, tzn. výraz v poslední rovnosti napravo nabývá hodnot z intervalu $[-1, 1]$. Dále vidíme:

- je-li $\cos\alpha = 1$, pak $\alpha = 0$ a tedy vektory x a y jsou lineárně závislé a „ukazují stejným směrem“, tzn. existuje $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ tak, že $y = cx$,
- je-li $\cos\alpha \in (0, 1)$, je úhel α ostrý,
- je-li $\cos\alpha = 0$, což je ekvivalentní s tím, že $(x, y) = 0$ (!), jsou vektory k sobě *kolmé*(!),

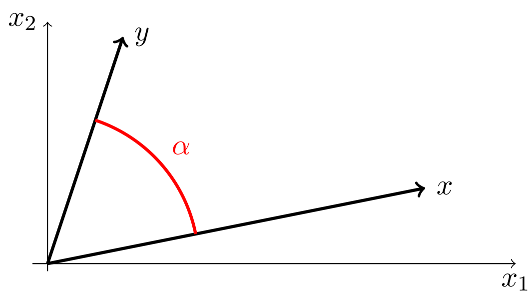
- je-li $\cos\alpha \in (-1, 0)$, je úhel α tupý, a konečně
- je-li $\cos\alpha = -1$ jsou vektory x a y lineárně závislé a „ukazují opačným směrem“, tzn. existuje $c \in \mathbb{R}$, $c < 0$ tak, že $y = cx$.

Pro normované vektory x a y je pak vzorec pro odchylku vektorů daleko jednodušší – redukuje se na rovnost

$$\cos\alpha = (x, y),$$

tzn.

$$\alpha = \arccos\,(x, y).$$



Obrázek 1.2: Odchylka vektorů x a y.

Posledním zásadním pojmem je metrika, tzn. prostředek jak měřit vzdálenosti mezi prvky z $\mathbb{R}^N$.

Definice 1.16 Zobrazení $\rho : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_N),\ y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N,$$

nazýváme *eukleidovská metrika*. Pro každé $x, y \in \mathbb{R}^N$ nazýváme číslo $\rho(x, y)$ *eukleidovská vzdálenost mezi vektory x a y*.

Podíváme-li se pořádně na výraz vyjadřující vzdálenost dvou vektorů x a y v $\mathbb{R}^2$ (a $\mathbb{R}^3$), vidíme, že jde o *délku úsečky dané koncovými body vektorů x a y*.

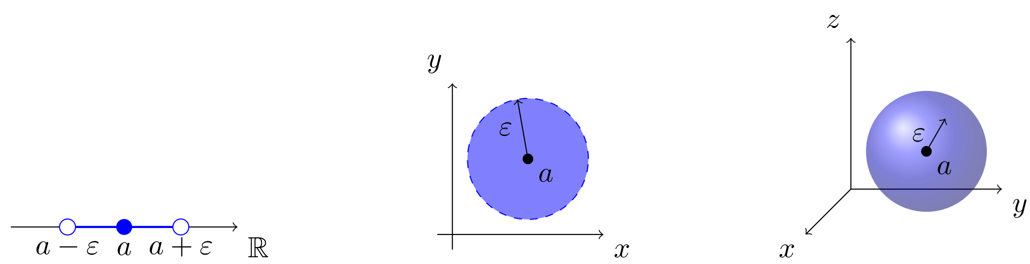
Jakmile jsme si určili jak měřit vzdálenosti mezi jednotlivými vektory, můžeme se bavit konvergencí posloupností prvků z $\mathbb{R}^N$.

Definice 1.17 *Posloupností prvků z* $\mathbb{R}^N$ rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}^N$. Je-li a posloupnost prvků z $\mathbb{R}^N$, pak n-tý člen posloupnosti a budeme značit

$$a^{[n]} = (a_1^{[n]}, a_2^{[n]}, \dots, a_N^{[n]}) \in \mathbb{R}^N.$$

Samotnou posloupnost budeme místo a značit jako $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ či

$$a^{[1]}, a^{[2]}, \dots, a^{[n]}, \dots.$$



(a) Okolí v $\mathbb{R}$. (b) Okolí v $\mathbb{R}^2$. (c) Okolí v $\mathbb{R}^3$.

Obrázek 1.3: Okolí bodu a o poloměru ε v $\mathbb{R}^N$.

Definice limity posloupnosti v $\mathbb{R}^N$ je pak velice přirozeným zobecněním pojmu limity posloupnosti reálných čísel.

Definice 1.18 Nechť $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^N$, $L \in \mathbb{R}^N$. Řekneme, že L je limitou posloupnosti $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ platí

$$\rho(a^{[n]}, L) < \varepsilon \quad \text{(neboli } \left\|a^{[n]} - L\right\| < \varepsilon) \qquad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Říkáme také, že *posloupnost* $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje* a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a^{[n]} = L$ či $a^{[n]} \to L$.

S pomocí normy či metriky můžeme definovat i okolí bodu v $\mathbb{R}^N$.

Definice 1.19 Nechť $a \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \rho(x,a) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \|x - a\| < \varepsilon\}$$

nazýváme *ε-okolí bodu a* (neboli *okolí bodu a o poloměru ε*), množinu

$$\mathcal{R}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ 0 < \rho(x,a) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; 0 < \|x - a\| < \varepsilon\} = \mathcal{U}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

nazýváme *redukované ε-okolí bodu a* (neboli *redukované okolí bodu a o poloměru ε*).

Poznámka 1.20 Okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$ o poloměru $\varepsilon > 0$ jsou pro různá N následující:

- $N = 1$: V tomto případě splývá pojem okolí i redukovaného okolí se stejnojmenným pojmem z [13] (ověřte si to!) – viz Obrázek 1.3a.
- $N = 2$: Jde o kruh se středem v bodě a a poloměrem ε bez ohraničující kružnice – viz Obrázek 1.3b. Redukované okolí je pak tento kruh bez středu a.
- $N = 3$: V tomto případě jde o kouli bez ohraničující sféry o středu a a poloměru ε – viz Obrázek 1.3c. Redukované okolí zase dostaneme vyjmutím středu z této koule.

Poznámka 1.21 Pomocí okolí můžeme definici limity posloupnosti opět vyjádřit následujícím způsobem: Pro posloupnost $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $\mathbb{R}^N$ a $L \in \mathbb{R}^N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{[n]} = L \in \mathbb{R}^N$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0 \ : \ a^{[n]} \in \mathcal{U}_\varepsilon(L) \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Věta 1.22 (o konvergenci po složkách)**.** *Nechť* $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost prvků z* $\mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} x^{[n]} = x$$

právě tehdy, když pro každé $i = 1, \ldots, N$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{[n]} = x_i.$$

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} x^{[n]} = x$, tzn. $\left\|x^{[n]} - x\right\| \to 0$ pro $n \to \infty$. Zvolme $i \in \{1 \ldots, N\}$ libovolně. Pak podle Cvičení 1.9 platí

$$|x_i^{[n]} - x_i| \leq \left\|x^{[n]} - x\right\| \to 0.$$

($\Leftarrow$): Nechť pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^{[n]} = x_i$ neboli $|x_i^{[n]} - x_i| \to 0$ pro $n \to \infty$. Podle Cvičení 1.9 platí

$$\left\|x^{[n]} - x\right\| \leq \sqrt{N} \max\{|x_i^{[n]} - x_i| \; ; \; i = 1, \ldots, N\} \to 0$$

pro $n \to \infty$. □

Příklad 1.23 Posloupnost $\left\{\left((1+\frac{1}{n})^n, 2^{-n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k vektoru $(\mathrm{e}, 0)$, protože

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$ ◯

Z předchozí věty tedy vidíme, že pro vyšetřování konvergence posloupnosti vektorů z $\mathbb{R}^N$ lze využít znalostí o limitách posloupností reálných čísel – dá se pomocí ní zobecnit celá řada tvrzení platících pro posloupnosti reálných čísel (opět viz např. [13]). Začněme větou o aritmetice.

Věta 1.24 (o aritmetice limit konvergentních posloupností)**.** *Nechť* $\left\{a^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\left\{b^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou konvergentní posloupnosti v* $\mathbb{R}^N$, *mající limity* $L^{[1]} \in \mathbb{R}^N$ *a* $L^{[2]} \in \mathbb{R}^N$. *Pak platí*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|a^{[n]}\right\| = \left\|L^{[1]}\right\|$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{[n]} + b^{[n]}) = L^{[1]} + L^{[2]}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{[n]} - b^{[n]}) = L^{[1]} - L^{[2]}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{[n]}, b^{[n]}) = (L^{[1]}, L^{[2]})$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a^{[n]}, b^{[n]}) = \rho(L^{[1]}, L^{[2]})$.

Další věty platí i pro posloupnosti mnohem obecnějších prostorů. Podívejme se nejprve na zobecnění doposud uvedených pojmů a vyslovme tak obecnější tvrzení.

1.1 O prostorech se skalárním součinem

V Poznámce 1.7 byly vypíchnuty ty nejzákladnější vlastnosti standardního skalárního součinu. Podívejme se nyní na zobecnění tohoto pojmu. Zmíněné vlastnosti budu dokonce charakterizovat obecný pojem skalárního součinu (srovnejte Poznámku 1.7 s Definicí 1.25).

Definice 1.25 Nechť $(X,+,\cdot)$ je reálný vektorový prostor a zobrazení

$$(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$$

pro něž platí

(i) $\forall x \in X \ : \ (x,x) \geq 0$,

(ii) $\forall x \in X \ : \ (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = o$,

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x,y \in X \ : \ (\alpha x, y) = \alpha (x,y)$,

(iv) $\forall x,y,z \in X \ : \ (x+y, z) = (x,z) + (y,z)$,

(v) $\forall x,y \in X \ : \ (x,y) = (y,x)$.

Pak zobrazení $(\cdot,\cdot)$ nazýváme *skalárním součinem* na X a uspořádanou dvojici $\big(X,(\cdot,\cdot)\big)$ nazýváme *prostorem se skalárním součinem*. Pokud je navíc X reálným vektorovým prostorem konečné dimenze, nazýváme příslušný prostor se skalárním součinem *eukleidovským prostorem*.

Poznámka 1.26 Z Poznámky 1.7 plyne, že standardní skalární součin $(\cdot,\cdot)$ je skalárním součinem nad $\mathbb{R}^N$. Protože $\mathbb{R}^N$ je konečně dimenzionální (jeho dimenze je rovna N), pak $\big(\mathbb{R}^N,(\cdot,\cdot)\big)$ je dokonce eukleidovský prostor.

Cvičení 1.27 Nechť $N \in \mathbb{N}$, $w_1,\ldots,w_N$ jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že zobrazení

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i y_i, \quad x = (x_1,\ldots,x_N),\ y = (y_1,\ldots,y_N) \in \mathbb{R}^N$$

je skalární součin nad $\mathbb{R}^N$ (říká se mu *vážený skalární součin*).

Ukažme si další prostory se skalárním součinem, ve kterých nefiguruje množina $\mathbb{R}^N$.

Cvičení 1.28 Nechť $\mathfrak{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ je množina všech matic typu $M \times N$ s reálnými prvky, $M,N \in \mathbb{N}$. Dokažte, že zobrazení $(\cdot,\cdot) : \mathfrak{M}_{M\times N}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{M\times N}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$(A,B) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_{ij}$$

pro každé dvě matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{M,N}$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{M,N}$ z $\mathfrak{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$, je skalární součin.

Cvičení 1.29 Nechť $X = \mathfrak{C}([a,b])$ je množina všech spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$, vybavená sčítáním funkcí a násobením reálnými čísly – ověřte, že jde o reálný vektorový prostor (uvědomte si zejména, která funkce je „nulovým vektorem“ a jak vypadá „opačný vektor" k dané funkci). Rozmyslete si také, co znamená lineární nezávislost prvků z tohoto vektorového prostoru. Na $\mathfrak{C}([a,b])$ definujme zobrazení

$$\forall f,g \in \mathfrak{C}([a,b]) : (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Dokažte, že toto zobrazení je dobře definováno a že jde o skalární součin.

Příklad 1.30 Uvažujme $(\mathcal{R}([a,b]),+,\cdot)$ prostor všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$ společně se sčítáním funkcí a násobením funkcí skalárem. Z [13, Věta 9.28] víme, že

$$\mathfrak{C}([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b]).$$

Pak předpis (1.1) uvažovaný pro širší definiční obor $\mathcal{R}([a,b]) \times \mathcal{R}([a,b])$ již není předpisem skalárního součinu. Jak se čtenář může sám přesvědčit, sice jsou splněny vlastnosti (i),(iii)-(v) z Definice 1.25, ale pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a, \\ 0 & x \in (a,b], \end{cases}$$

platí $(f,f) = 0$, přitom f není nulová funkce! Tuto obtíž můžeme překonat tak, že na množině $\mathcal{R}([a,b])$ definujeme relaci $\sim$ následujícím způsobem:

$$\forall f,g \in \mathcal{R}([a,b]) \,:\, f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Dá se dokázat, že jde o relaci ekvivalence na $\mathcal{R}([a,b])$. Z algebry je známo, že relace ekvivalence indukuje rozklad této množiny, označuje se $\mathcal{R}([a,b])/\sim$ (tzv. faktorová množina $\mathcal{R}([a,b])$ podle $\sim$ - prvky této množiny nazýváme třídy a označujeme je $[f] \in \mathcal{R}([a,b])/\sim$, kde $f \in \mathcal{R}([a,b])$). Na této množině se dá definovat sčítání a násobení skalárem tak, že příslušná uspořádaná trojice tvoří vektorový prostor. A co je nejdůležitejší: na této množině již lze definovat skalární součin takovýmto způsobem:

$$([f],[g]) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad [f],[g] \in \mathcal{R}([a,b])/\sim. \qquad \bigcirc$$

1.2 O normovaných lineárních prostorech

Nyní si ukažme zobecnění eukleidovské normy na libovolné vektorové prostory. Inspirací pro nás budou vlastnosti normy z Poznámky 1.10 a Věty 1.13 (srovnejte je s vlastnostmi z následující definice).

Definice 1.31 Nechť $(X,+,\cdot)$ je vektorový prostor a zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in X \,:\, \|x\| \geq 0$ (nezápornost),

(ii) $\forall x \in X \,:\, \|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = o$ (definitnost),

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in X \,:\, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (pozitivní homogenita),

(iv) $\forall x,y \in X \,:\, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost).

Pak zobrazení $\|\cdot\|$ říkáme *norma na X*, uspořádanou dvojici $(X,\|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem* a vektorovému prostoru X říkáme jeho *nosič*.

Poznámka 1.32 Z motivačních úvah pro pojem normy okamžitě vidíme, že eukleidovská norma v $\mathbb{R}^N$ je normou ve smyslu Definice 1.31. V Poznámce 1.36 si ukážeme další normy na $\mathbb{R}^N$.

Cvičení 1.33 Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor.

1. Dokažte, že platí
$$\forall x, y \in X \ : \ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

2. Matematickou indukcí dokažte *zobecněnou trojúhelníkovou nerovnost*, tzn.
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x_1, \ldots, x_n \in X \ : \ \|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|.$$

Inspirováni Poznámkou 1.32 můžeme očekávat platnost následující jednoduché věty.

Věta 1.34. *Nechť $(\cdot,\cdot)$ je skalární součin na vektorovém prostoru X. Pak zobrazení $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definované předpisem*
$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X, \tag{1.2}$$
je norma na X. Přitom platí obecná Cauchyova–Schwarzova nerovnost, tzn.
$$\forall x, y \in X \ : \ |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Důkaz. Předpokládejme, že platí vlastnosti (i)–(v) z Definice 1.25. Máme dokázat, že pak $\|\cdot\|$ má vlastnosti (i)–(iv) z Definice 1.31. Ověření prvních tří vlastností je snadné. Trojúhelníková nerovnost si ovšem vyžádá více pozornosti. Nejprve je potřeba dokázat Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost. To se ale provede na chlup stejně jako v důkazu Věty 1.11, protože se tam využívaly právě pouze charakteristické vlastnosti skalárního součinu a normy (ověřte si to!). Následně se trojúhelníková nerovnost dokáže na chlup stejně jako v důkazu Věty 1.13 – ze stejného důvodu. □

Definice 1.35 Nechť $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ je prostor se skalárním součinem. Pak normu definovanou předpisem (1.2) nazveme *normou indukovanou skalárním součinem* $(\cdot,\cdot)$ a říkáme, že *normovaný lineární prostor* $(X, \|\cdot\|)$ *je indukován skalárním součinem* $(\cdot,\cdot)$.

Poznámka 1.36 Na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^N$ lze definovat více norem. Nejčastěji používané jsou:

1. *eukleidovská norma*, viz Definici 1.8,

2. *součtová norma*, daná předpisem
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

3. *maximová norma*, daná předpisem
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, \ i = 1, \ldots, N\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

4. *p-norma* (kde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$), daná předpisem

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Poznamenejme, že eukleidovská norma a součtová norma jsou speciálními případy p-normy (pro $p = 2$ a $p = 1$). Čtenáři je ponecháno jako cvičení ověřit, že jde skutečně o normy (obtížnější je ověřit platnost trojúhelníkové nerovnosti u p-normy, jde o důsledek Minkowského nerovnosti).

Zajímavý je také fakt, že pro $N = 1$ všechny zde uvedené normy splývají. Skutečně, pro $x \in \mathbb{R}^1$ platí

$$\|x\| = \|x\|_1 = \|x\|_\infty = \|x\|_p = |x|.$$

V jednodimenzionálním případě se tedy tyto normy redukují na absolutní hodnotu reálného čísla. Na vektorovém prostoru $X = \mathbb{R}$ lze ovšem definovat i jiné normy, např. $\|x\| = 2|x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ (ověřte, že jde o normu).

Příklad 1.37 Dokažte, že pro každé $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ a $x \in \mathbb{R}^N$ platí:

(a) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{N}\|x\|_\infty$, (b) $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq N\|x\|$.

Řešení. Nechť $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.
ad (a): Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí

$$|x_i| \leq \|x\|_\infty.$$

Umocníme tyto nerovnosti na p (přitom se nerovnost nezmění), poté sečteme přes všechna $i = 1, \ldots, N$ a máme

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1} |x_i|^p \leq N\|x\|_\infty^p.$$

Odmocněním dostáváme požadovanou nerovnost. Nyní se zaměřme na první nerovnost. Pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí

$$|x_i|^p \leq \sum_{j=1}^{N} |x_j|^p = \|x\|_p^p,$$

tedy odmocněním dostáváme $|x_i| \leq \|x\|_p$. Protože poslední nerovnost platí pro všechna $i = 1, \ldots, N$, pak nutně $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$.
ad (b): Opět nejprve dokážeme druhou nerovnost. Již ze Cvičení 1.9 víme, že pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí

$$|x_i| \leq \|x\|.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti přes všechna i, dostáváme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \leq N\|x\|.$$

Nyní se podívejme na nerovnost první. Úvaha je následující

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 + \sum_{\substack{i,j=1,\ldots,N,\\ i \neq j}} |x_i| \cdot |x_j| \geq \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 = \|x\|^2,$$

kde druhá rovnost je pouhé roznásobení výrazu nalevo (pokud to není jasné, je vhodné si provést umocnění pro konkrétní N, např. $N = 2$, $N = 3$). Nyní stačí jen odmocnit obě strany nerovnosti. ○

Poznámka 1.38 Z Příkladu 1.37(a), rovnosti

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{N} = N^0 = 1$$

(díky spojitosti exponenciální funkce o základu N) a věty o třech limitách (viz [13, Věta 5.33]) plyne, že

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}^N$. Odtud může čtenář vidět, proč se maximová norma označuje indexem ∞.

Příklad 1.39 Na množině $\mathfrak{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ definujme normu indukovanou skalárním součinem z Cvičení 1.28 – označme ji $\|\cdot\|$. Dokažte, že pak pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ a $B \in \mathfrak{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ platí

$$\|B \cdot x\| \leq \|B\| \cdot \|x\|,$$

kde $B \cdot x$ je „maticové násobení“, x je sloupcový vektor a $\|x\|$ a $\|B \cdot x\|$ jsou po řadě eukleidovské normy v $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$ sloupcových vektorů x a $B \cdot x$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že $B \cdot x$ je sloupcový vektor z $\mathbb{R}^M$ (předpokládá se, že čtenář umí maticově násobit). Označme $x = (x_1, \ldots, x_N)^T$ a $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{M,N}$. Pak

$$B \cdot x = \left(\sum_{j=1}^{N} b_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{N} b_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{N} b_{Mj}x_j\right)^T \in \mathbb{R}^M.$$

Následně

$$\begin{aligned}\|B \cdot x\|^2 &= \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij}x_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{N} b_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} b_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{N} x_j^2 = \|B\|^2 \cdot \|x\|^2 = \left(\|B\| \cdot \|x\|\right)^2,\end{aligned}$$

kde nerovnost plyne z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti, viz Poznámku 1.12 pro vektory $(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{iN})$, $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. ○

Příklad 1.40 Normy můžeme uvažovat i na složitějších vektorových prostorech, než jsou prostory vektorů či matic. Na vektorovém prostoru $\mathfrak{C}([a, b])$ lze uvažovat následující normy:

1. L_2-*norma*, která je indukována skalárním součinem ze Cvičení 1.29, tzn. tato norma má předpis

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}, \quad f \in \mathfrak{C}([a, b]),$$

2. L_1-*norma*, daná předpisem

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathfrak{C}([a, b]),$$

3. *maximová norma*, daná předpisem

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : \ x \in [a,b]\}, \quad f \in \mathfrak{C}([a,b]),$$

4. L_p*-norma* (kde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$), daná předpisem

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x}, \quad f \in \mathfrak{C}([a,b]).$$

Ověřte, že jde o normy. Přitom trojúhelníková nerovnost pro L_p-normu je známá Minkowského nerovnost. ◯

1.3 O metrických prostorech

Nyní si ukažme zobecnění eukleidovské metriky definované na $\mathbb{R}^N$ v Definici 1.16. Stejně jako tomu bylo u skalárního součinu a normy zde v podstatě jde o to, že metrikou nazveme každé zobrazení mající jisté vlastnosti.

Definice 1.41 Nechť X je neprázdná množina a zobrazení $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ má vlastnosti:

1. $\forall x, y \in X \ : \ \rho(x,y) \geq 0$ (nezápornost),
2. $\forall x, y \in X \ : \ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (definitnost),
3. $\forall x, y \in X \ : \ \rho(y,x) = \rho(x,y)$ (symetrie),
4. $\forall x, y, z \in X \ : \ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (trojúhelníková nerovnost).

Pak zobrazení ρ říkáme *metrika na* X, uspořádanou dvojici (X, ρ) nazýváme *metrický prostor* a množině X říkáme jeho *nosič*.

Poznámka 1.42 Všimněme si předpokladů na nosič X z definic prostoru se skalárním součinem, normovaného lineárního prostoru a metrického prostoru. U toho posledního nepotřebujeme, aby na X byla definována nějaká lineární struktura (prostě X nemusí být vektorový prostor). Metrický prostor je dokonce možné definovat na jakékoliv neprázdné množině. Je-li X neprázdná množina, pak zobrazení $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\rho_d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = y, \\ 1 & \text{pro } x \neq y, \end{cases} \quad x, y \in X$$

je metrikou (dokažte). Říká se jí *diskrétní metrika*. Nemá ale příliš praktický význam a objevuje se spíš v různých protipříkladech.

Poznámka 1.43 Na množině $X = \mathbb{R}$ budeme téměř vždy uvažovat metriku

$$\rho(x,y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Snadno se dá ověřit, že $(\mathbb{R}, \rho)$ je metrický prostor – viz např. [13, Poznámka 2.49]. Na $\mathbb{R}$ lze používat i jiné metriky, např.

$$\rho(x,y) = \alpha|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ nebo třeba

$$\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Obecněji, každá funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je ryze monotónní na celém $\mathbb{R}$, určuje metriku na $\mathbb{R}$ danou předpisem

$$\rho(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ověřte!

Podobně jako se ze skalárního součinu dá vyrobit norma (Věta 1.34), dá se z normy vyrobit metrika. Inspirací pro nás může být vztah mezi eukleidovskou normou a metrikou, viz Definici 1.16. Důkaz následující věty je možno přenechat čtenáři.

Věta 1.44. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak zobrazení $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definované předpisem*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X \tag{1.3}$$

je metrika na X.

Definice 1.45 Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak metriku ρ definovanou předpisem (1.3) nazýváme *metrikou indukovanou normou* $\|\cdot\|$ neboli metrický prostor (X, ρ) *je indukován normou* $\|\cdot\|$.

Příklad 1.46 V Poznámce 1.36 byly představeny normy $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ a $\|\cdot\|_p$ na $\mathbb{R}^N$, ty pak indukují následující metriky:

- *eukleidovská metrika*, viz Definici 1.16,
- *součtová metrika*, daná předpisem

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N,$$

- *maximová metrika*, daná předpisem

$$\rho_\infty(x, y) = \max\big\{|x_i - y_i|\ ;\ i = 1, \ldots, N\big\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N,$$

- *p-metrika* (kde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$), daná předpisem

$$\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N. \qquad \bigcirc$$

Doposud jsme si ukazovali různé druhy metrik v nám velmi dobře známých a představitelných prostorech konečné dimenze. V následujícím příkladu dáme smysl pojmu „vzdálenost dvou funkcí“. Opět máme volnou ruku při výběru metriky.

Příklad 1.47 Na vektorovém prostoru $\mathfrak{C}([a, b])$ lze pomocí norem z Příkladu 1.40 definovat následující metriky:

1. *L_2-metrika*, s předpisem

$$\rho_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}, \quad f,g \in \mathfrak{C}([a,b]),$$

2. *integrální metrika (L_1-metrika)*, s předpisem

$$\rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)| \,\mathrm{d}x, \quad f,g \in \mathfrak{C}([a,b]),$$

3. *maximová metrika*, s předpisem

$$\rho_\infty(f,g) = \max\{|f(x)-g(x)| \,;\, x \in [a,b]\}, \quad f,g \in \mathfrak{C}([a,b]),$$

4. *L_p-metrika* (kde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$), s předpisem

$$\rho_p(f,g) = \sqrt[p]{\int_a^b \big|f(x)-g(x)\big|^p \,\mathrm{d}x}, \quad f,g \in \mathfrak{C}([a,b]).$$

○

1.3.1 Okolí bodu

Důležitým pojmem v metrických prostorech je *okolí bodu* (či *otevřená koule*) a *redukované okolí bodu*.

Definice 1.48 Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $a \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) = \{x \in X \,;\, \rho(x,a) < \varepsilon\}$$

nazveme *ε-okolí bodu a vzhledem k metrice ρ* (neboli *okolí bodu a o poloměru ε vzhledem k metrice ρ*), množinu

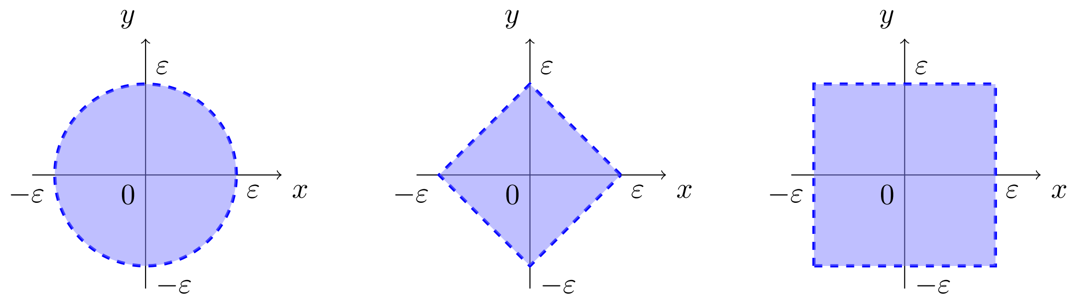
$$\mathcal{R}_\varepsilon(a) = \{x \in X \,;\, 0 < \rho(x,a) < \varepsilon\} = \mathcal{U}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

nazveme *redukované ε-okolí bodu a vzhledem k metrice ρ* (neboli *redukované okolí bodu a o poloměru ε vzhledem k metrice ρ*).

Poznámka 1.49 Pokud je jasné, kterou metriku používáme, často upřesnění „vzhledem k metrice ρ“ z Definice 1.48 vynecháváme.

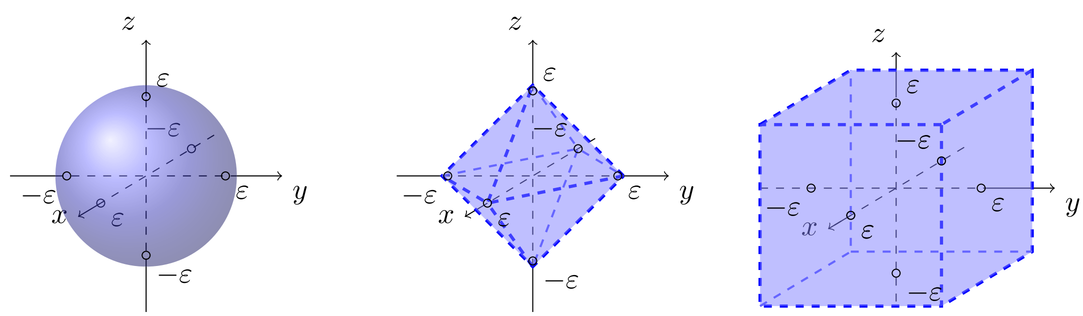
Příklad 1.50 Uvažujme $o = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak ε-okolí bodu o

- v eukleidovské metrice je otevřený kruh (tzn. kromě ohraničující kružnice) se středem v počátku a poloměru ε, viz Obrázek 1.4a,
- v součtové metrice je čtverec (bez hranice) o vrcholech o souřadnicích $(\varepsilon,0)$, $(0,\varepsilon)$, $(-\varepsilon,0)$ a $(0,-\varepsilon)$, viz Obrázek 1.4b,
- v maximové metrice je čtverec (bez hranice) o vrcholech o souřadnicích $(\varepsilon,\varepsilon)$, $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $(-\varepsilon,-\varepsilon)$ a $(\varepsilon,-\varepsilon)$, viz Obrázek 1.4c.



(a) V eukleidovské metrice. (b) V součtové metrice. (c) V maximové metrice.

Obrázek 1.4: Okolí bodu $o = (0, 0)$ o poloměru ε v $\mathbb{R}^2$.



(a) V eukleidovské metrice. (b) V součtové metrice. (c) V maximové metrice.

Obrázek 1.5: Okolí bodu $o = (0, 0, 0)$ o poloměru ε v $\mathbb{R}^3$.

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ pak dostaneme posunutím těchto množin tak, aby jejich „střed" byl v bodě a. ○

Příklad 1.51 Uvažujme $o = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pak ε-okolí bodu o

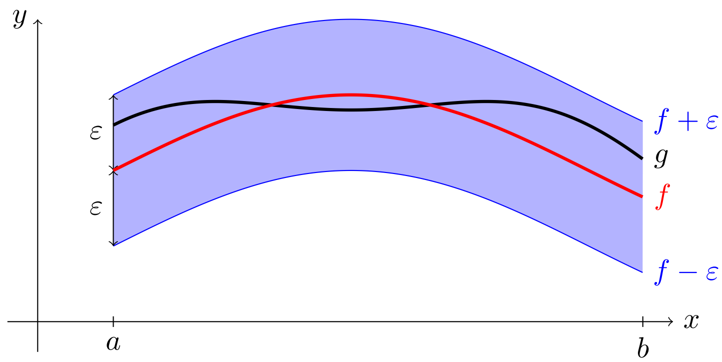
- v eukleidovské metrice je otevřená koule (tzn. kromě ohraničující sféry) se středem v počátku a poloměru ε, viz Obrázek 1.5a,
- v součtové metrice je pravidelný osmistěn (bez hranice) s vrcholy v bodech $(\varepsilon, 0, 0)$, $(-\varepsilon, 0, 0)$, $(0, \varepsilon, 0)$, $(0, -\varepsilon, 0)$, $(0, 0, \varepsilon)$, $(0, 0, -\varepsilon)$, viz Obrázek 1.5b,
- v maximové metrice je krychle (bez hranice) se středem v počátku o se stěnami rovnoběžnými s rovinami xy, yz a xz o délce hrany 2ε, viz Obrázek 1.5c.

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}^3$ pak dostaneme posunutím těchto množin, aby jejich „střed" byl bod a. ○

Příklad 1.52 Uvažujme vektorový prostor $\mathfrak{C}([a, b])$ vybavený maximovou metrikou ρ_∞. Pak ε-okolí funkce $f \in \mathfrak{C}([a, b])$ je množina všech funkcí $g \in \mathfrak{C}([a, b])$ takových, že pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{tzn.} \quad f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon.$$

To se dá pěkně graficky znázornit tak, že prvky z tohoto okolí mají graf, který celý leží v „ε-pásu funkce f" (viz modře vyznačená množina v Obrázku 1.6), přitom se graf g nedotýká grafu funkce $f - \varepsilon$ ani $f + \varepsilon$. ○



Obrázek 1.6: Funkce $f \in \mathfrak{C}([a,b])$, její ε-pás (modře) a funkce $g \in \mathcal{U}_\varepsilon(f)$.

Poznámka 1.53 Často v tvrzení vět nebývá důležitá konkrétní hodnota poloměru okolí, takže místo $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ píšeme jen $\mathcal{U}(a)$ a čteme „okolí bodu a". Podobně to budeme používat i pro redukované okolí.

1.3.2 Posloupnosti v metrických prostorech

V metrickém prostoru známe vzdálenost mezi každými dvěma prvky. Proto lze definovat pojem limity posloupnosti prvků z tohoto metrického prostoru. Nejprve ale zadefinujeme posloupnost prvků na množině X – všimněte si, že k zavedení posloupnosti nepotřebujeme metriku.

Definice 1.54 Nechť X je neprázdná množina. *Posloupností prvků z X* rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny X.

Posloupnost prvků obecné množiny budeme značit podobně jako u posloupnosti reálných čísel či vektorů z $\mathbb{R}^N$.

Definice 1.55 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků v metrickém prostoru (X,ρ), $a \in X$. Řekneme, že prvek a je *limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ v prostoru (X,ρ)* (nebo jen *vzhledem k metrice ρ*), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\rho(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

V tomto případě také říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje k a v metrickém prostoru (X,ρ)* (nebo jen *vzhledem k metrice ρ*) a značíme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{v } (X,\rho).$$

Poznámka 1.56

- Je snad jasné, že
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{v } (X,\rho)$$
právě tehdy, když
$$\lim_{n\to\infty} \rho(a_n, a) = 0.$$

Toto je důležitá charakterizace. Vyšetřování konvergence posloupností v metrických prostorech se tak dá převést na vyšetřování limit posloupností *reálných čísel.* Důkazy některých tvrzení o limitách posloupností v obecných metrických prostorech pak jsou často velmi podobné těm pro posloupnosti reálných čísel.

- Podobně jako u posloupností reálných čísel lze definovat vybrané posloupnosti (podposloupnosti) a platí pro ně podobné věty.

Mnohé vlastnosti limity posloupnosti reálných čísel se dají zobecnit pro limitu posloupnosti v metrických prostorech.

Věta 1.57. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti bodů v metrickém prostoru (X, ρ), $a \in X$. Pak platí:*

1. *Existuje nejvýše jedna limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*
2. *Jestliže $a_n = a$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*
3. *Jestliže $a_n = b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jedna z posloupností je konvergentní, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*
4. *Konverguje-li posloupnost v X, pak každá z ní vybraná posloupnost také konverguje a má stejnou limitu.*

Důkaz. Dokažme pro zajímavost jednoznačnost limity – sporem. Předpokládejme, že existují $a, b \in X$, $a \neq b$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Pak podle základní vlastnosti metriky platí $\rho(a, b) > 0$. Pak k číslu

$$\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2} > 0$$

podle definice limity posloupnosti existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ platí $\rho(a_n, a) < \varepsilon$ a existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$ platí $\rho(a_n, b) < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak

$$\rho(a,b) \leq \rho(a, a_{n_0}) + \rho(a_{n_0}, b) < 2\varepsilon = \rho(a,b),$$

což je žádaný spor (první nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti). □

1.3.3 Vlastnosti podmnožin metrických prostorů

Pomocí pojmu okolí a redukovaného okolí můžeme definovat následující pojmy: otevřenou, uzavřenou množinu, vnitřek, uzávěr, hranici, derivaci množiny a další.

Definice uvedeme pro obecné metrické prostory – i když nás bude zajímat nejvíce prostor $\mathbb{R}^N$ s eukleidovskou metrikou.

Definice 1.58 Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ je neprázdná množina a $a \in X$.

- Řekneme, že a je *vnitřní bod množiny* A, jestliže
$$\exists \mathcal{U}(a) \,:\, \mathcal{U}(a) \subset A.$$
Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazýváme *vnitřek množiny* A a značíme $\operatorname{int} A$ nebo A°.

- Řekneme, že a je *vnější bod množiny* A, jestliže
$$\exists \mathcal{U}(a) \,:\, \mathcal{U}(a) \subset X \setminus A.$$
Množinu všech vnějších bodů množiny A nazýváme *vnějšek množiny* A a značíme $\operatorname{ext} A$ nebo A^{e}.

- Řekneme, že a je *hraniční bod množiny* A, jestliže
$$\forall \mathcal{U}(a) \,:\, \mathcal{U}(a) \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ \mathcal{U}(a) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$
Množinu všech hraničních bodů množiny A nazýváme *hranice množiny* A a značíme ∂A nebo $\mathrm{b}A$.

- Řekneme, že a je *bod uzávěru množiny* A, jestliže
$$\forall \mathcal{U}(a) \,:\, \mathcal{U}(a) \cap A \neq \emptyset.$$
Množinu všech bodů uzávěru množiny A nazýváme *uzávěr množiny* A a značíme $\bar{A}$ nebo $\mathrm{cl}A$.

- Řekneme, že a je *hromadný bod množiny* A, jestliže
$$\forall \mathcal{R}(a) \,:\, \mathcal{R}(a) \cap A \neq \emptyset.$$
Množinu všech hromadných bodů množiny A nazýváme *derivací množiny* A a značíme A'.

- Řekneme, že bod a je *izolovaný bod množiny* A, jestliže
$$\exists \mathcal{U}(a) \,:\, \mathcal{U}(a) \cap A = \{a\}.$$

Cvičení 1.59 Dokažte, že pro podmnožinu A metrického prostoru (X, ρ) platí:

- $\operatorname{int} A \subset A \subset \bar{A}$, $A' \subset \bar{A}$,
- $\bar{A} = A \cup \partial A = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$,
- $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$,
- $\operatorname{ext} A = X \setminus \bar{A}$,
- $\operatorname{int} A \cup \partial A \cup \operatorname{ext} A = X$, $\operatorname{int} A \cap \partial A = \emptyset$, $\partial A \cap \operatorname{ext} A = \emptyset$, $\operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \emptyset$,

- $A \setminus A'$ je množina právě všech izolovaných bodů množiny A.

Definice 1.60 Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$.

- Řekneme, že množina A je *otevřená*, jestliže $A = \operatorname{int} A$.
- Řekneme, že množina A je *uzavřená*, jestliže $A = \bar{A}$.

Příklad 1.61 Načrtněte množinu

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y > 0\} \cup \{(1, 1)\},$$

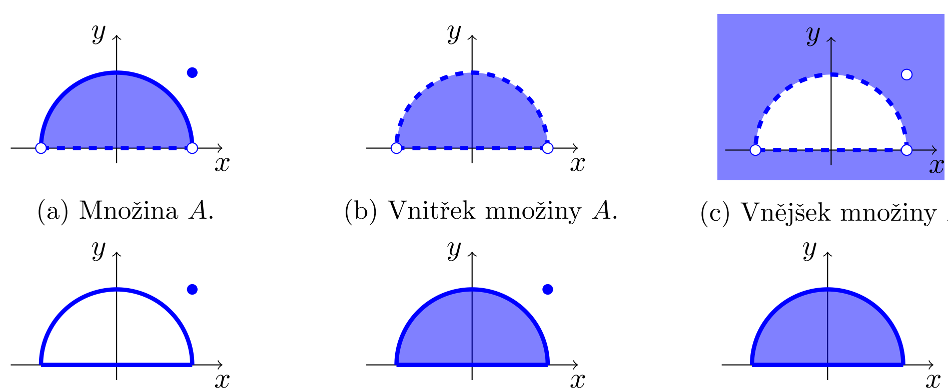
její vnitřek, vnějšek, hranici, uzávěr, derivaci a množinu jejích izolovaných bodů. Určete zda je množina otevřená či uzavřená.

Řešení. Množina A je průnik jednotkového kruhu s horní polorovinou (bez osy x), ke kterému přidáme bod $(1, 1)$ – viz Obrázek 1.7a. Vnitřek množiny pak dostáváme jako

$$\operatorname{int} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < 1 \wedge y > 0\},$$

viz Obrázek 1.7b. Vnějšek množiny je jednodušší si pouze načrtnout – viz Obrázek 1.7c. Hranici množiny A zase lze vidět na Obrázku 1.7d. Uzávěr množiny A je pak zase na Obrázku 1.7e. Derivace množiny je vlastně uzávěr množiny A bez bodu $(1, 1)$ – viz Obrázek 1.7f. Množina A má jediný izolovaný bod: je to bod $(1, 1)$. Jak je vidět z náčrtků, množina A není rovna ani svému vnitřku ani uzávěru, tedy není ani otevřená ani uzavřená.

◯



(a) Množina A. (b) Vnitřek množiny A. (c) Vnějšek množiny A.

(d) Hranice množiny A. (e) Uzávěr množiny A. (f) Derivace množiny A.

Obrázek 1.7: Množiny z řešení Příkladu 1.61.

Bez důkazu uveďme následující praktická tvrzení.

Věta 1.62. *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. Pak platí:*

- *Množina A je uzavřená právě tehdy, když je v ní obsažena její hranice, tzn.*

$$\partial A \subset A.$$

- *Množina A je otevřená právě tehdy, když je disjuktní se svou hranicí, tzn.*

$$A \cap \partial A = \emptyset.$$

- *Množina A je uzavřená (resp. otevřená) právě tehdy, když její doplněk $X \setminus A$ je otevřená (resp. uzavřená) množina.*

Poznámka 1.63 Otevřené množiny v metrickém prostoru (X, ρ) jsou například

- okolí i redukované okolí bodu,
- vnitřek a vnějšek jakékoliv podmnožiny,
- prázdná množina i celý prostor X.

Uzavřené množiny jsou

- uzávěr, hranice množiny,
- prázdná množina i celý prostor X.

Věta 1.64 (charakterizace uzavřené množiny pomocí posloupností)**.** *Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. Pak množina A je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z A má limitu v A.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť A je uzavřená, tzn. $A = \bar{A}$. Zvolme libovolně posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $x_n \in A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Dokažme, že $x \in A$. Podle předpokladu stačí dokázat, že $x \in \bar{A}$. Zvolme libovolně okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$. Pak podle definice limity platí

$$x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

a protože $x_n \in A$, pak $A \cap \mathcal{U}_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Tedy $x \in \bar{A}$.
($\Leftarrow$): Protože $A \subset \bar{A}$, stačí dokázat opačnou inkluzi, tzn. $\bar{A} \subset A$. Zvolme libovolně $x \in \bar{A}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí, že

$$\mathcal{U}_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ tak, že $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Dostáváme tak posloupnost prvků $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny A konvergující k x. Podle předpokladu pak $x \in A$. □

Definice 1.65 Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. Řekneme, že množina A je *ohraničená* (neboli *omezená*), jestliže existuje $a \in X$ a $K \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in A : \ \rho(x, a) \leq K.$$

Poznámka 1.66 Jedna a tatáž množina může být ohraničená v jednom metrickém prostoru a neohraničená v jiném. Uvažujme např. $X = \mathbb{R}$, $A = [0, \infty)$. Uvažujeme-li na $\mathbb{R}$ metriku $\rho(x, y) = |x - y|$, pak A není ohraničená v $(\mathbb{R}, \rho)$. Uvažujeme-li ovšem metriku $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, pak A je ohraničená v $(\mathbb{R}, \rho)$.

Cvičení 1.67 Nechť je dán normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ a z něj vytvořený metrický prostor (X, ρ) ve smyslu Definice 1.45. Pak množina A je ohraničená v metrickém prostoru (X, ρ) právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in A : \|x\| \leq K.$$

Dokažte!

1.3.4 Ekvivalence metrik

V Příkladu 1.46 jsme si představili několik metrik na $\mathbb{R}^N$. Při bližším pohledu na pojmy vnitřku, vnějšku, otevřené množiny a konvergenci posloupnosti vzniká otázka, jak se tyto množiny liší podle toho, kterou metriku uvažujeme.

Podívejme se na problém obecněji. V této sekci odpovíme na následující otázky:

- Je-li posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů z množiny X, $a \in X$ je jeho limita podle metriky ρ_1, je pak také a limitou této posloupnosti podle metriky ρ_2?
- Je-li $a \in X$ vnitřním bodem množiny $A \subset X$ podle metriky ρ_1, je pak a vnitřním bodem množiny A i podle metriky ρ_2? Jinak řečeno, jak závisí množina $\operatorname{int} A$ na zvolené metrice? Podobné otázky si lze klást i pro další pojmy z Definice 1.58.

Pouze pro potřeby této sekce si zavedeme následující značení: Pro metriku ρ na množině X označme $\mathcal{U}_\varepsilon^\rho(a)$ jako ε-okolí bodu $a \in X$ v metrickém prostoru (X, ρ).

Definice 1.68 Nechť X je neprázdná množina a ρ_1, ρ_2 jsou metriky na X. Řekneme, že ρ_1 a ρ_2 jsou *ekvivalentní*, jestliže

- pro každé okolí $\mathcal{U}^{\rho_1}(a)$ existuje $\mathcal{U}^{\rho_2}(a)$ tak, že $\mathcal{U}^{\rho_2}(a) \subset \mathcal{U}^{\rho_1}(a)$ a
- pro každé okolí $\mathcal{U}^{\rho_2}(a)$ existuje $\mathcal{U}^{\rho_1}(a)$ tak, že $\mathcal{U}^{\rho_1}(a) \subset \mathcal{U}^{\rho_2}(a)$.

Začněme příkladem dvojice metrik, které nejsou ekvivalentní.

Příklad 1.69 Dokažte, že eukleidovská metrika ρ v $\mathbb{R}^N$ a diskrétní metrika ρ_d v $\mathbb{R}^N$ (viz Poznámku 1.42) nejsou ekvivalentní.

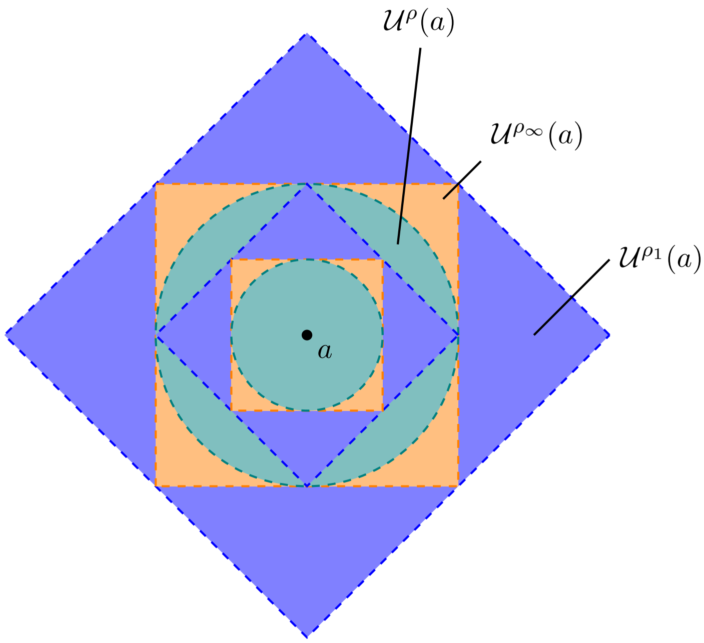
Řešení. (důkaz sporem) Uvažujme okolí nulového vektoru o poloměru $\frac{1}{2}$ v diskrétní metrice – jde o jednoprvkovou množinu $\{o\}$. Kdyby byla eukleidovská metrika ekvivalentní s diskrétní metrikou, pak bychom museli najít okolí nulového vektoru v eukleidovské metrice, které je podmnožinou $\{o\}$. Takové ovšem neexistuje. ◯

Nyní se podívejme na pozitivní příklady. K usnadnění ověřování ekvivalence si ještě uveďme *ekvivalenci norem.*

Poznámka 1.70 V normovaných lineárních prostorech se také definuje vztah ekvivalence mezi normami nad stejným nosičem. *Dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na vektorovém prostoru X nazveme ekvivalentní, jestliže existují $c_1, c_2 > 0$ tak, že*

$$\forall x \in X : \|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 \quad \wedge \quad \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2.$$

Podíváme-li se na Příklad 1.37, vidíme, že normy eukleidovská, součtová a maximová jsou ekvivalentní v $\mathbb{R}^N$ (dokonce libovolné dvě normy na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru jsou ekvivalentní – viz např. [10]). Čtenáři je přenechán důkaz faktu, že jsou-li metriky ρ_1 a ρ_2 ve vektorovém prostoru X indukovány *ekvivalentními* normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$, pak tyto metriky jsou také ekvivalentní. Tedy i metriky eukleidovská, součtová a maximová jsou ekvivalentní v $\mathbb{R}^N$ – to je také okamžitě vidět prostřednictvím okolí vzhledem k těmto metrikám, která lze do sebe jednoduše zanořovat, viz Obrázek 1.8.



Obrázek 1.8: Vztahy inkluze okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$ vzhledem k eukleidovské, součtové a maximové metrice.

Cvičení 1.71 Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ryze monotónní a spojitá na $\mathbb{R}$. Dokažte, že v $\mathbb{R}$ je eukleidovská metrika ekvivalentní s metrikou

$$\rho(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Nyní se podívejme, co lze říci o ekvivalentních metrikách. Začněme otázkou konvergence posloupností.

Věta 1.72. *Nechť X je neprázdná množina a ρ_1, ρ_2 jsou ekvivalentní metriky na X. Pak pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z X a bod $a \in X$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ v metrice } \rho_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ v metrice } \rho_2.$$

Důkaz. Stačí dokázat jen jednu implikaci, protože jde o „symetrické“ tvrzení. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ v metrice ρ_1. Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon^{\rho_2}(a)$ libovolně. Pak podle předpokladu ekvivalence metrik existuje $\mathcal{U}_\delta^{\rho_1}(a)$ tak, že $\mathcal{U}_\delta^{\rho_1}(a) \subset \mathcal{U}_\varepsilon^{\rho_2}(a)$. Následně z faktu

$$a_n \in \mathcal{U}_\delta^{\rho_1}(a) \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

vyplývá

$$a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon^{\rho_2}(a) \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ v metrice ρ_2. $\square$

Nyní se podívejme na otázku rozdílu mezi množinami z Definice 1.58.

Věta 1.73. *Nechť X je neprázdná množina a ρ_1, ρ_2 jsou ekvivalentní metriky na X, $a \in X$, $A \subset X$. Pak a je vnitřním bodem množiny A v prostoru (X, ρ_1) právě tehdy, když je vnitřním bodem množiny A v prostoru (X, ρ_2).*

Důkaz. Nechť a je vnitřním bodem množiny A v prostoru (X, ρ_1). Tedy existuje $\mathcal{U}_\varepsilon^{\rho_1}(a)$ tak, že $\mathcal{U}_\varepsilon^{\rho_1}(a) \subset A$. Podle předpokladu ekvivalence metrik pak existuje $\mathcal{U}_\delta^{\rho_2}(a)$ takové, že

$$\mathcal{U}_\delta^{\rho_2}(a) \subset \mathcal{U}_\varepsilon^{\rho_1}(a) \subset A,$$

tedy a je vnitřním bodem množiny A v prostoru (X, ρ_2). $\square$

Z předchozí věty a výsledků Cvičení 1.59 plyne následující tvrzení pro ekvivalentní metriky.

Důsledek 1.74. *Nechť X je neprázdná množina a ρ_1, ρ_2 jsou ekvivalentní metriky na X. Pak v obou metrických prostorech splývají pojmy otevřené a uzavřené množiny, vnitřek, vnějšek, uzávěr, derivace množiny a izolované body.*

V $\mathbb{R}^N$ je tedy jedno, kterou z metrik z Příkladu 1.46 zvolíme. Pak totiž konvergence posloupností a pojmy z Definice 1.58 a 1.60 splývají.

Poznámka 1.75 Ze Cvičení 1.71 a Příkladu 1.66 plyne, že vlastnost ohraničenosti množiny se vzhledem k dvěma ekvivalentním metrikám *nezachovává*. Oproti tomu, ekvivalence norem (viz Poznámku 1.70) již *zachovává* ohraničenost množiny, tzn. jsou-li $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ dvě ekvivalentní normy na vektorovém prostoru X, pak každá množina $A \subset X$ je ohraničená vzhledem k jedné normě právě tehdy, když je ohraničená vzhledem k druhé – dokažte!

Kapitola 2

Funkce více proměnných

Ve skriptech [13] jsme se seznámili s funkcemi jedné proměnné, které vyjadřovaly závislost jedné veličiny (tzv. závisle proměnné) na druhé (tzv. nezávisle proměnné). Často ale hodnoty nějaké veličiny nezávisejí jen na jedné ale na více nezávislých proměnných. Např. obsah obdélníku závisí na délkách jeho dvou stran, objem kvádru na délkách třech hran atp. V této kapitole si vyložíme základy teorie funkcí více proměnných, zejména pak diferenciální počet.

2.1 Základní pojmy a vlastnosti

Definice 2.1 Nechť $N \in \mathbb{N}$. Zobrazení $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nazveme *reálnou funkcí N reálných proměnných* (*funkcí N proměnných*; *funkcí v $\mathbb{R}^N$*).

Poznámka 2.2

- Funkce N reálných proměnných tedy každé uspořádané N-tici $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{D}(f)$ přiřazuje reálné číslo $f(x) = f\big((x_1, \ldots, x_N)\big)$, které budeme také zapisovat jako $f(x_1, \ldots, x_N)$. Odtud plyne označení „více proměnných" – totiž místo jedné (vektorové) proměnné budeme uvažovat několik (skalárních) proměnných $x_1, \ldots, x_N$. Zapisujeme
$$f: \quad y = f(x_1, \ldots, x_N) \qquad \text{nebo} \qquad (x_1, \ldots, x_N) \mapsto f(x_1, \ldots, x_N),$$
kde y říkáme *závisle proměnná* a $x_1, \ldots, x_N$ říkáme *nezávisle proměnné*.

- Pro $N = 2$ (resp. $N = 3$) často značíme
$$f: \quad z = f(x, y) \quad \big(\text{resp. } w = f(x, y, z)\big),$$
a to proto, abychom se vyhnuli indexům.

Příklad 2.3 Obsah obdélníku o stranách a, b je roven
$$S = ab.$$
Výraz S lze chápat jako funkci dvou nezávisle proměnných a, b, $a > 0$, $b > 0$, tedy budeme psát
$$S(a, b) = ab, \quad a, b \in (0, \infty),$$
tzn. $\mathcal{D}(S) = (0, \infty) \times (0, \infty)$ (i když výraz ab má smysl i pro nekladné hodnoty a, b).

Poznámka 2.4 Je-li funkce N proměnných f dána předpisem a není určen její definiční obor, pak definičním oborem budeme rozumět množinu všech uspořádaných N-tic, pro které má předpis funkce smysl – nazýváme jej *přirozeným definičním oborem.* Například přirozeným definičním oborem funkce S z Příkladu 2.3 je celá množina $\mathbb{R}^2$.

Příklad 2.5 Přirozeným definičním oborem funkce

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

je zřejmě množina

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2+y^2 \le 1\},$$

tedy uzavřený jednotkový kruh (kruh o poloměru 1 se středem v počátku).

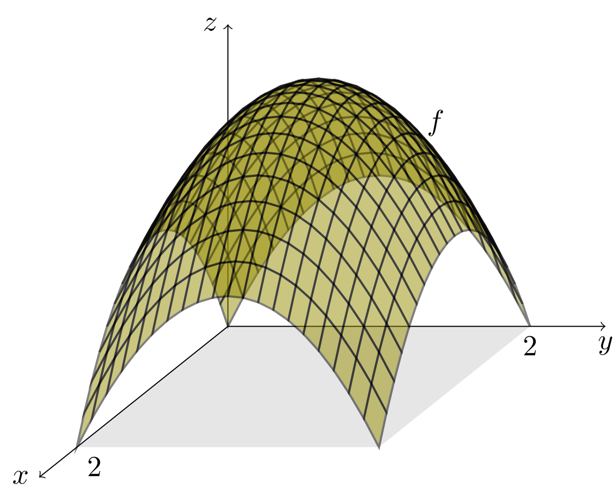
Definice 2.6 *Grafem funkce* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ rozumíme množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x_1,\dots,x_N,x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \ ; \ (x_1,\dots,x_N) \in \mathcal{D}(f), \ x_{N+1} = f(x_1,\dots,x_N)\}.$$

Příklad 2.7 Uvažujme funkci

$$f(x,y) = 4-(x-1)^2-(y-1)^2, \quad (x,y) \in [0,2] \times [0,2].$$

Její graf je načrtnut na Obrázku 2.1 – zřejmě jde o „plochu". Pro větší přehlednost je vlastně místo grafu funkce vykreslen pouze jeho „drátěný model". ◯



Obrázek 2.1: Graf funkce f z Příkladu 2.7 (definiční obor funkce f je vykreslen šedě).

Příklad 2.8 Grafem funkce z Příkladu 2.5 je množina

$$\operatorname{graf} f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2 \le 1 \ \wedge \ z = \sqrt{1-x^2-y^2}\right\},$$

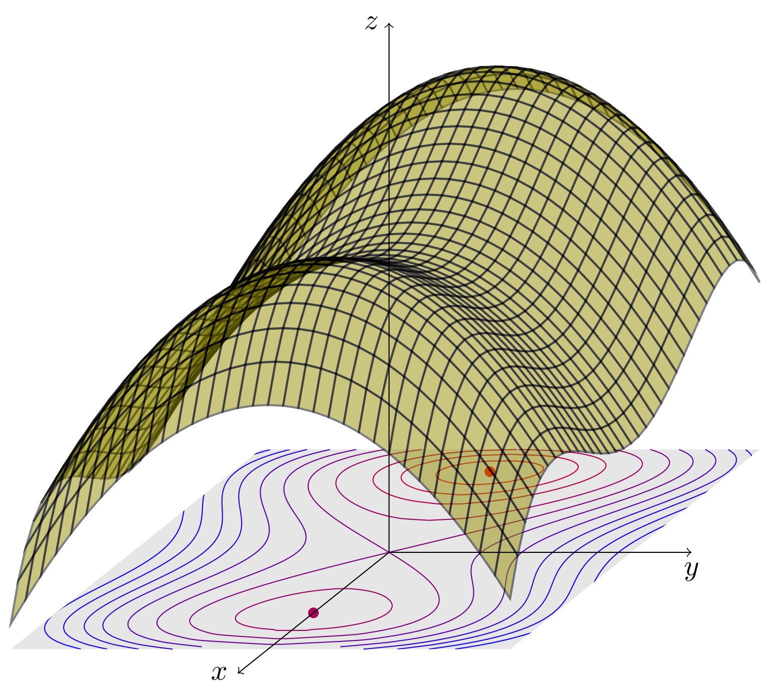
což je horní polosféra (včetně rovníku) jednotkové koule (to je koule o středu v počátku $(0,0,0)$ a poloměru 1).

Jak vidíme, již jen graf funkce dvou proměnných je podmnožina $\mathbb{R}^3$, nemluvě o funkcích více než dvou proměnných. Takový graf se velmi špatně graficky znázorňuje. Proto si ukážeme následující užitečný pojem, který okamžitě oceníme zejména pro funkce dvou a tří proměnných.

Definice 2.9 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. *Hladinou funkce* f *příslušné k číslu* c (*c-hladinou funkce* f; *vrstevnicí funkce* f) nazýváme množinu

$$H_c(f) = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{D}(f) \; ; \; f(x_1, \dots, x_N) = c\}.$$

Poznámka 2.10 Jeden z možných názvů „vrstevnice" je velmi výstižný. Uvažujme turistickou mapu – ve tvaru obdélníku, a zanedbejme zakřivení zemského povrchu. Každý bod na mapě se dá charakterizovat jako uspořádaná dvojice (x, y), kde x je zeměpisná délka a y zeměpisná šířka. Mapa tedy odpovídá kartézskému součinu dvou intervalů. Uvažujme ji jako definiční obor funkce dvou proměnných x a y, jejíž funkční hodnoty udávají nadmořskou výšku v daném bodě. Pak *hladiny této funkce odpovídají vrstevnicím na této mapě*, viz např. Obrázek 2.2, kde je znázorněn graf jisté funkce dvou proměnných společně s hladinami (vrstevnicemi). Přitom „nadmořská výška" (rovna číslu c z Definice 2.9) je vyjádřena barevně (chladnější barvy odpovídají menším hodnotám). Ještě jednou: *hladiny funkce odpovídají vrstevnicím* a *graf funkce odpovídá příslušné „plastické mapě"*. Zde je vidět jedna z výhod hladin funkce dvou proměnných – pro lepší představu o „průběhu" funkce stačí nakreslit co nejvíce hladin této funkce. U funkcí tří proměnných jsou navíc hladiny funkce jedinou možností jak si graficky znázornit takovou funkci.



Obrázek 2.2: Graf a hladiny funkce dvou proměnných.

Příklad 2.11 Určete a pokud možno načrtněte hladiny následujících funkcí:

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
2. $g(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
3. $h(x, y) = 2x - y + 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

4. $k(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Řešení. ad 1: Pro $c \in \mathbb{R}$ je c-hladina funkce f vlastně množinou všech řešení rovnice

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c$$

o dvou neznámých $x, y \in \mathbb{R}$ a jednom parametru c. Vzpomeneme si tak na střední školu, kde se rovnice s parametrem řešily. Proveďme diskuzi vzhledem k parametru c:

(a) Nechť $c < 0$. Pak tato rovnice žádné řešení nemá, protože levá strana je nezáporná pro jakékoliv $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Hladiny funkce pro tyto hodnoty parametru c jsou prázdné množiny – není co kreslit.

(b) Nechť $c = 0$. Hledáme tak řešení rovnice

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Po umocnění této nerovnosti vidíme, že musí platit $x^2 + y^2 = 0$. Protože ale x^2, $y^2 \geq 0$ a rovnost je splněna právě pro $x = 0$ a $y = 0$, pak dostáváme

$$H_0(f) = \{(0, 0)\}.$$

(c) Nechť $c > 0$. Po umocnění rovnice na druhou (jde o ekvivalentní úpravu, protože obě strany jsou zaručeně nezáporné) dostáváme

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Snad každý v této rovnici vidí rovnici kružnice se středem v $(0, 0)$ a poloměru c – to je tedy $H_c(f)$.

Některé hladiny této funkce jsou načrtnuty na Obrázku 2.3.
ad 2: Pro funkci g dostáváme podobné výsledky. Jediný rozdíl je v hladinách pro $c > 0$, přesně: $H_c(g)$ je kružnice o středu $(0, 0)$ a poloměru $\sqrt{c}$.
ad 3: V tomto případě je pro každé $c \in \mathbb{R}$ hladinou funkce množina všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ splňujících

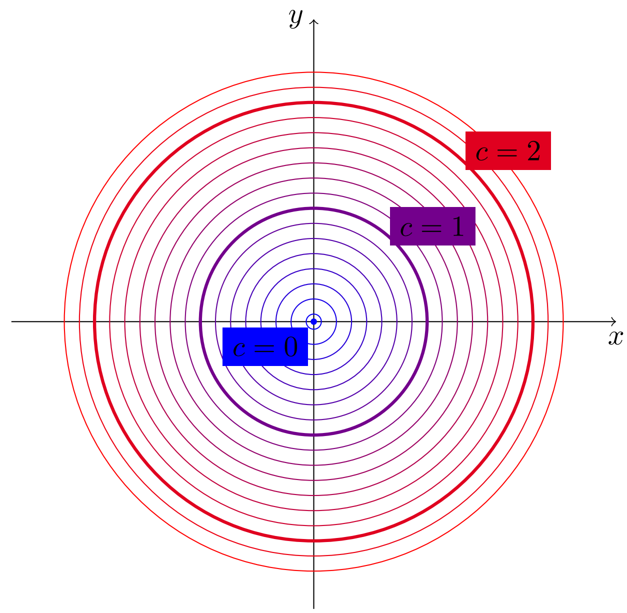
$$2x - y + 1 - c = 0,$$

tzn. jde o přímky procházející bodem $(0, 1 - c)$ mající směrový vektor $(1, 2)$.
ad 4: Postupujeme podobně jako u funkce f. Pro $c < 0$ jsou hladiny prázdnými množinami, $H_0(k) = \{(0, 0, 0)\}$ a pro $c > 0$ jsou $H_c(k)$ sférami (tzn. hranicemi koule) se středem v bodě $(0, 0, 0)$ a poloměrem c. ◯

Podobně jako pro funkce jedné proměnné lze definovat další pojmy jako *funkce shora, zdola ohraničená na množině.*

Definice 2.12 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathcal{D}(f)$. Funkci f nazýváme *zdola ohraničená/shora ohraničená/ohraničená*, je-li takový její obor hodnot. Funkci f nazýváme *zdola ohraničenou/shora ohraničenou/ohraničenou na* A, je-li taková množina $f(A)$.

Dále definujeme *supremum, infimum, maximum, minimum na množině.*



Obrázek 2.3: Některé hladiny funkce f z Příkladu 2.11.

Definice 2.13 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}(f)$. Pak definujeme

$$\sup_A f = \sup f(A) = \sup\{f(x)\ ;\ x \in A\},$$
$$\inf_A f = \inf f(A) = \inf\{f(x)\ ;\ x \in A\}$$

a nazýváme postupně *supremem/infimem funkce f na množině A*. A dále

$$\max_A f = \max f(A) = \max\{f(x)\ ;\ x \in A\},$$
$$\min_A f = \min f(A) = \min\{f(x)\ ;\ x \in A\},$$

kterým říkáme postupně *(globální, absolutní) maximum a minimum funkce f na množině A*, neboli *největší* a *nejmenší funkční hodnota funkce f na množině A* (pokud tato čísla vůbec existují).

Příklad 2.14 Funkce f z Příkladu 2.5 je ohraničená shora i zdola. Má největší funkční hodnotu, což je číslo $1 = f(0,0)$, a nejmenší funkční hodnotu 0 (funkční hodnoty funkce f na jednotkové kružnici). Zřejmě pak supremum funkce f je rovno číslu 1 a infimum číslu 0. ○

Další pojmy jako parita či periodicita se u funkcí více proměnných také dají smysluplně definovat. My ovšem tyto vlastnosti nebudeme potřebovat.

2.2 Operace s funkcemi více proměnných

Podobně jako u funkcí jedné reálné proměnné lze definovat sčítání (odčítání, násobení, dělení). Například pro funkce $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definujeme jejich součet jako funkci s předpisem

$$(f+g)(x_1, \ldots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_N) + g(x_1, \ldots, x_N)$$

pro každé $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{D}(f+g) := \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$.

Zajímavé jsou složené funkce více proměnných.

Definice 2.15 Nechť $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, g_1, g_2, …, $g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jsou takové, že množina

$$A = \{x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2) \cap \cdots \cap \mathcal{D}(g_M) \; ; \; \big(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_M(x)\big) \in \mathcal{D}(f)\}$$

je neprázdná. Pak složením funkcí f a g_1, …, g_M rozumíme funkci $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$F(x_1, \ldots, x_N) = f\big(g_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, g_M(x_1, \ldots, x_N)\big)$$

pro každé $(x_1, \ldots, x_N) \in A =: \mathcal{D}(F)$. Funkci f nazýváme *vnější funkcí funkce* F a funkce g_1, …, g_M nazýváme *vnitřními funkcemi funkce* F.

Příklad 2.16 Mějme definovány funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, g_1, $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ předpisy

$$\begin{aligned} f(u,v) &= u^2 + v^3, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2, \\ g_1(x,y,z) &= xyz, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ g_2(x,y,z) &= x + y, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pak funkce F z Definice 2.15 vzniklá jejich složením má předpis

$$F(x,y,z) = x^2y^2z^2 + (x+y)^3, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

○

2.3 Elementární funkce v $\mathbb{R}^N$

Stejně jako jsme uvažovali elementární funkce jedné proměnné, můžeme uvažovat i elementární funkce N proměnných. Budeme je definovat jako funkce v $\mathbb{R}^N$ vzniklé pomocí algebraických operací (tj. sčítání, násobení, odčítání a dělení) a operace skládání (viz Definici 2.15) z těchto funkcí:

1. konstantní funkce v $\mathbb{R}^N$ (tzn. funkce mající jednoprvkový obor hodnot),
2. elementární funkce jedné proměnné,
3. projekce v $\mathbb{R}^N$.

Ze zmíněných funkcí je pro nás nový třetí typ elementárních funkcí.

Definice 2.17 Pro každé $i = 1, \ldots, N$ rozumíme *i-tou projekcí v* $\mathbb{R}^N$ funkci $\Pi_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$\Pi_i(x_1, \ldots, x_N) = x_i, \quad (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Poznámka 2.18 Funkce z Definice 2.17 získala svůj název díky faktu, že jde o zobrazení, které každému bodu $(x_1, \ldots, x_N)$ přiřazuje jeho i-tou souřadnici, což se dá chápat jako ortogonální (pravoúhlá) projekce tohoto bodu do i-té souřadné osy – pro $N = 2$ a $N = 3$ viz Obrázek 1.1.

Příklad 2.19 Ověřte, že funkce s předpisem

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \sin(xy)$$

je elementární funkce v $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Uvažujme obě projekce v $\mathbb{R}^2$, tj.

$$\Pi_1(x, y) = x, \quad \Pi_2(x, y) = y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dále uvažujme součiny $f_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2$, $f_2 = \Pi_1^2$ a $f_3 = \Pi_2^2$, tzn. funkce

$$f_1(x, y) = xy, \quad f_2(x, y) = x^2, \quad f_3(x, y) = y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Funkci f_1 lze složit s funkcí jedné proměnné sin (sin je vnější, f_1 je vnitřní) a funkci $-f_2 - f_3$ složíme s exponenciální funkcí exp (exp je vnější a $-f_2 - f_3$ je vnitřní) a dostáváme tak funkce

$$f_4(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \quad f_5(x, y) = \sin(xy), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Jejich součin je zadaná funkce. ○

Z konstantních funkcí a projekcí můžeme pomocí operace násobení vytvořit funkce mající předpis

$$g(x_1, \ldots, x_N) = c x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_N^{k_N}, \tag{2.1}$$

kde $c \in \mathbb{R}$, $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ pro $i = 1, \ldots, N$. Jde tedy o elementární funkce.

Definice 2.20 Funkci g z (2.1) pro $c \neq 0$ budeme nazývat *jednočlenem v* $\mathbb{R}^N$ (*monomem v* $\mathbb{R}^N$) *stupně* $k_1 + \cdots + k_N$. *Polynomem v* $\mathbb{R}^N$ rozumíme buď nulovou funkci nebo součet (konečného počtu) jednočlenů. *Stupněm nenulového polynomu* rozumíme největší ze stupňů jednočlenů jejichž je součtem (stupeň nulového polynomu nedefinujeme).

Příklad 2.21

1. Každou nenulovou konstantní funkci lze chápat jako polynom stupně 0.
2. Funkce s předpisem

   $$P(x_1, \ldots, x_N) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_N x_N, \quad (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

   kde $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, N$ a alespoň jedno z čísel c_1, …, c_N je nenulové, je polynom stupně 1.
3. Funkce třech proměnných

   $$P(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3^5 + 4x_1 x_2^2 x_3 - 2x_1 x_2, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

   je polynom stupně 8, protože je konečným součtem jednočlenu

   $$3x_1^2 x_2 x_3^5$$

stupně $2+1+5=8$, jednočlenu

$$4x_1x_2^2x_3$$

stupně $1+2+1=4$ a jednočlenu

$$-2x_1x_2$$

stupně $1+1+0=2$. ○

Definice 2.22 Polynom P v $\mathbb{R}^N$ nazveme *homogenní polynom stupně* $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (*formou* m*-tého stupně*), jestliže platí

$$P(tx_1,\ldots,tx_n) = t^m P(x_1,\ldots,x_N)$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$ a $(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Poznámka 2.23 Snadno se dá vidět, že

- nulová funkce je homogenní polynom všech stupňů,
- jednočlen je homogenní polynom,
- nenulový polynom je homogenní právě tehdy, když je součtem jednočlenů *stejného stupně* – ten je roven stupni tohoto homogenního polynomu.

Příklad 2.24 Polynom

$$P(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2x_2x_3^5 + 2x_1^8 - 3x_1x_2^7 + 4x_1x_2x_3^6$$

je homogenní polynom stupně 8. Stačí ověřit, že je splněna podmínka z Definice 2.22 nebo pozorovat, že tento polynom je součtem jednočlenů stupně 8.

Poznámka 2.25 (o lineární formě) Homogenní polynom prvního stupně (*lineární forma*) v $\mathbb{R}^N$ je zobrazení definované předpisem

$$\ell(x_1,\ldots,x_N) = c_1x_1 + \ldots + c_Nx_N, \quad (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^N,$$

kde $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$. Předpis lze také chápat jako *standardní skalární součin* (viz Definici 1.6) vektoru proměnných a vektoru $c = (c_1,\ldots,c_N) \in \mathbb{R}^N$, tzn.

$$\ell(x_1,\ldots,x_N) = \big((c_1,\ldots,c_N),(x_1,\ldots,x_N)\big).$$

Vektoru $c = (c_1,\ldots,c_N)$ pak říkáme *reprezentant lineární formy*. Kromě toho se lze na předpis dívat jako na maticový součin

$$\ell(x_1,\ldots,x_N) = (c_1,\ldots,c_N)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix},$$

kde druhý vektor je transponovaný k vektoru $(x_1,\ldots,x_N)$. S využitím vektorového označení pak lze psát

$$\ell(x) = (c,x) = c\cdot x^T = x\cdot c^T, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Poznámka 2.26 (o kvadratické formě) Homogenním polynomem druhého stupně v $\mathbb{R}^N$ (*kvadratickou formou*) je zobrazení definované předpisem

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}x_ix_j,\quad (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^N,$$

kde $a_{ij}\in\mathbb{R}$ pro $i,j=1,\dots,N$. Přitom lze vzhledem ke komutativitě násobení předpokládat, že tyto koeficienty jsou „symetrické“, tzn. $a_{ij}=a_{ji}$ pro každé $i,j=1,\dots,N$ (opravdu, pokud $a_{ij}\neq a_{ji}$ pak lze tyto koeficienty předefinovat hodnotou $(a_{ij}+a_{ji})/2$, tzn. jejich aritmetickým průměrem, viz Příklad 2.28(2)). Předpis lze pak chápat jako následující součiny vektoru proměnných a *symetrické* matice $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{N,N}$, konkrétně je to

$$q(x_1,\dots,x_N)=(x_1,\dots,x_N)\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1N}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2N}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{N1}&a_{N2}&\cdots&a_{NN}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_N\end{pmatrix},\quad (x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N,$$

tzn. vektorově

$$q(x)=xAx^T,\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Ověřte to vynásobením těchto vektorů a matice. Kromě toho lze předpis takové funkce chápat jako následující skalární součin

$$q(x)=(xA,x)=(Ax^T,x^T),\quad x\in\mathbb{R}^N$$

(pozor, poslední rovnost platí proto, že A je symetrická, tzn. $A^T=A$). Matici A nazýváme *reprezentantem kvadratické formy.* Je třeba dodat, že právě symetrie matice zaručuje jednoznačnost tohoto reprezentanta (tzn. každá kvadratická forma má právě jednoho reprezentanta – podobně jako tomu je u lineární formy).

Poznámka 2.27 (o formě stupně m) Obecně, formou stupně m je funkce s předpisem

$$f(x_1,\dots,x_N)=\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_m=1}^{N}a_{i_1i_2\cdots i_m}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m},\quad (x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N,$$

kde $a_{i_1i_2\cdots i_m}\in\mathbb{R}$ pro všechny $i_1,\dots,i_m\in\{1,\dots,N\}$. Formy stupně m využijeme v definici diferenciálu m-tého řádu funkce více proměnných – viz dále Definici 2.114.

Příklad 2.28

1. Funkce $\ell:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definovaná předpisem

   $$\ell(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2+10x_3,\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$

   je lineární forma v $\mathbb{R}^3$. Její reprezentant je vektor

   $$c=(1,-2,10).$$

2. Funkce

   $$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-2x_1x_3+3x_2x_4-x_3x_4,\quad (x_1,\dots,x_4)\in\mathbb{R}^4$$

je kvadratická forma v $\mathbb{R}^4$. Jejím reprezentantem je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že tomu tak skutečně je (vynásobením této matice vektorem proměnných z obou stran).

3. Funkce

$$P(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_1x_2^2 + 10x_1^2x_2 + x_2^3, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

je formou třetího stupně v $\mathbb{R}^2$. ○

2.4 Limita funkce

U funkcí jedné proměnné znamenal symbol $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ hodnotu, ke které se „blížily“ funkční hodnoty funkce $f(x)$, jestliže argument x se „blížil“ k a. Podobně budeme definovat tento pojem i pro funkce více proměnných. Zde definovaný pojem limity bude o něco obecnější. Předpoklad, aby pro bod a existovalo jeho redukované okolí, jež je podmnožinou definičního oboru, nahradíme slabším předpokladem – bude stačit, aby tento bod byl pouze *hromadným bodem* definičního oboru.

Definice 2.29 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$, $L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f *má v bodě a limitu L*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}(f), x \in \mathcal{R}_\delta(a) \, : \, f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L),$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon(L) \ \exists \mathcal{R}_\delta(a) \, : \, f\big(\mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Pak píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Poznámka 2.30

(a) Jak souvisí Definice 2.29 pro $N = 1$ s definicemi limity ve vlastním bodě z [13, Definice 5.3, 5.10]? Nejprve si uvědomme, že jestliže existuje redukované okolí bodu a, jež je podmnožinou $\mathcal{D}(f)$, pak $a \in \mathcal{D}(f)'$. Pro $N = 1$ je tedy v Definici 2.29 představeno zobecnění limity funkce jedné proměnné (limity ve vlastním bodě) z [13].

(b) Smysl předpokladu $a \in \mathcal{D}(f)'$ spočívá v tom, aby „se šlo s x blížit neomezeně k a v rámci definičního oboru“.

(c) Někdy je užitečné definovat i limity v „nevlastních bodech“, tzn. bodech z $(\mathbb{R}^*)^N$. Definice limity pak bude formálně stejná, jen je třeba dodefinovat pojmy redukovaného okolí i pro body z $(\mathbb{R}^*)^N \setminus \mathbb{R}^N$. Pro $a = (a_1, \ldots, a_N) \in (\mathbb{R}^*)^N \setminus \mathbb{R}^N$ definujeme

$$\mathcal{R}_\varepsilon(a) = \mathcal{U}_\varepsilon(a) = \mathcal{U}_\varepsilon(a_1) \times \mathcal{U}_\varepsilon(a_2) \times \cdots \times \mathcal{U}_\varepsilon(a_N).$$

Např. pro $(\infty, y_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$, kde $y_0 \in \mathbb{R}$, je definováno

$$\mathcal{R}_\varepsilon\big((\infty, y_0)\big) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon),$$

a třeba

$$\mathcal{R}_\varepsilon\big((-\infty, \infty)\big) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \times \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right).$$

Nakreslete si tyto dvě množiny! Je dále nutno upozornit, že v tom případě je předpoklad $a \in \mathcal{D}(f)'$ potřeba nahradit předpokladem, že $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{R}_\varepsilon(a) \neq \emptyset$ pro každé $\varepsilon > 0$.

(d) Další pojem, který je užitečný např. v souvislosti s optimalizací funkcí více proměnných (tzn. hledání minimálních a maximálních hodnot funkcí), je následující: *Za předpokladu, že pro každé $\mathcal{U}_\delta(o)$ platí $\mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{U}_\delta(o) \neq \emptyset$, řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má limitu $L \in \mathbb{R}^*$ pro $\|x\| \to \infty$, jestliže*

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \exists \mathcal{U}_\delta(o) :\ f\big(\mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{U}_\delta(o)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(L);$$

píšeme pak

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = L.$$

Příklad 2.31 Dokažte, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = 0.$$

Řešení. Podívejme se nejprve na definiční obor funkce f. Jde o množinu

$$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x \neq y\}.$$

Snadno se ověří, že $(0, 0) \in \mathcal{D}(f)'$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$\left|\frac{x^2 - y^2}{x - y} - 0\right| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq \|(x, y)\| + \|(x, y)\| \leq 2\|(x, y)\| = 2\rho((x, y), (0, 0)).$$

Odtud vidíme, že položíme-li $\delta < \varepsilon/2$, pak pro každé $(x, y) \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{R}_\delta\big((0, 0)\big)$ platí

$$\left|\frac{x^2 - y^2}{x - y} - 0\right| \leq 2\delta < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

○

Můžeme okamžitě vyslovit Heineovu nutnou a postačující podmínku. Důkaz je ponechán čtenáři – inspiraci lze nalézt u stejnojmenné věty pro funkce jedné proměnné (viz např. [13, Důsledek 5.35]).

Věta 2.32 (Heineova o limitě)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$, $L \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{x \to a} f(x) = L$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x^{[n]}\}_{n=1}^\infty$ bodů z $\mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ pro niž $\lim_{n\to\infty} x^{[n]} = a$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{[n]}) = L.$$

Dále si uvědomme, že u funkce jedné proměnné jsme se k bodu a mohli blížit ze dvou stran: zprava či zleva. U funkce dvou a více proměnných těchto „cest“, po kterých se argument x blíží k a, je daleko více – jde o nejrůznější křivky (přímky, paraboly, roviny) i mnohem složitější množiny. To pak vede k *limitě vzhledem k dané množině*, což lze chápat jako zobecnění jednostranných limit funkce jedné proměnné.

Definice 2.33 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in (A \cap \mathcal{D}(f))'$, $L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f *má v bodě a limitu L vzhledem k množině A*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in A \cap \mathcal{D}(f),\ x \in \mathcal{R}_\delta(a) \ :\ f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L),$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \exists \mathcal{R}_\delta(a) \ :\ f\big(\mathcal{R}_\delta(a) \cap A \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Pak píšeme

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L.$$

Poznámka 2.34

- Limitu funkce f vzhledem k množině A lze ekvivalentně definovat jako limitu restrikce této funkce na množinu $A \cap \mathcal{D}(f)$, protože

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

existuje právě tehdy, když existuje

$$\lim_{x \to a} f|_{A \cap \mathcal{D}(f)},$$

a pokud existují, jsou si rovny. Dokažte!

- Speciálně pro $N = 1$, tzn. pro funkci jedné proměnné, položíme-li $A = (a, \infty)$ dostáváme limitu zprava a pro $A = (-\infty, a)$ dostáváme limitu zleva.

Příklad 2.35 Je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

pro každé $k \in \mathbb{R}$ jsou dány množiny

$$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ y = kx\}.$$

Vypočtěte limitu funkce f v bodě $(0, 0)$ vzhledem k A_k pro každé $k \in \mathbb{R}$.

Řešení. Zvolme libovolně $k \in \mathbb{R}$. Zřejmě množina A_k je přímka procházející bodem $(0, 0)$ a $(1, k)$ – načrtněte si. Snadno je pak vidět, že $(0, 0)$ je hromadným bodem průniku množin $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a A_k. Má tedy smysl uvažovat danou limitu. Vypočtěme ji. Platí

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in A_k}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in A_k}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{(1 + k)x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{k}{1 + k} = \frac{k}{1 + k},$$

kde jsme v druhé rovnosti přešli k limitě funkce jedné proměnné, protože výraz v limitě již nezávisel na proměnné y. ◯

Věta 2.36. *Funkce f má v bodě $a \in \mathcal{D}(f)'$ nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. (sporem) Předpokládejme, že funkce f má v bodě a dvě limity L_1, $L_2 \in \mathbb{R}^*$, $L_1 \neq L_2$. Pak existují okolí $\mathcal{U}_{\epsilon_1}(L_1)$ a $\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(L_2)$ taková, že $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(L_1) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(L_2) = \emptyset$. Podle definice limity pak existují redukovaná okolí $\mathcal{R}_{\delta_1}(a)$ a $\mathcal{R}_{\delta_2}(a)$ taková, že

- pro každé $x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_{\varepsilon_1}(L_1)$ a
- pro každé $x \in \mathcal{R}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(L_2)$.

Zvolme libovolně $x \in \mathcal{R}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{R}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}(f)$. Pak ale

$$f(x) \in \mathcal{U}_{\varepsilon_1}(L_1) \cap \mathcal{U}_{\varepsilon_2}(L_2),$$

což je ve sporu s disjunktností obou okolí. □

Následující věta zobecňuje tvrzení pro funkci jedné proměnné o tom, že existence limity funkce implikuje existenci a rovnost jednostranných limit.

Věta 2.37. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in (A \cap \mathcal{D}(f))'$, $L \in \mathbb{R}^*$. Existuje-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, pak existuje i limita*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

a ta je rovna L.

Důkaz. Nechť existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ libovolně. Pak podle definice existuje $\mathcal{R}_\delta(a)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$. Následně pro libovolné $x \in \mathcal{R}_\delta(a) \cap A \cap \mathcal{D}(f)$ platí $x \in \mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ a tedy $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$. □

Důsledek této věty nám pomůže při dokazování neexistenci limity funkce.

Důsledek 2.38. *Jestliže existují A, $B \subset \mathbb{R}^N$ takové, že $a \in (A \cap \mathcal{D}(f))' \cap (B \cap \mathcal{D}(f))'$ a*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x),$$

pak $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad 2.39 Funkce f z Příkladu 2.35 v bodě $(0, 0)$ *nemá limitu*. Plyne to právě z řešení tohoto příkladu, kdy jsme zjistili, že hodnota limity této funkce *závisí* na množinách, po kterých se k $(0, 0)$ blížíme. ○

Nyní se podívejme na některé vlastnosti limity funkce více proměnných, které již známe pro funkce jedné proměnné. Důkazy následujících vět jsou přenechány čtenáři. Lze se inspirovat jejich speciálními případy formulovanými a dokázanými např. v [13]. Většinu lze také dokázat použitím Heineovy věty (Věta 2.32), která převádí problém na limity posloupností reálných čísel.

Nejprve nás nepřekvapí, že limity funkcí lze opět sčítat, odčítat, násobit a dělit.

Věta 2.40 (o aritmetice)**.** *Nechť* $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g))'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí*

(i) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L_1|$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L_1 \pm L_2$,

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$,

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

pokud jsou výrazy na pravých stranách definované.

Dále, funkce mající vlastní/nevlastní limity jsou pak na průnicích redukovaných okolí daného bodu s definičním oborem funkce ohraničené/neohraničené.

Věta 2.41 (limita a ohraničenost)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$.

(a) Má-li f *vlastní limitu v bodě* a*, pak existuje* $\mathcal{R}(a)$ *tak, že je* f *na množině* $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ *ohraničená.*

(b) Má-li f *nevlastní limitu* ∞ *v bodě* a*, pak pro každé* $\mathcal{R}(a)$ *je* f *neohraničená shora na* $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ *a existuje* $\mathcal{R}(a)$ *tak, že* f *je ohraničená zdola na* $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$.

(c) Má-li f *nevlastní limitu* $-\infty$ *v bodě* a*, pak pro každé* $\mathcal{R}(a)$ *je* f *neohraničená zdola na* $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ *a existuje* $\mathcal{R}(a)$ *tak, že* f *je ohraničená shora na* $\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$.

Důkaz. Na ukázku dokažme alespoň tvrzení (a). Označme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Podle předpokladu pak k $\varepsilon = 1$ existuje $\mathcal{R}(a)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $|f(x) - L| < 1$, tzn.

$$L - 1 < f(x) < L + 1. \qquad \square$$

Kladnost limity implikuje kladnost funkce na nějakém jejím redukovaném okolí – viz následující větu.

Věta 2.42. *Nechť funkce* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *má kladnou limitu* $L \in \mathbb{R}^*$ *v bodě* a*. Pak existuje* $\mathcal{R}(a)$ *takové, že*

$$f(x) > 0 \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f).$$

Je-li navíc tato limita vlastní, pak existuje $\mathcal{R}(a)$ *takové, že*

$$f(x) > \frac{L}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f).$$

Důkaz. Uvažujme $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ takové, že $\mathcal{U}_\varepsilon(L) \subset (0, \infty)$. Pak podle Definice 2.29 existuje $\mathcal{R}_\delta(a)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ platí

$$f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L) \subset (0, \infty).$$

Je-li navíc $L \in \mathbb{R}$, stačí vzít $\mathcal{U}_\varepsilon(L)$ pro $\varepsilon = L/2$. $\square$

Důkazy následujících tvrzení jsou přenechána čtenáři.

Věta 2.43 (o dvou limitách). *Nechť* $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$, *existuje* $\mathcal{R}(a)$ *tak, že*

$$\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(g)$$

a

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f).$$

Pak platí implikace

- *je-li* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, *pak* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,
- *je-li* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, *pak* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Věta 2.44 (o třech limitách). *Nechť* $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$, *existuje* $\mathcal{R}(a)$ *tak, že*

$$\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(g) = \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(h),$$

$$\forall x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f) \; : \; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

a také

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Pak existuje $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, *přitom je rovna* L.

2.5 Spojitost funkce

Nyní se podívejme na spojitost funkce v bodě. Podobně jako u limity, u spojitosti si představíme obecnější definici funkce oproti skriptům [8,13]. Tam byla *spojitost funkce jedné proměnné v bodě* definována za předpokladu, že tento bod byl *vnitřním bodem definičního oboru* funkce. Zde budeme pouze předpokládat, že tento bod *je prvkem definičního oboru* dané funkce.

Definice 2.45 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f *je v bodě* a *spojitá*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{D}(f), x \in \mathcal{U}_\delta(a) \; : \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big) \; \exists \mathcal{U}_\delta(a) \; : \; f\big(\mathcal{U}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Asi nás nepřekvapí následující analogie Heineho věty pro spojitost funkce v bodě. Její důkaz je přenechán čtenáři jako cvičení.

Věta 2.46 (Heineova o spojitosti). *Nechť* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. *Funkce* f *je spojitá v bodě* a *právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\big\{x^{[n]}\big\}_{n=1}^{\infty}$ *bodů z* $\mathcal{D}(f)$ *pro niž* $\lim\limits_{n \to \infty} x^{[n]} = a$ *platí*

$$\lim_{n \to \infty} f(x^{[n]}) = f(a).$$

Jako jsme zavedli limitu vzhledem k množině, analogicky tento pojem můžeme zavést pro spojitost v bodě.

Definice 2.47 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \mathcal{D}(f) \cap A$. Řekneme, že funkce f je v bodě *a spojitá vzhledem k množině A*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0\ \forall x \in A \cap \mathcal{D}(f),\ x \in \mathcal{U}_\delta(a) :\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big)\ \exists \mathcal{U}_\delta(a) :\ f\big(\mathcal{U}_\delta(a) \cap A \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Poznámka 2.48

(a) Z Definice 2.47 okamžitě plyne, že f je spojitá v bodě a vzhledem k množině A právě tehdy, když restrikce $f|_{A\cap\mathcal{D}(f)}$ je spojitá v bodě a. A z toho zase plyne, že pokud najdeme nějakou množinu A, vzhledem ke které není f spojitá v bodě a, pak f není v bodě a spojitá.

(b) Uvědomme si, co spojitost vzhledem k množině znamená pro $N = 1$. Uvažujeme-li spojitost funkce f vzhledem k množině $A = [a, \infty)$ dostáváme spojitost zprava a pro $A = (-\infty, a]$ dostáváme spojitost zleva.

(c) Pro spojitost funkce f v bodě a vzhledem k množině $A \subset \mathbb{R}^N$ lze také vyslovit příslušnou Heineovu větu. Jediná změna v tvrzení Věty 2.46 je v tom, že členy posloupnosti $\big\{x^{[n]}\big\}_{n=1}^{\infty}$ jsou z množiny $\mathcal{D}(f) \cap A$.

Následující věta nám ukazuje jeden ze způsobů, jak prakticky určovat spojitost funkce v daném bodě.

Věta 2.49. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Jestliže existuje $K > 0$ a $\mathcal{R}(a)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ platí*

$$|f(x) - f(a)| \le K\rho(x, a),$$

pak f je spojitá funkce v bodě a.

Důkaz. Vezmeme $\varepsilon > 0$ libovolné a položíme $\delta = \varepsilon/K$. Pak pro každé $x \in D$ takové, že $\rho(x, a) < \delta$ platí

$$|f(x) - f(a)| \le K\rho(x, a) < K\delta = K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon. \qquad \square$$

Příklad 2.50 Dokažte, že platí:

(1) Každé konstantní zobrazení je spojité v každém bodě z $\mathbb{R}^N$.

(2) Projekce v $\mathbb{R}^N$ jsou spojité funkce v každém bodě z $\mathbb{R}^N$.

(3) Funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{pro } (x, y, z) \ne (0, 0, 0), \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

je spojitá v bodě $(0, 0, 0)$.

(4) Funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ daná předpisem

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

není spojitá v bodě $(0,0)$.

Řešení.

(1) Nechť f je konstantní zobrazení, tj. existuje $c\in\mathbb{R}$ tak, že

$$f(x)=c,\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Vezmeme libovolný bod $a\in\mathbb{R}^N$. Platí

$$\rho(f(x),f(a))=\rho(c,c)=0\leq K\rho(x,a)$$

pro každé $x\in\mathbb{R}^N$, přitom za K lze zvolit libovolné kladné číslo. Podle Věty 2.49 je f spojitá v bodě a.

(2) Uvažujme projekci $\Pi_i:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,\dots,N\}$ a $a=(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^N$. Pak pro každé $x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$ platí

$$\rho(\Pi_i(x),\Pi_i(a))=\rho(x_i,a_i)=|x_i-a_i|\leq\sqrt{\sum_{j=1}^N(x_j-a_j)^2}=\rho(x,a),$$

tedy lze položit $K=1$ a použít Větu 2.49.

(3) Platí

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right|=\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{z^2}}{x^2+y^2+z^2}\leq\frac{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}{x^2+y^2+z^2}$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho((x,y,z),(0,0,0))$$

pro $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. V tomto případě lze opět položit $K=1$ a použít Větu 2.49.

(4) Ukážeme, že funkce f není spojitá v bodě $(0,0)$. Uvažujme restrikci funkce f na množině

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=x\}.$$

Pak zřejmě

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{pro } (x,y)\in A\setminus(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Je vidět, že funkce g není spojitá v $(0,0)$, tedy podle Poznámky 2.48(a) nemůže být spojitá ani funkce f. ○

Mezi spojitostí a limitou funkce je opět velmi těsný vztah.

Věta 2.51. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Pak platí:*

(a) jestliže a je izolovaný bod $\mathcal{D}(f)$, pak f je v bodě a spojitá,

(b) jestliže a je hromadný bod $\mathcal{D}(f)$, pak f je v bodě a spojitá právě tehdy, když

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Důkaz. ad (a): Nechť je tedy a izolovaným bodem definičního oboru funkce f. Podle Definice 1.58 pak existuje $\mathcal{U}_\delta(a)$ tak, že

$$\mathcal{U}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) = \{a\}.$$

Vezměme $\mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big)$ libovolně. Pak

$$f\big(\mathcal{U}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) = f(\{a\}) = \{f(a)\} \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big),$$

tedy f je podle definice spojitá v a.
ad (b): Nechť a je hromadným bodem $\mathcal{D}(f)$. Nechť f je v bodě a spojitá. Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big)$ libovolně. Pak existuje $\mathcal{U}_\delta(a)$ tak, že

$$f\big(\mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset f\big(\mathcal{U}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big),$$

tzn. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Předpokládejme naopak, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Zvolme $\mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big)$ libovolně. Podle předpokladu existuje $\mathcal{R}_\delta(a)$ tak, že

$$f\big(\mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Protože $f(a) \in \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big)$, pak

$$f\big(\mathcal{U}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) = f\big(\{a\} \cup (\mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f))\big) = f(\{a\}) \cup f\big(\mathcal{R}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big). \quad \square$$

Věta 2.52. *Nechť $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Jsou-li f a g spojité v bodě a, pak jsou v tomto bodě spojité funkce $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ i funkce $\frac{f}{g}$ za dodatečného předpokladu $g(a) \neq 0$.*

Důkaz. S výhodou využijeme Větu 2.46 a větu o aritmetice limit posloupností reálných čísel. Dokažme, že $f+g$ je spojitá v bodě a. Uvažujme libovolnou posloupnost $\big\{x^{[n]}\big\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} x^{[n]} = a$. Podle předpokladu spojitosti funkcí f a g v bodě a pak $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^{[n]}) = f(a)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} g(x^{[n]}) = g(a)$. Protože jde o posloupnosti reálných čísel, platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (f+g)(x^{[n]}) &= \lim_{n\to\infty} \big(f(x^{[n]}) + g(x^{[n]})\big) = \lim_{n\to\infty} f(x^{[n]}) + \lim_{n\to\infty} g(x^{[n]}) \\ &= f(a) + g(a) = (f+g)(a).\end{aligned}$$

Spojitost zbývajících funkcí se dokáže podobně. $\square$

Nyní se podívejme na spojitost funkce na množině.

Definice 2.53 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f *je spojitá na množině* A, jestliže

$$\forall x' \in A \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in A, \left\| x - x' \right\| < \delta \ : \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.54 Spojitost na množině se dá ekvivalentně definovat tak, že f *je spojitá v každém bodě množiny* A *vzhledem k množině* A – což je kratší, ale možná méně pochopitelné.

Z Věty 2.52 okamžitě dostáváme následující tvrzení.

Důsledek 2.55. *Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jsou spojité na množině $A \subset \mathbb{R}^N$. Pak jsou funkce $|f|$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (u podílu za dodatečného předpokladu, že $g \neq 0$ na A) spojité na A.*

A lze také dokázat větu o spojitosti složené funkce. Její důkaz lze snadno provést s využitím Poznámky 2.54 a 2.48(c).

Věta 2.56. *Nechť $g_1, \ldots, g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $a \in \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě*

$$\big(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_M(a)\big) \in \mathbb{R}^M.$$

Pak složená funkce $F = f(g_1, \ldots, g_N)$ je spojitá v bodě a.

2.5.1 Spojitost na kompaktní množině

Pro funkci jedné proměnné platí tzv. Weierstrassova věta (viz např. [13, Věta 5.82]), která říká, že spojitá funkce (jedné proměnné) na uzavřeném a ohraničeném intervalu nabývá své největší a nejmenší hodnoty. Zformulujme a dokažme analogickou větu pro funkce více proměnných – tím bude Důsledek 2.63.

Nejprve si zaveďme pojem kompaktní množiny.

Definice 2.57 Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. Množinu A nazýváme *kompaktní*, jestliže z libovolné posloupnosti bodů z A lze vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita je prvkem A.

Ukažme si hned dvě základní vlastnosti kompaktních množin.

Věta 2.58. *Každá kompaktní množina v metrickém prostoru je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. Nechť $A \subset X$ je kompaktní v metrickém prostoru (X, ρ). *Nejprve dokažme uzavřenost.* Uvažujme konvergentní posloupnost prvků z množiny A. Zřejmě pak její limita je limitou každé z ní vybrané posloupnosti. Z kompaktnosti tedy plyne, že limita této posloupnosti leží v A. *Nyní dokažme ohraničenost* – sporem. Podle Definice 1.65 pak pro každé $x \in X$ a každé $K \in \mathbb{R}$ existuje $a \in A$ tak, že $\rho(x, a) \geq K$. Zvolme $x \in X$ pevně. Pak pro každé $K = n \in \mathbb{N}$ existuje $a_n \in A$ tak, že

$$\rho(x, a_n) \geq n$$

tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, a_n) = \infty. \tag{2.2}$$

Vzhledem ke kompaktnosti množiny A pak existuje podposloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $a \in A$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_{k_n}, a) = 0$. Odtud pak plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$\rho(x, a_{k_n}) \leq \rho(x, a) + \rho(a, a_{k_n}),$$

ze které vidíme, že posloupnost reálných čísel $\{\rho(x, a_{k_n})\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. To je ve sporu s (2.2). □

Nyní si ukážeme, že v metrickém prostoru $\mathbb{R}^N$ platí i obrácená implikace z Věty 2.58 (např. v nekonečně dimenzionálních prostorech totiž tato opačná implikace neplatí). K tomu účelu nejprve zmíníme analogii Bolzanovy–Weierstrassovy věty pro posloupnosti reálných čísel, viz [13, Věta 3.94].

Věta 2.59 (Bolzanova–Weierstrassova)**.** *Z každé ohraničené posloupnosti v $\mathbb{R}^N$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená posloupnost v $\mathbb{R}^N$, tzn. existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left\|x^{[n]}\right\| \leq K$. Pak (viz Cvičení 1.9) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_1^{[n]}| \leq \left\|x^{[n]}\right\| \leq K,$$

odkud plyne, že $\left\{x_1^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Tedy podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty pro posloupnosti reálných čísel existuje konvergentní vybraná posloupnost $\left\{x_1^{[k_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$; označme x_1 její limitu. Nyní, uvažujeme-li posloupnost $\left\{x^{[k_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, pak zase pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_2^{[k_n]}| \leq \left\|x^{[k_n]}\right\| \leq K,$$

tzn. posloupnost $\left\{x_2^{[k_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je také ohraničená a zase podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje konvergentní vybraná posloupnost. Označme ji $\left\{x_2^{[\ell_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a její limitu označme x_2. Uvažujeme-li posloupnost $\left\{x^{[\ell_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, pak zase pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|x_3^{[\ell_n]}| \leq \left\|x^{[\ell_n]}\right\| \leq K.$$

Takto pokračujeme dále a po přesně N krocích dostáváme vybranou posloupnost $\left\{x^{[m_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, tak, že $x_i^{[m_n]} \to x_i$ pro $n \to \infty$ a $i = 1, \ldots, N$. Uvažujeme-li vektor $x = (x_1, \ldots, x_N)$, tzn. vektor jehož složky jsou limity jednotlivých posloupností, pak podle Věty 1.22 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} x^{[m_n]} = x.$$ □

Nyní se dostáváme k charakterizaci kompaktní množiny v $\mathbb{R}^N$.

Věta 2.60. *Podmnožina $\mathbb{R}^N$ je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a ohraničená.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Z Věty 2.58 již víme, že v libovolném metrickém prostoru je kompaktní množina uzavřená i ohraničená.
($\Leftarrow$): Mějme nyní uzavřenou a ohraničenou množinu $A \subset \mathbb{R}^N$. Zvolme libovolně posloupnost vektorů $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ z A. Z ohraničenosti A plyne i ohraničenost této posloupnosti. Tedy z Bolzanovy–Weierstrassovy věty (Věta 2.59) plyne, že existuje konvergentní podposloupnost $\left\{x^{[k_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, označme $x \in \mathbb{R}^N$ její limitu. Z uzavřenosti množiny A pak podle Věty 1.64 vyplývá, že $x \in A$. □

Následující věta se často zkráceně vyslovuje tak, že „spojitost zachovává kompaktnost“.

Věta 2.61. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní množině $A \subset \mathcal{D}(f)$. Pak $f(A)$ je kompaktní.*

Důkaz. Zvolme libovolnou posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z $f(A)$. Pak existuje posloupnost prvků $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny A tak, že $y_n = f(x^{[n]})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z kompaktnosti A plyne, že existuje konvergentní vybraná posloupnost $\left\{x^{[k_n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$, mající limitu a ležící v A. Ze spojitosti f v bodě a a Heineovy věty (Věta 2.46) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} y_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(x^{[k_n]}) = f(a) \in f(A).$$ □

Cvičení 2.62 Dokažte, že každá kompaktní množina v $\mathbb{R}$ má největší a nejmenší prvek.

Následující důsledek budeme využívat v kapitole o extrémech funkcí více proměnných – zejména v sekci o globálních extrémech.

Důsledek 2.63. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní množině $A \subset \mathcal{D}(f)$. Pak funkce f nabývá na množině A největší a nejmenší hodnoty.*

Cvičení 2.64 Dokažte, že jednotková sféra v $\mathbb{R}^N$, tzn. množina

$$\{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \|x\| = 1\}$$

je kompaktní.

2.5.2 Spojitost na souvislé množině

V této sekci zformulujeme a dokážeme zobecnění věty o nabývání mezihodnot – viz např. [13, Věta 5.91].

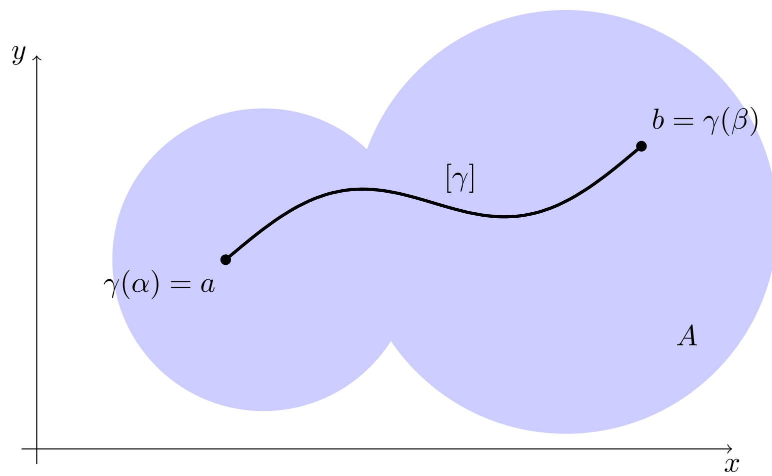
Nejprve si představme jeden z typů „souvislosti“ množiny v $\mathbb{R}^N$.

Definice 2.65 Řekneme, že *body a, $b \in A \subset \mathbb{R}^N$ lze spojit cestou (křivkou) ležící v A*, jestliže existuje spojité zobrazení $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^N$ takové, že

$$\gamma(\alpha) = a \qquad \wedge \qquad \gamma(\beta) = b \qquad \wedge \qquad \mathcal{H}(\gamma) \subset A.$$

Oboru hodnot křivky říkáme *geometrický obraz křivky* a často značíme jako $[\gamma]$.

Poznámka 2.66 Intuitivně ze střední školy křivkou rozumíme čáru v rovině či prostoru, kterou provedeme jedním tahem (to díky předpokladu spojitosti). Křivkou v $\mathbb{R}^N$ pak rozumíme spojitou vektorovu funkci – viz dále kapitolu o vektorových funkcích. Křivku ležící v A si pak představujeme jako čáru, která celá leží v množině A – viz Obrázek 2.4. Podle Definice 2.65 ovšem tato čára není samotná křivka ale její geometrický obraz!



Obrázek 2.4: Geometrický obraz křivky γ v množině A spojující body $a, b \in A$.

Definice 2.67 Neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *(obloukově) souvislá*, jestliže libovolné její dva body lze spojit křivkou ležící v A. Otevřenou souvislou množinu nazýváme *oblastí*.

Cvičení 2.68 Následující množiny jsou souvislé v $\mathbb{R}^N$. Ověřte!

1. Pro a, $b \in \mathbb{R}^N$ definujeme *úsečku* jejichž krajní body jsou právě a a b jako množinu

$$\overline{ab} = \{\lambda a + (1-\lambda)b \in \mathbb{R}^N \ ; \ \lambda \in [0,1]\}.$$

2. *Lomenou čarou* s krajními body a, $b \in \mathbb{R}^N$ rozumíme množinu

$$L = \overline{aa^{[1]}} \cup \overline{a^{[1]}a^{[2]}} \cup \ldots \cup \overline{a^{[m]}b},$$

kde $a^{[1]}, \ldots, a^{[m]} \in \mathbb{R}^N$.

3. Okolí i redukované okolí bodu v $\mathbb{R}^N$ je souvislá množina.

Poznámka 2.69 Existuje více typů souvislosti množin:

- *polygonální souvislost* – jestliže každé dva body z této množiny lze spojit lomenou čarou ležící v této množině.

- *topologická souvislost* – o množině M řekneme, že je souvislá v tomto smyslu, jestliže neexistují dvě otevřené disjunktní množiny A a B tak, že by $M = (A \cap M) \cup (B \cap M)$.

Tyto tři pojmy bohužel nejsou ekvivalentní. Je asi jasné, že polygonální souvislost implikuje obloukovou souvislost. Dále se dá dokázat, že kružnice je souvislá v topologickém smyslu i obloukově souvislá, ale není polygonálně souvislá. A množina

$$M = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \; ; x \in (0,1] \right\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

je souvislá v topologickém smyslu ale není obloukově souvislá (tím spíš ani polygonálně). Dá se ale také dokázat, že pro otevřené množiny tyto pojmy splývají.

Poznámka 2.70 Souvislost jsme tedy ve dvou případech definovali jako možnost spojit libovolné dva body množiny nějakou křivkou ležící v dané množině. Pokud je možno každé dva body takto spojit dokonce úsečkou, říká se takové množině *konvexní*.

Cvičení 2.71 V $\mathbb{R}$ jsou souvislé právě všechny intervaly. Dokažte! [*Návod: Proveďte sporem a využijte Bolzanovu větu o nabývání mezihodnot pro funkci jedné proměnné.*]

Věta 2.72. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na souvislé množině $D \subset \mathbb{R}^N$. Pak $f(D)$ je interval.*

Důkaz. Vzhledem k Cvičení 2.71 stačí dokázat, že $f(D)$ je souvislá množina. Zvolme $c, d \in f(D)$ libovolně. Pak existují $a, b \in D$ tak, že $f(a) = c$ a $f(b) = d$. Vzhledem k souvislosti množiny D existuje spojité zobrazení $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tak, že $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$ a přitom $[\gamma] \subset D$. Uvažujme zobrazení $\phi = f \circ \gamma$. Protože γ_i jsou spojité na $[\alpha, \beta]$ pro každé $i = 1, \ldots, N$ a f je také spojitá, pak ϕ je podle Věty 2.56 také spojitá na $[\alpha, \beta]$. Přitom $[\phi] \subset f(D)$. Tím je dokázána souvislost množiny $f(D)$. □

2.6 Směrová derivace

Rádi bychom definovali u funkcí více proměnných podobný pojem jako je pojem derivace funkce jedné proměnné – tzn. pojem, který bude určovat rychlost změny $f(x)$ pro $x \to a$. Jak už bylo řečeno, můžeme se k bodu a blížit nekonečně mnoha směry a po různých křivkách (na rozdíl od funkce jedné proměnné – tam jsme se mohli blížit pouze dvěma směry: zprava nebo zleva – derivace zprava a derivace zleva).

Pro potřeby diferenciálního počtu nám bude stačit blížit se k bodu a po přímce – docházíme tak ke *směrové derivaci.* Můžeme ji motivovat geografickým příkladem z Poznámky 2.10. Na Obrázku 2.5 jsou znázorněny vrstevnice funkce z Obrázku 2.2. Představujme si, že jde skutečně o mapu, stojíme v bodě a a díváme se ve směru vektoru ν. Uděláme-li „malý krůček“, zajímá nás, jestli „jdeme nahoru či dolů a jak moc příkrý je náš vzestup či sestup“. Tak, jak je to znázorněno na Obrázku 2.5, to bude „z kopce“.

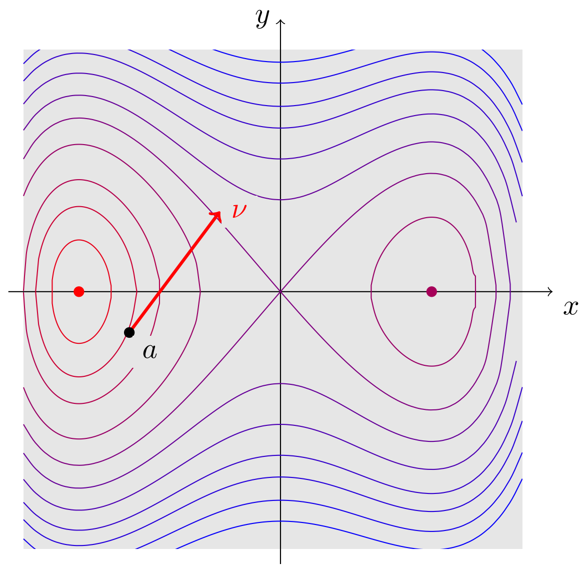
Nyní uveďme přesnou definici.

Definice 2.73 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $\nu \in \mathbb{R}^N$. Existuje-li limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\nu) - f(a)}{t}$$

nazýváme ji *směrovou derivací funkce f v bodě a podle vektoru ν*. Budeme ji značit

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a), f'_\nu(a), \ldots$$



Obrázek 2.5: Hladiny funkce dvou proměnných.

Poznámka 2.74

(a) Upozorněme na fakt, že limita v Definici 2.73 je limita funkce *jedné* proměnné. Definujme si pomocnou funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(t) = f(a + t\nu), \quad t \in \mathcal{U}(0), \tag{2.3}$$

kde $\mathcal{U}(0)$ je takové okolí bodu 0, pro které $a + t\nu \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pro každé $t \in \mathcal{U}(0)$. Pak směrová derivace je rovna

$$f'_\nu(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\nu) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Toto je vidět na Obrázku 2.6 pro funkci f dvou proměnných a na Obrázku 2.7 pro funkci g. Geometrický význam směrové derivace je tangens úhlu mezi přímkou p a tečnou t – na Obrázku 2.6 je označen jako α (stejný jako α na Obrázku 2.7). Je také vidět, že směrový vektor tečny je

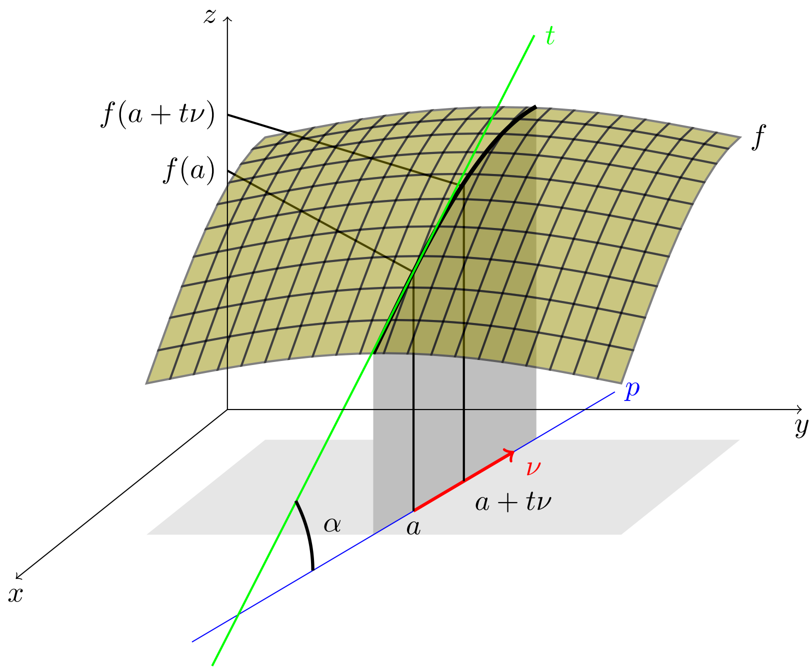
$$\left(\nu_1, \nu_2, f'_\nu(a)\right).$$

(c) Je třeba zdůraznit, že směrová derivace vyjadřuje rychlost změny funkčních hodnot funkce f v bodě a ve směru vektoru ν pouze tehdy, když $\|\nu\| = 1$, tzn. pro normované vektory.

(d) Podívejme se na speciální případ $N = 1$, tzn. případ funkce jedné proměnné. Položíme-li $\nu = 1$, pak

$$f'_\nu(a) = f'(a),$$

tzn. směrová derivace v bodě a ve směru 1 splývá s derivací funkce jedné proměnné v bodě a.



Obrázek 2.6: Geometrický význam směrové derivace.

Příklad 2.75 Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

v bodě $(x,y) = (1,1)$ ve směru vektoru $\nu = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Řešení. Podle definice směrové derivace máme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \nu}(1,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1 + t\cdot\frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 + t\cdot\frac{4}{5}\right)^3 - \left(1^2 + 1^3\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1 + 2t\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}t\right)^2 + 1 + 3t\frac{4}{5} + 3\left(t\frac{4}{5}\right)^2 + \left(t\frac{4}{5}\right)^3 - 1 - 1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\frac{6}{5} + \frac{12}{5}\right) + t^2\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) + t^3\left(\frac{4}{5}\right)^3}{t} \\
&= \frac{6}{5} + \frac{12}{5} = \frac{18}{5}.
\end{aligned}$$

○

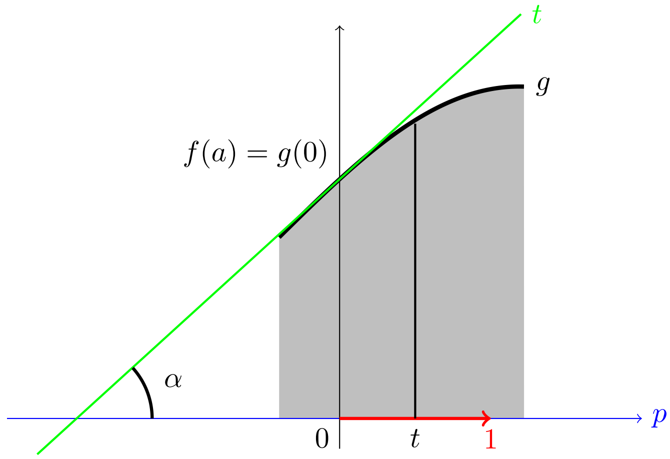
Cvičení 2.76 Dokažte, že pro $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $\nu \in \mathbb{R}^N$, $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial c\nu}(a) = c\frac{\partial f}{\partial \nu}(a).$$

Speciálně pak

$$\frac{\partial f}{\partial(-\nu)}(a) = -\frac{\partial f}{\partial \nu}(a).$$

I pro směrovou derivaci platí věta o střední hodnotě.



Obrázek 2.7: Graf funkce g z (2.3) pro funkci f bod a a vektor ν z Obrázku 2.6.

Věta 2.77 (o střední hodnotě)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$, $0 \neq \nu \in \mathbb{R}^N$ *jsou takové, že existuje* f'_ν *ve všech bodech úsečky*

$$\{a + t\nu \ ; \ t \in [0,1]\} \subset \operatorname{int} \mathcal{D}(f).$$

Pak existuje $\theta \in (0,1)$ *tak, že*

$$f(a+\nu) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(a + \theta\nu).$$

Důkaz. Uvažujeme funkci

$$g(t) = f(a + t\nu), \quad t \in [0,1].$$

Nejprve vidíme, že pro každé $t \in [0,1]$ platí

$$g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + (t+h)\nu) - f(a+t\nu)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((a+t\nu) + h\nu\big) - f(a+t\nu)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \nu}(a + t\nu),$$

tedy g má derivaci na intervalu $[0,1]$. Odtud plyne, že g je spojitá na tomto intervalu. Funkce g splňuje předpoklady Lagrangeovy věty a podle ní existuje $\theta \in (0,1)$ tak, že

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0) = g'(\theta),$$

odkud dostáváme požadovanou rovnost. □

2.7 Parciální derivace

Parciální derivace funkce není nic jiného než směrová derivace – ve směru jednoho z jednotkových vektorů e_i (připomeňme, že $e_i \in \mathbb{R}^N$ má nulové všechny prvky až na i-tý, který je roven 1). Jak uvidíme dále, budou mít směrové derivace právě v těchto směrech mnohé výhody.

Definice 2.78 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $i \in \{1, \dots, N\}$. Směrovou derivaci funkce f v bodě a ve směru vektoru e_i nazýváme *parciální derivací funkce f v bodě a podle i-té proměnné* (*parciální derivací funkce f v bodě a podle proměnné x_i*). Budeme ji značit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), f'_{x_i}(a), \dots$$

Poznámka 2.79

(a) Parciální derivace funkce f v bodě a podle i-té proměnné je vlastně limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

(b) Dále se zaměříme na směrové derivace ve směrech vektorů standardní báze e_i, tedy jen parciálními derivacemi. A to ze dvou důvodů:

- jejich výpočet je velmi efektivní (viz dále Poznámku 2.80),
- v mnoha případech nám k výpočtu směrových derivací stačí spočítat pouze parciální derivace (viz dále Větu 2.96).

Poznámka 2.80

- Pro výpočet parciálních derivací budeme s výhodou využívat vzorce pro derivace funkce jedné proměnné. Ukažme si jak. Pro jednoduchost uvažujme funkci f dvou proměnných x_1, x_2 definované v δ-okolí bodu $a = (a_1, a_2)$. Ukažme si jak vypočítat parciální derivaci této funkce v bodě $a = (a_1, a_2)$ podle první proměnné. Zřejmě jde o číslo
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$
Uvažujme pomocnou funkci jedné proměnné $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem
$$g_1(x) = f(x, a_2), \quad x \in \mathcal{U}_\delta(a_1) \subset \mathbb{R}.$$
Pak vidíme, že
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g_1(a_1 + t) - g_1(a_1)}{t} = g_1'(a_1).$$
Přitom je vidět, že uvažovaná parciální derivace existuje právě tehdy, když existuje $g_1'(a_1)$. Kromě toho jsou si tyto derivace rovny! Nejdůležitější ovšem je fakt, že předpis funkce g_1 je odvozen z předpisu funkce f tak, že první proměnná je proměnnou funkce g_1 a druhá proměnná je konstanta. Je-li např.
$$f(x_1, x_2) = 2\sin(x_1)x_2 + x_1 x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
a máme vypočítat parciální derivaci podle první proměnné v bodě $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$, stačí uvažovat funkci jedné proměnné
$$g_1(x) = f(x, a_2) = 2\sin(x)a_2 + xa_2^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

a vypočítat její derivaci

$$g_1'(x) = 2\cos(x)a_2 + a_2^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

odkud hned dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = g_1'(a_1) = 2\cos(a_1)a_2 + a_2^2.$$

Podobně, pokud bychom chtěli počítat derivaci podle druhé proměnné, uvažovali bychom zase funkci

$$g_2(x) = f(a_1, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Tato myšlenka se dá zobecnit i pro funkce více než dvou proměnných. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, bod $a = (a_1, \dots, a_N) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. K výpočtu parciální derivace funkce f v bodě a podle x_i uvažujme funkci

$$g(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_N), \quad x \in \mathcal{U}(a_i) \subset \mathbb{R},$$

kde $\mathcal{U}(a_i)$ je dostatečně malé okolí, aby funkce g byla dobře definována. Vypočteme její derivaci a máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \cdots = g'(a_i).$$

- Jednoduchost počítání parciální derivace v bodě tedy spočívá v tom, že ji netřeba počítat podle definice (tedy jako limitu funkce jedné proměnné), ale efektivně spočítat pomocí vzorců pro výpočet derivace funkce jedné proměnné.

Definice 2.81 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, N\}$ a množina D je množina všech bodů z $\mathcal{D}(f)$ v nichž existuje vlastní parciální derivace funkce f podle i-té proměnné. Pak funkci

$$D \in x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

nazýváme *parciální derivací funkce f podle i-té proměnné (podle proměnné x_i).*

Poznámka 2.82 Chceme-li spočítat parciální derivaci podle její proměnné x_i v bodě x, pak vzhledem k Poznámce 2.80 ji stačí chápat jako funkci jedné proměnné x_i, přičemž ostatní proměnné x_j, $j = 1, \dots, N$, $j \neq i$ chápeme jako konstanty. Pak je třeba jen umět vzorečky pro derivaci funkce jedné proměnné.

Příklad 2.83 Uvažujme funkci

$$f(x, y) = x^2 + xy + \sin(y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vypočtěte obě její parciální derivace.

Řešení. Chceme-li spočítat parciální derivaci podle x, pak se stačí na předpis této funkce dívat jako na předpis funkce proměnné x, tzn. jako

$$x \mapsto f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}$$

přitom symbol y můžeme vnímat jako konstantu či parametr. Pak vidíme, že jde o polynom (v proměnné x) stupně 2, takže dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}(yx) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(y^2)\right) = 2x + y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Podíváme-li se na předpis f jako na funkci proměnné y, kde x je parametr, vidíme, že jde o součet lineární funkce $y \mapsto x^2 + xy$ a složené funkce $y \mapsto \sin(y^2)$. Pak dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + \cos(y^2)2y = x + 2y\cos(y^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$ ◯

Následuje velmi užitečná věta, jejímž speciálním případem (pro funkci jedné proměnné) je Lagrangeova věta.

Věta 2.84 (o přírůstku)**.** *Nechť $D = (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \times \ldots \times (c_N, d_N)$ a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má parciální derivace f'_{x_i} na D pro všechna $i = 1, \ldots, N$. Pak pro každé $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $b = (b_1, \ldots, b_N) \in D$ existují $\theta_1, \ldots, \theta_N \in (0,1)$ tak, že platí*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]})(b_i - a_i),$$

kde $q^{[i]} = (b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, a_i + \theta_i(b_i - a_i), a_{i+1}, \ldots, a_N)$ pro $i = 1, \ldots, N$ (tzn. $q^{[i]} \in D$ pro $i = 1, \ldots, N$).

Důkaz. Provedeme pouze pro $N = 2$. Máme tedy dokázat následující tvrzení: *Nechť $f : D = (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má parciální derivace f'_{x_1}, f'_{x_2} na D. Pak pro každé (a_1, a_2), $(b_1, b_2) \in D$ existují θ_1, $\theta_2 \in (0,1)$ tak, že*

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[1]})(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(q^{[2]})(b_2 - a_2),$$

kde $q^{[1]} = \big(a_1 + \theta_1(b_1 - a_1), a_2\big)$, $q^{[2]} = \big(b_1, a_2 + \theta_2(b_2 - a_2)\big)$ – viz Obrázek 2.8.
Důkaz je založen na aplikaci Lagrangeovy věty o střední hodnotě (pro funkci jedné proměnné).
Předpokládejme navíc, že $a_1 < b_1$ a $a_2 < b_2$ – sami si rozmyslete ostatní případy.
Definujeme funkce

$$g_1(x) = f(x, a_2), \quad x \in [a_1, b_1],$$
$$g_2(x) = f(b_1, x), \quad x \in [a_2, b_2].$$

Tyto funkce jsou spojité na svých definičních oborech a platí

$$g_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, a_2), \quad x \in (a_1, b_1),$$

$$g_2'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1, x), \quad x \in (a_2, b_2).$$

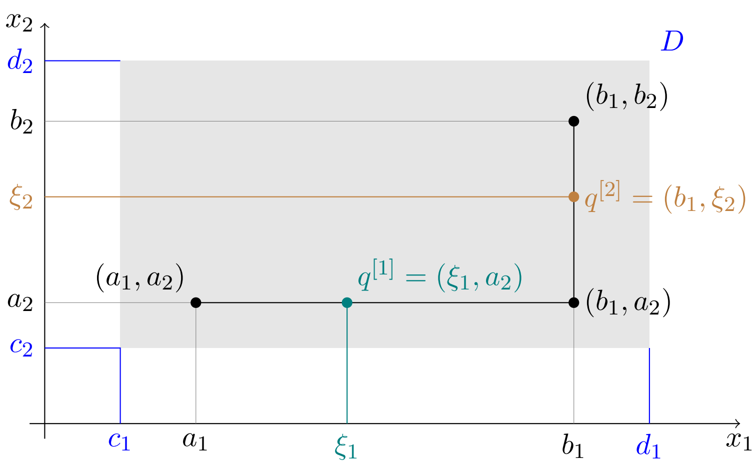
Pak podle Lagrangeovy věty existují $\xi_1 \in (a_1, b_1)$, $\xi_2 \in (a_2, b_2)$ tak, že

$$g_1(b_1) - g_1(a_1) = g_1'(\xi_1)(b_1 - a_1), \quad g_2(b_2) - g_2(a_2) = g_2'(\xi_2)(b_2 - a_2).$$

Platí

$$
\begin{aligned}
f(b_1,b_2)-f(a_1,a_2) &= f(b_1,b_2)-f(b_1,a_2)+f(b_1,a_2)-f(a_1,a_2)\\
&= g_2(b_2)-g_2(a_2)+g_1(b_1)-g_1(a_1)\\
&= g_2'(\xi_2)(b_2-a_2)+g_1'(\xi_1)(b_1-a_1)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x_2}(b_1,\xi_2)(b_2-a_2)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,a_2)(b_1-a_1).
\end{aligned}
$$

Položíme-li $\xi_i = a_i + \theta_i(b_i - a_i)$, kde $\theta_i \in (0,1)$ pro $i = 1,2$ (viz Obrázek 2.8), dostáváme tvrzení věty. □



Obrázek 2.8: Ilustrace k důkazu Věty 2.84.

Věta 2.85. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ na nějakém okolí bodu $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ ohraničené všechny parciální derivace. Pak je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Provedeme opět pro $N = 2$. Nechť f má na $\mathcal{U}(a)$ ohraničené všechny parciální derivace. K tomuto okolí jistě najdeme otevřený interval $(c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$ tak, že

$$a \in (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \subset \mathcal{U}(a),$$

viz např. Obrázek 1.8. Pak podle předpokladů má funkce f na tomto intervalu parciální derivace f'_{x_1}, f'_{x_2} a existuje $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in (c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$ platí

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right| \le K.$$

Podle věty o přírůstku (Věta 2.84) pak pro body $x = (x_1, x_2)$, $a = (a_1, a_2)$ existují $q^{[1]}$, $q^{[2]} \in (c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$ tak, že

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(a)| &= \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[1]})(x_1-a_1)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[2]})(x_2-a_2)\right|\\
&\le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[1]})\right|\cdot|x_1-a_1|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(q^{[2]})\right|\cdot|x_2-a_2|\\
&\le K\big(|x_1-a_1|+|x_2-a_2|\big) \le 2K\|x-a\|.
\end{aligned}
$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak z předchozích nerovností plyne, že stačí položit $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2K}$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset (c_1, d_1) \times (c_2, d_2)$. Pro každé $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ pak z předchozích výpočtů totiž vyplývá

$$|f(x) - f(a)| < 2K\delta \leq \varepsilon,$$

což neznamená nic jiného než spojitost funkce f v bodě a. □

A hned můžeme uvést dva důležité důsledky.

Důsledek 2.86. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ na nějaké otevřené množině $D \subset \mathcal{D}(f)$ ohraničené všechny parciální derivace (prvního řádu), pak je f na D spojitá.*

Důsledek 2.87. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ na nějaké otevřené množině $D \subset \mathcal{D}(f)$ spojité všechny parciální derivace (prvního řádu), pak je f na D spojitá.*

2.8 Totální diferenciál

S pojmem diferenciálu funkce jedné proměnné jsme se setkali třeba v [13]. Zobecněme si tento pojem na funkce více proměnných. Připomeňme si nejprve pojem lineárního zobrazení.

Definice 2.88 Nechť V, W jsou reálné vektorové prostory. Zobrazení $\ell : V \to W$ nazveme *lineární zobrazení*, jestliže

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in V\ :\ \ell(\alpha x + \beta y) = \alpha\ell(x) + \beta\ell(y).$$

Dále budeme potřebovat vědět, jak vypadá předpis lineárních zobrazení $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$.

Věta 2.89. *Každé lineární zobrazení $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}$ je lineární forma.*

Důkaz. Zřejmě pro každé $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ platí

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i,$$

kde e_i jsou prvky standardní báze. Pak z linearity plyne

$$\ell(x) = \ell\left(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i \ell(e_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i = (\alpha, x),$$

kde $\alpha_i = \ell(e_i)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. □

Nyní jsme téměř připraveni k definici *totálního diferenciálu* neboli *diferenciálu funkce více proměnných*. Připomeňme si ještě diferenciál funkce jedné proměnné.

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ je vnitřním bodem $\mathcal{D}(f)$. Lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tedy vlastně lineární formu) jsme nazývali diferenciálem funkce f v bodě a, jestliže platilo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h)}{h} = 0.$$

Označíme-li chybový člen

$$\tau(h) = f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h),$$

pak lze diferenciál charakterizovat tím, že existuje okolí $\mathcal{U}(0)$ a funkce $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$$

a pro každé $h \in \mathcal{U}(0)$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \tau(h).$$

V tomto „jednodimenzionálním“ případě jsme se již dozvěděli, že diferenciál funkce f v bodě a existuje právě tehdy, když existuje vlastní $f'(a)$ a že platí

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

V řeči lineárních forem tak můžeme říct, že *derivace $f'(a)$ funkce jedné proměnné f bodě a je reprezentantem diferenciálu funkce f v bodě a.*

Definice 2.90 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Lineární formu $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ nazveme *totálním diferenciálem funkce f v bodě a*, jestliže existuje

- okolí $\mathcal{U}(o) \subset \mathbb{R}^N$ a
- funkce $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ splňující
$$\lim_{h\to o} \frac{\tau(h)}{\|h\|} = 0$$

tak, že pro každé $h \in \mathcal{U}(o)$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \tau(h).$$

Poznámka 2.91

(a) Všimněme si, jakým způsobem je diferenciál zobecněn oproti funkci jedné proměnné. Funkce τ je nyní funkcí více proměnných a proměnná h probíhá jistou množinu v $\mathbb{R}^N$. To má za následek, že ve jmenovateli z limitní podmínky z Definice 2.90 již nemůže figurovat samotný vektor h (neumíme dělit vektorem), ale nahradíme ho jeho normou (eukleidovskou). Rozmyslete si, co to znamená pro případ $N = 1$.

(b) Totální diferenciál má podobný geometrický význam jako u funkce jedné proměnné – viz dále Poznámku 2.102. A také ho můžeme používat pro přibližný výpočet funkčních hodnot funkce v okolí nějakého bodu. I k tomu budeme potřebovat znát tvar diferenciálu, tedy jeho reprezentanta, viz dále Větu 2.93.

(c) Někdy je praktičtější psát limitní podmínku v ekvivalentním tvaru

$$\lim_{h\to o} \frac{|\tau(h)|}{\|h\|} = 0,$$

tzn. čitatel je v absolutní hodnotě.

(d) Pokud je limitní podmínka pro τ z Definice 2.90 splněna, pak

$$\lim_{h\to o} \tau(h) = \lim_{h\to o} \frac{\tau(h)}{\|h\|}\|h\| = 0.$$

(e) Podobně jako u funkce jedné proměnné, jedno z využití totálního diferenciálu je přibližný výpočet funkčních hodnot v okolí bodu jehož funkční hodnotu známe, tzn. platí pak

$$f(a+h) \doteq f(a) + \mathrm{d}f(a)(h)$$

pro h z nějakého okolí počátku.

(f) Proměnné diferenciálu jsme označovali jako $h_1, \ldots, h_N$ nebo jako vektor h. Bývá ale zvykem je označovat jako $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_N$ nebo jako vektor $\mathrm{d}x$. Výhodné je toto značení zejména používáme-li např. proměnné x a y pro funkci dvou proměnných f. Pak totiž odpovídající proměnné diferenciálu označujeme jako $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$.

Příklad 2.92 Uvažujme funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Určete diferenciál funkce f v bodě $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Řešení. Pro každé $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) = (a_1+h_1)^2 + (a_2+h_2)^3 - a_1^2 - a_2^3 \\ &= 2a_1h_1 + 3a_2^2h_2 + h_1^2 + 3a_2h_2^2 + h_2^3. \end{aligned}$$

Výraz $2a_1h_1+3a_2^2h_2$ by mohl být diferenciálem $\mathrm{d}f(a)$, protože jde o lineární formu vektorové proměnné $h = (h_1, h_2)$. Aby tomu tak bylo, je třeba dokázat, že pro zbytek, tedy pro funkci

$$\tau(h) = \tau(h_1, h_2) = h_1^2 + 3a_2h_2^2 + h_2^3$$

platí limitní podmínka z Definice 2.90, tzn.

$$\lim_{h\to o} \frac{h_1^2 + 3a_2h_2^2 + h_2^3}{\|h\|} = 0.$$

Ověřme to! Snadno odhadneme (použijeme nerovností $h_i^2 \le \|h\|^2$, $|h_i| \le \|h\|$ pro $i = 1, 2$), že

$$\begin{aligned} \left| \frac{h_1^2 + 3a_2h_2^2 + h_2^3}{\|h\|} - 0 \right| &\le \frac{h_1^2 + 3|a_2|h_2^2 + |h_2|h_2^2}{\|h\|} \\ &\le \frac{\|h\|^2 + 3|a_2|\|h\|^2 + \|h\|^3}{\|h\|} = \|h\| + 3|a_2|\|h\| + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Limitním přechodem $h \to o$ (neboli $\|h\| \to 0$) dostáváme požadovanou limitní podmínku. Reprezentant diferenciálu funkce f v bodě a je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, kde

$$\alpha_1 = 2a_1, \quad \alpha_2 = 3a_2^2.$$

Zajímavé je, že platí

$$\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \quad \alpha_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

Jde o náhodu? Jak uvidíme ve Větě 2.93, tak rozhodně ne. ○

Věta 2.93. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál. Pak*

(i) f je v bodě a spojitá,

(ii) existují $f'_{x_i}(a)$ pro každé $i = 1, \dots, N$ a platí

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{R}^N,$$

tzn. reprezentantem diferenciálu funkce f v bodě a je N-dimenzionální vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \right).$$

Důkaz. ad (i): Předpokládejme, že funkce f má v bodě a diferenciál, tzn. existuje vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$, okolí $\mathcal{U}(o) \subset \mathbb{R}^N$ a funkce $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tak, že

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \tau(h) = (\alpha, h) + \tau(h) \text{ pro všechna } h \in \mathcal{U}(o),$$

a $\lim\limits_{h \to o} \dfrac{\tau(h)}{\|h\|} = 0$. Odkud plyne $\lim\limits_{h \to o} \tau(h) = 0$ (viz Poznámku 2.91(d)). Pak podle Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (Věta 1.11) platí

$$|f(a+h) - f(a)| \le |(\alpha, h)| + |\tau(h)| \le \|\alpha\| \cdot \|h\| + |\tau(h)|, \quad h \in \mathcal{U}(o).$$

Pravá strana jde k nule pro $h \to o$. Tedy f je spojitá v bodě a.
ad (ii): V rovnosti z Definice 2.90 položme $h = te_i$, kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak platí

$$f(a + te_i) - f(a) = (\alpha, te_i) + \tau(te_i) = t\alpha_i + \tau(te_i).$$

Podělíme t, přejdeme pro $t \to 0$ a dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \alpha_i + \lim_{t \to 0} \frac{\tau(te_i)}{t}.$$

Z faktu

$$\left| \frac{\tau(te_i)}{t} \right| = \frac{|\tau(te_i)|}{|t| \cdot 1} = \frac{|\tau(te_i)|}{|t| \cdot \|e_i\|} = \frac{|\tau(te_i)|}{\|te_i\|} \to 0 \quad \text{pro } t \to 0,$$

plyne existence parciálních derivací i reprezentace diferenciálu. □

Definice 2.94 Reprezentantu diferenciálu funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ v bodě a říkáme *gradient funkce f bodě a* a zapisujeme ho $\operatorname{grad} f(a)$ či $\nabla f(a)$.

Poznámka 2.95 Z Věty 2.93 tedy víme, že gradient funkce je vektor, jehož složky jsou parciální derivace podle příslušných proměnných. Je třeba ovšem upozornit, že i když funkce může mít parciální derivace podle všech proměnných, nemusí mít diferenciál, viz např. dále Příklad 2.100. V tom případě pak nemůžeme vektor sestavený z parciálních derivací nazývat gradientem!

Následující věta ukazuje, jak ze znalosti diferenciálu tedy parciálních derivací snadno počítat směrové derivace v libovolném směru.

Věta 2.96. *Má-li funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ diferenciál, pak pro každé $\nu \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$ existuje směrová derivace $f'_\nu(a)$ a platí*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) = \mathrm{d}f(a)(\nu) = \big(\nabla f(a), \nu\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \nu_i.$$

Důkaz. Pro $\nu \neq o$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \nu}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\nu) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\nabla f(a), t\nu) + \tau(t\nu)}{t} = (\nabla f(a), \nu) + \lim_{t\to 0} \frac{\tau(t\nu)}{t}. \end{aligned}$$

Podobně jako v důkazu Věty 2.93 bychom ukázali, že limita posledního sčítance napravo je rovna nule. □

Příklad 2.97 Vyřešme Příklad 2.75 s využitím Věty 2.96. Podle ní pak dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) = \mathrm{d}f(a)(\nu) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\big((1,1)\big) \cdot \frac{3}{5} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\big((1,1)\big) \cdot \frac{4}{5} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{18}{5}.$$ ○

Poznámka 2.98 (geometrický význam gradientu) Předpokládejme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ totální diferenciál. Je-li $\nabla f(a) \neq o$, pak tento vektor *udává směr největšího růstu funkce f (podobně vektor $-\nabla f(a)$ udává směr největšího poklesu).*
Vyplývá to z následujících dvou faktů:

(i) Uvažujme normovaný vektor ν, tzn. $\|\nu\| = 1$. Pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) = (\nabla f(a), \nu) \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|\nu\| = \|\nabla f(a)\|.$$

Tedy funkce v žádném směru nemá růst vyšší než číslo $\|\nabla f(a)\|$.

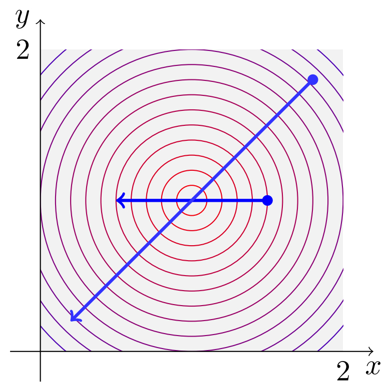
(ii) Položme

$$\nu = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$$

Zřejmě jde o normovaný vektor (ověřte!), který ukazuje stejným směrem jako $\nabla f(a)$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) = \left(\nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right) = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|}\big(\nabla f(a), \nabla f(a)\big) = \|\nabla f(a)\|.$$

Z toho tedy plyne, že směrová derivace nabývá své maximální hodnoty právě ve směru vektoru $\nabla f(a)$.



Obrázek 2.9: Ilustrace k Příkladu 2.99.

Příklad 2.99 Uvažujme funkci f z Příkladu 2.7. Pro každé $(x, y) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f) = (0,2) \times (0,2)$ pak

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \big(-2(x-1), -2(y-1)\big).$$

Na Obrázku 2.9 pak vidíme některé hladiny funkce f (červeně) společně s gradienty (modré šipky) ve vybraných bodech (modré tečky). Je vidět, že gradienty v těchto bodech ukazují směr největšího růstu funkčních hodnot funkce f. Důsledkem toho pak gradienty „jsou kolmé na hladiny funkce f“. ○

Podívejme se nyní na vztah mezi diferenciálem a parciálními derivacemi. Začněme příkladem, který ukazuje, že samotná existence všech parciálních derivací v daném bodě ještě negarantuje existenci diferenciálu v tomto bodě.

Příklad 2.100 Dokažte, že funkce

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & 0 \le x_1 \le x_2, \\ x_2 & 0 \le x_2 \le x_1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

má v bodě $(0,0)$ nulové parciální derivace podle x_1 i x_2, ale nemá v tomto bodě diferenciál.

Řešení. Pro lepší představu si můžeme vykreslit hladiny této funkce – viz Obrázek 2.10. Nejprve spočítejme parciální derivace v bodě $(0,0)$ – nezbývá nám než podle definice. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

a podobně

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \to 0} 0 = 0.$$

Nyní dokažme neexistenci diferenciálu v $(0,0)$ – sporem. Kdyby diferenciál existoval, jeho gradient by musel být nulový – viz Větu 2.93. Tedy pak pro každé $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathrm{d}f(0,0)(h_1, h_2) = 0.$$

Podle Definice 2.90 pak existuje okolí $\mathcal{U}(o)$ a funkce $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ splňující $\lim\limits_{h \to o} \dfrac{\tau(h)}{\|h\|} = 0$ tak, že pro všechna $h \in \mathcal{U}(o)$ platí

$$f(h) = f(o+h) - f(o) = 0 + \tau(h) = \tau(h).$$

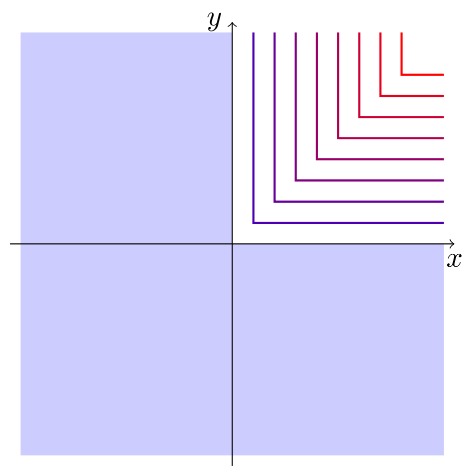
Uvažujme osu prvního kvadrantu

$$A = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (h_1, h_2) = (t, t), t \in \mathbb{R}, \ t > 0\}.$$

Pak vzhledem k Větě 2.37 platí také $\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h\in A}} \dfrac{\tau(h)}{\|h\|} = 0$. Ale

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h\in A}} \frac{\tau(h)}{\|h\|} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{\|(t,t)\|} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{\sqrt{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

což je žádaný spor. ◯



Obrázek 2.10: Hladiny funkce f z Příkladu 2.100.

Následující věta říká, že spojitost všech parciálních derivací v daném bodě již stačí pro existenci diferenciálu v tomto bodě.

Věta 2.101. *Má-li funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ spojité parciální derivace podle všech proměnných, pak má f v bodě a diferenciál.*

Důkaz. Podle předpokladu existuje nějaké okolí bodu a, na němž jsou definovány všechny parciální derivace prvního řádu – označme ho např. $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$. Dále existuje množina

$$D = (c_1, d_1) \times (c_2, d_2) \times \cdots \times (c_N, d_N)$$

taková, že $a \in D \subset \mathcal{U}_\varepsilon(a)$. Uvažujme nějaké okolí $\mathcal{U}_\delta(a) \subset D$. Pak pro každé $h = (h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$ takové, že $a + h \in \mathcal{U}_\delta(a)$ platí, že také $a + h \in D$. A podle Věty 2.84 existují $q^{[1]}$, …, $q^{[N]} \in D$ tak, že

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]}) \cdot h_i.$$

Je přitom jasné, že volba bodů $q^{[i]} \in D$ závisí na h (pak tyto body můžeme chápat jako funkce proměnné h, tj. $q^{[i]} = q^{[i]}(h)$), a platí odhad

$$\|a - q^{[i]}(h)\| \leq \|h\|$$

pro každé $i = 1, \ldots, N$ (viz např. Obrázek 2.8). Odtud tedy plyne, že pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí

$$\lim_{h \to o} q^{[i]}(h) = a.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - (\nabla f(a), h) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]}) \cdot h_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right) \cdot h_i =: \tau(h). \end{aligned}$$

K tomu, abychom dokázali existenci diferenciálu, stačí dokázat, že funkce $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ splňuje limitní podmínku z Definice 2.90. Pro každé $h \in \mathcal{U}_\delta(o)$ tedy platí

$$\begin{aligned} \frac{|\tau(h)|}{\|h\|} \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \cdot |h_i|}{\|h\|} &\leq \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \cdot \|h\|}{\|h\|} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(q^{[i]}) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|. \end{aligned}$$

Pro $h \to o$ jde pravá strana k nule, a to vzhledem ke spojitosti parciálních derivací v bodě a a $q^{[i]} \to a$ pro každé $i = 1, \ldots, N$. Tedy výraz $(\nabla f(a), h)$ je skutečně diferenciálem funkce f v bodě a. □

Poznámka 2.102 (geometrický význam diferenciálu) Vzpomeneme si opět na funkci jedné proměnné. Existence diferenciálu funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ (označme $\mathrm{d}f(a)(\mathrm{d}x) = Ah$) byla ekvivalentní s existencí vlastní derivace $A = f'(a)$. Ta měla geometrický význam takový, že přímka

$$y - f(a) = \mathrm{d}f(a)(x-a), \quad \text{tj.} \quad y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

udávala rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$, neboli vektor o souřadnicích $\big(1, f'(a)\big)$ je směrový vektor této tečny. Vraťme se opět k funkcím více proměnných – konkrétně k funkci f dvou proměnných x, y. Existence diferenciálu funkce f v bodě (x_0, y_0), tzn. funkce dvou proměnných $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ s předpisem

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \mathrm{d}y$$

se dá ztotožnit s existencí tečné roviny ke grafu funkce v bodě $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$. Touto tečnou rovinou pak rozumíme rovinu danou rovnicí

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Jde tedy o rovinu obsahující bod $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ a její zaměření je generováno vektory

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right), \quad \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Příklad 2.103 Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

v bodě $(x_0, y_0) = (1,2)$.

Řešení. Platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Pak rovnice tečné roviny je

$$z - f(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2),$$

tzn. po dosazení

$$z - 5 = 2(x-1) + 4(y-2)$$

a úpravě je

$$z = 2x + 4y - 5.$$

○

Povídání o totálním diferenciálu zakončíme tvrzením o diferenciálu složené funkce (viz Definici 2.15). Důkaz této věty nebudeme uvádět – jde o speciální případ Věty 3.40, kterou dokážeme v kapitole 3.

Věta 2.104. *Nechť funkce g_1, g_2, $\ldots$, $g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ diferenciál, a funkce $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ má diferenciál v bodě*

$$b = \big(g_1(a), g_2(a), \ldots, g_M(a)\big).$$

Pak složená funkce $F = f(g_1, \ldots, g_M)$ má také diferenciál v bodě a. Reprezentant tohoto diferenciálu je roven

$$\nabla F(a) = \nabla f(b) \cdot \begin{pmatrix} \nabla g_1(a) \\ \nabla g_2(a) \\ \vdots \\ \nabla g_M(a) \end{pmatrix},$$

tzn.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a), \quad i = 1, \ldots, N.$$

2.9 Derivace vyšších řádů

Vzpomeneme-li si na funkci jedné proměnné, její druhá derivace byla vlastně derivací derivace funkce. Nyní nadefinujeme parciální derivace druhého řádu. Protože máme N proměnných, těchto druhých derivací bude více – jednoduchou kombinatorickou úvahou dojdeme k číslu N^2.

Definice 2.105 Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ parciální derivace f'_{x_i}, $i \in \{1, \dots, N\}$ na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^N$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Existuje-li parciální derivace funkce f'_{x_i} podle j-té proměnné v bodě a, nazýváme ji *parciální derivací 2. řádu funkce f v bodě a podle proměnných x_i, x_j (v tomto pořadí)*, značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \text{ nebo } f''_{x_i x_j}(a).$$

Je-li $i = j$, píšeme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \text{ nebo } f''_{x_i^2}(a), \dots$$

Je-li $i \neq j$, říkáme takové derivaci *smíšená.*

Poznámka 2.106 Pokud má funkce f parciální derivaci $f''_{x_i x_j}(x)$ v každém bodě $x \in D$, pak zobrazení

$$D \ni x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

nazýváme parciální derivací funkce f druhého řádu podle proměnných x_i, x_j na D a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ nebo } f''_{x_i x_j}$$

(jde tedy opět o funkci N proměnných).

Následující důležitá věta je uvedena bez důkazu.

Věta 2.107 (Schwarzova)**.** *Má-li funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ na okolí $\mathcal{U}(a) \subset \mathcal{D}(f)$ bodu a parciální derivace f'_{x_i}, f'_{x_j} $(i, j \in \{1, \dots, N\})$ a derivaci $f''_{x_i x_j}$, která je v bodě a spojitá, pak existuje $f''_{x_j x_i}(a)$ a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Schwarzova věta nám může ušetřit čas při počítání smíšených derivací – viz následující důsledek.

Důsledek 2.108. *Jestliže je funkce $f''_{x_i x_j}$ spojitá na otevřené množině $D \subset \mathcal{D}(f)$, pak existuje $f''_{x_j x_i}$ na D a tyto funkce jsou si rovny.*

Je tedy jasné, že vypočítame-li smíšenou parciální derivaci druhého řádu a tato je na nějaké množině spojitá je rovna druhé parciální derivaci podle stejných proměnných ovšem v opačném pořadí.

Příklad 2.109 Vypočtěte všechny derivace druhého řádu funkce

$$f(x, y) = 3x^2 \sin y + \mathrm{e}^{x+2y}.$$

Řešení. Pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x \sin y + \mathrm{e}^{x+2y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \cos y + 2\mathrm{e}^{x+2y},$$

a následně

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6\sin y + \mathrm{e}^{x+2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x\cos y + 2\mathrm{e}^{x+2y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x\cos y + 2\mathrm{e}^{x+2y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -3x^2\sin y + 4\mathrm{e}^{x+2y}.$$

Je vidět, že v tomto případě jsou smíšené derivace shodné – plyne to z jejich spojitosti (viz Schwarzovu větu). ◯

Poznámka 2.110 Parciální derivace vyšších řádů definujeme podobně. Např. parciální derivaci třetího řádu podle proměnných x_1, x_2, x_3 definujeme jako parciální derivaci podle proměnné x_3 parciální derivace druhého řádu podle proměnných x_1 a x_2, tzn.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right).$$

2.10 Diferenciály vyšších řádů

Podobně jako se daly definovat parciální derivace libovolného řádu, můžeme to samé provést s diferenciálem. Například diferenciál 2. řádu bychom mohli nadefinovat podobně jako totální diferenciál, tzn. jako zobrazení mající jisté vlastnosti a poté odvodit její předpis. My zvolíme opačný a pohodlnější postup. Druhý diferenciál nadefinujeme přímo jejím předpisem. Nebude z toho ovšem úplně jasná motivace – moc vadit nám to nebude, protože diferenciály vyšších řádů jsou stejně těžko uchopitelné, podobně jako derivace vyšších řádů – umíme s nimi jednoduše pracovat, ale jejich geometrický význam už není vůbec zřejmý.

Definice 2.111 Nechť má funkce f v bodě a spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu včetně. *Diferenciálem 2. řádu funkce f v bodě a* rozumíme kvadratickou formu

$$\mathrm{d}^2 f(a)(h) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

Poznámka 2.112 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má spojité derivace druhého řádu v bodě a. Reprezentantem diferenciálu druhého řádu funkce f v bodě a je tedy čtvercová symetrická matice

$$\nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(a) \end{pmatrix}$$

tzv. *Hessova matice* (determinant této matice se nazývá *hessián*). Symetrie Hessovy matice plyne ze Schwarzovy věty (Věta 2.107). Platí tedy

$$\mathrm{d}^2 f(a)(h) = (h \cdot \nabla^2 f(a), h), \quad h \in \mathbb{R}^N.$$

Příklad 2.113 Uvažujme funkci $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Hessova matice funkce f v obecném bodě (x,y) je pak

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A druhý diferenciál funkce f v bodě (x,y) má tedy předpis

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 2(\mathrm{d}x)^2 + 2(\mathrm{d}y)^2, \quad (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \in \mathbb{R}^2.$$ ○

Konečně zadefinujme diferenciál m–tého řádu pro $m \in \mathbb{N}$.

Definice 2.114 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má v bodě a spojité všechny parciální derivace až do m-tého řádu včetně, $m \in \mathbb{N}$. *Diferenciálem m-tého řádu funkce f v bodě a* rozumíme formu stupně m definovanou předpisem

$$\mathrm{d}^m f(a)(h) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 1}^{N} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(a) \cdot h_{i_1} \cdot h_{i_2} \cdots h_{i_m}.$$

Poznámka 2.115

- Z definice okamžitě vidíme, že diferenciál m-tého řádu je formou stupně m – viz Poznámku 2.27.
- Proč definujeme diferenciály právě uvedeným způsobem pochopíme dále ve Větě 2.116.
- V definici diferenciálu m–tého řádu předpokládáme spojitost všech parciálních derivací řádu m. S využitím Schwarzovy věty (Věta 2.107) pak lze dokázat, že parciální derivace podle stejných proměnných ale v jiném pořadí jsou stejné, např.

$$\frac{\mathrm{d}^4 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}(a) = \frac{\mathrm{d}^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}(a) = \frac{\mathrm{d}^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}(a) = \frac{\mathrm{d}^4 f}{\partial x_2 \partial x_1^2 \partial x_2}(a) = \cdots.$$

U funkce více proměnných jsme schopni dokázat analogii Taylorova vzorce pro funkci jedné proměnné. S tím rozdílem, že místo obyčejných derivací násobených mocninami proměnné budou členy tvořeny diferenciály vyšších řádů dané funkce.

Věta 2.116 (Taylorova)**.** *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace až do řádu $m+1$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) na otevřené množině D. Nechť a, $h \in \mathbb{R}^N$ jsou takové, že*

$$\{a + th \; ; \; t \in [0,1]\} \subset D.$$

Pak existuje $\xi \in (0,1)$ tak, že

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(a)(h) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(a)(h) + \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(a+\xi h)(h).$$

Důkaz. Označme
$$g(t) = f(a+th), \quad t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon),$$
kde $\varepsilon > 0$ je tak malé, že
$$\{a+th\ ;\ t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)\} \subset D$$
(takové ε skutečně existuje a to díky otevřenosti množiny D). Pak opakovaným použitím Věty 2.104 pro každé $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ dostáváme

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) \cdot h_i = \mathrm{d}f(a+th)(h),$$

a také

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) \cdot h_j \right) \cdot h_i = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) \cdot h_i h_j = \mathrm{d}^2 f(a+th)(h)$$

a tak dále, až nakonec dostaneme

$$g^{(j)}(t) = \cdots = \mathrm{d}^j f(a+th)(h), \quad j = 1, \ldots, m+1.$$

Tedy vidíme, že funkce g má na intervalu $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ a následně i na intervalu $[0,1]$ spojitou derivaci až $(m+1)$-ního řádu. Aplikujeme-li na funkci g a interval $[0,1]$ Taylorovu větu o zbytku (viz [13, Věta 7.12]), existuje $\xi \in (0,1)$ tak, že

$$g(0+1) = g(0) + g'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} g''(0) \cdot 1^2 + \cdots + \frac{1}{m!} g^{(m)}(0) \cdot 1^m + \frac{1}{(m+1)!} g^{(m+1)}(\xi) 1^{m+1},$$

tzn.

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(a)(h) + \cdots + \frac{1}{m!}\,\mathrm{d}^m f(a)(h) + \frac{1}{(m+1)!}\,\mathrm{d}^{m+1} f(a+\xi h)(h).$$

□

Kapitola 3

Vektorové funkce

Doposud jsme se zabývali zobrazeními typu

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \qquad \text{kde } N \in \mathbb{N},$$

tedy reálnými funkcemi jedné či více reálných proměnných. Nyní se zaměříme na zobrazení typu

$$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \qquad \text{kde } M, N \in \mathbb{N},$$

kterým v případě $M > 1$ budeme říkat *vektorové funkce*.

3.1 Základní pojmy

Rádi bychom vytvořili diferenciální počet takových zobrazení, aby diferenciální počet funkcí N proměnných (tzn. pro $M = 1$) byl jen speciálním případem.

Úmluva 3.1 V této kapitole bude výhodné uvažovat prvky množiny $\mathbb{R}^N$ jako *sloupcové vektory*, tzn.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix},$$

které je možno také chápat jako matice o jednom sloupci a N-řádcích. Fakt, zda-li je N-složkový vektor chápán řádkově či sloupcově je důležité vlastně pouze při násobení matic. Hlavním důvodem pro používání sloupcových vektorů v této kapitole je již zavedený tvar tzv. Jacobiho matice vektorové funkce – viz dále Definici 3.36.

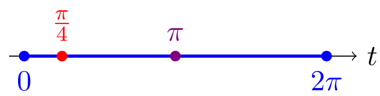
Definice 3.2 Nechť $M, N \in \mathbb{N}$. Zobrazení $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ nazveme *M-vektorovou funkcí N-proměnných.*

Příklad 3.3 Se zobrazeními typu $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ pro $M > 1$ se setkáváme často. Ať už jde o parametrizaci křivek, ploch nebo různé transformace (v rovině či prostoru).

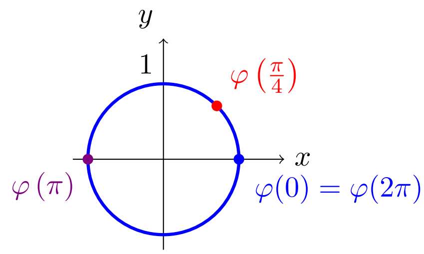
(a) Zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

je parametrizací kružnice, viz Obrázek 3.1.



(a) Definiční obor.



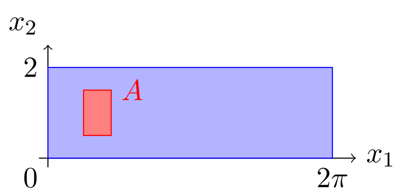
(b) Obor hodnot.

Obrázek 3.1: Zobrazení φ z Příkladu 3.3(a).

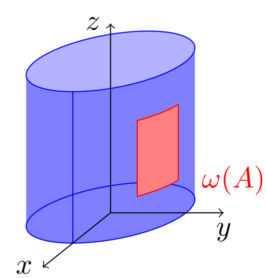
(b) Zobrazení $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\omega(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2)^T \in [0, 2\pi] \times [0, 2]$$

je „parametrizací pláště válce“ o poloměru 1 a výšce 2, viz Obrázek 3.2. V tomto obrázku je pro zajímavost načrtnuta červeně jistá množina A a její obraz v zobrazení ω.



(a) Definiční obor s množinou A.



(b) Obor hodnot s množinou $\omega(A)$.

Obrázek 3.2: Zobrazení ω z Příkladu 3.3(b).

(c) Zobrazení $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

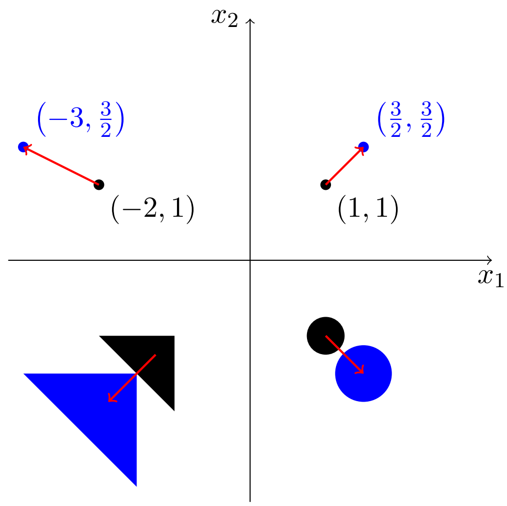
$$S(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

definuje transformaci *stejnolehlosti se středem v počátku a parametrem* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *jakožto koeficientem stejnolehlosti*, viz Obrázek 3.3, přitom pro $k \in (0, 1)$ jde o smršťování a pro $k > 1$ jde o roztahování.

(d) Zobrazení $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$R(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

je transformací *rotace o úhel* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *se středem v počátku*, viz Obrázek 3.4.



Obrázek 3.3: Některé body a množiny bodů z $\mathbb{R}^2$ (černě) a jejich obrazy (modře) v zobrazení S pro $k = \frac{3}{2}$ z Příkladu 3.3(c).

(e) Zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definovanému předpisem

$$\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (r, \theta)^T \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$$

říkáme *polární souřadnice*, viz Obrázek 3.5. Toto zobrazení je asi nejčastější alternativou ke kartézským souřadnicím v rovině a popisují se jimi s výhodou útvary, jejichž části mají tvar kruhu se středem v počátku.

Poznámka 3.4 Zobrazení $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tedy každému vektoru $(x_1, \dots, x_N)^T \in \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^N$ přiřazuje bod (vektor) $(y_1, \dots, y_M)^T \in \mathbb{R}^M$. Protože každá složka y_i je určena jednoznačně uspořádanou N-ticí $(x_1, \dots, x_N)^T$, takové pravidlo je reálnou funkcí N proměnných. Budeme ho značit $f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tzn.

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_N) \qquad \text{pro každé } i = 1, \dots, M.$$

Tedy zobrazení f je určeno jednoznačně M-ticí f_1, f_2, ..., f_M funkcí N proměnných. Budeme tento fakt označovat jako

$$f = (f_1, \dots, f_M)^T.$$

Je třeba také připomenout, že vektorová funkce a její složky mají *stejný* definiční obor. Např. vektorová funkce φ z Příkladu 3.3(a) má dvě složky $\varphi_1(t) = \cos t$ a $\varphi_2(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

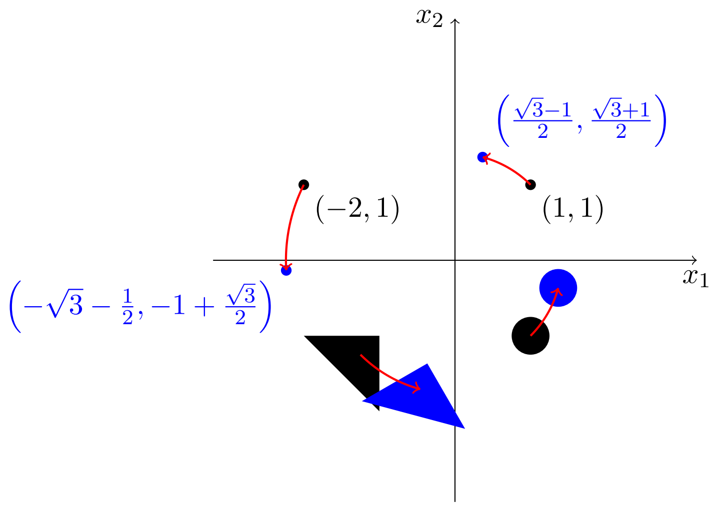
Cvičení 3.5 Dokažte, že pro $f = (f_1, \dots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ platí

$$f_i = \Pi_i \circ f$$

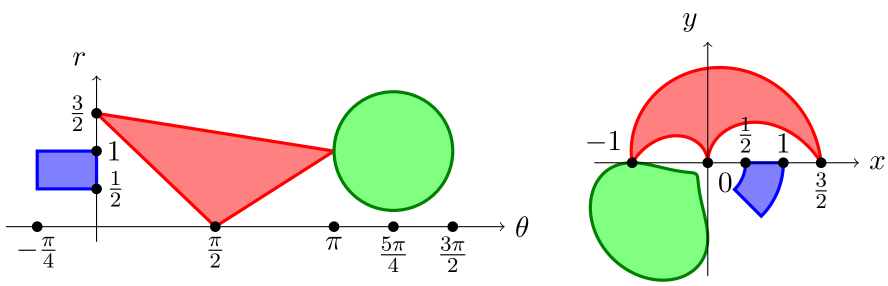
pro každé $i = 1, \dots, M$, kde $\Pi_i : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ je i-tá projekce.

Poznámka 3.6 Jedním z nejjednodušších vektorových funkcí je *lineární zobrazení*, tzn. zobrazení $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ splňující

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathbb{R}^N\ :\ L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$



Obrázek 3.4: Některé body a množiny bodů z $\mathbb{R}^2$ (černě) a jejich obrazy (modře) v zobrazení R pro $\varphi = \frac{\pi}{6}$ z Příkladu 3.3(d).



(a) Některé množiny z definičního oboru zobrazení Φ.

(b) Obrazy vybraných množin z definičního oboru zobrazení Φ.

Obrázek 3.5: Zobrazení z Příkladu 3.3(e).

Podobně jako u lineární formy (viz Poznámku 2.25) má toto zobrazení svého *reprezentanta* – tentokrát matici. Dá se totiž dokázat, že ke každému lineárnímu zobrazení $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^M$ existuje matice B typu $M \times N$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ platí

$$L(x) = B \cdot x,$$

kde na pravé straně jde o součin matice typu $M \times N$ se sloupcovým vektorem délky N. Podíváme-li se pozorně, pak zjistíme, že zobrazení R a S v Příkladu 3.3 jsou lineární.

3.2 Limita a spojitost

Pojmy limity a spojitosti vektorových funkcí snadno přeneseme z funkcí více proměnných – budeme zde již o dost stručnější, např. limitu/spojitost v bodě zde budeme definovat jako speciální případ limity/spojitosti v bodě vzhledem k množině.

Definice 3.7 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \big(A \cap \mathcal{D}(f)\big)'$, $L \in \mathbb{R}^M$. Řekneme, že f *má v bodě a limitu L vzhledem k množině A*, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in A \cap \mathcal{D}(f), x \in \mathcal{R}_\delta(a) \ :\ f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L),$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon(L)\ \exists \mathcal{R}_\delta(a) \ :\ f\big(\mathcal{R}_\delta(a) \cap A \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(L).$$

Pak píšeme $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = L$. Speciálně, pokud $A = \mathcal{D}(f)$, říkáme, že f *má v bodě a limitu L* a píšeme

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Poznámka 3.8

(a) V Definici 3.7 máme pouze „vlastní“ limitu. Co se týče „nevlastních limit“ a limit „v nevlastních bodech“, lze je smysluplně definovat podobně jako bylo ukázáno v Poznámce 2.30(c) a (d).

(b) Připomeňme, že inkluze $x \in \mathcal{R}_\delta(a)$ je ekvivalentní s nerovnostmi $0 < \|x - a\| < \delta$ a $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(L)$ je ekvivalentní s $\|f(x) - L\| < \varepsilon$.

Věta 3.9 (Heineova o limitě)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \big(A \cap \mathcal{D}(f)\big)'$, $L \in \mathbb{R}^M$. Pak $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = L$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\big\{x^{[n]}\big\}_{n=1}^\infty$ bodů z $\big(A \cap \mathcal{D}(f)\big) \setminus \{a\}$, pro niž $\lim\limits_{n\to\infty} x^{[n]} = a$, platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{[n]}) = L.$$

Následně pak lze dokázat následující užitečnou větu, která vlastně jen říká, že limity vektorových funkcí lze určit pomocí limit jejich složek – důkaz je založen na použití Heineovy věty (Věta 3.9) a věty o konvergenci po složkách (Věta 1.22).

Věta 3.10. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in \big(A \cap \mathcal{D}(f)\big)'$, $L \in \mathbb{R}^M$. Pak*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = L$$

právě tehdy, když pro každé $i = 1, \dots, M$ platí

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_i(x) = L_i.$$

Pomocí této věty tedy můžeme vyšetřování limit vektorových funkcí převést na problém limit funkcí N proměnných. Např. hned můžeme vyslovit následující větu o jednoznačnosti limity.

Věta 3.11. *Zobrazení $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má v daném bodě (vzhledem k dané množině) nejvýše jednu limitu.*

Uveďme si několik důležitých vět, které si čtenář snadno sám dokáže – inspiraci nalezne u funkcí jedné a více proměnných.

Věta 3.12 (o aritmetice limit)**.** *Nechť* $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(g)'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^{[1]} \in \mathbb{R}^M$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L^{[2]} \in \mathbb{R}^M$. *Pak platí*

(a) $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = \|L^{[1]}\|$,

(b) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = L^{[1]} + L^{[2]}$,

(c) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big) = L^{[1]} - L^{[2]}$,

(d) $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x), g(x)\big) = (L^{[1]}, L^{[2]})$,

(e) $\lim\limits_{x\to a} \rho(f(x), g(x)) = \rho(L^{[1]}, L^{[2]})$.

Poznamenejme, že ve Větě 3.12(a) se mluví o limitě funkce N proměnných s předpisem

$$x \mapsto \|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} f_i^2(x)},$$

dále ve Větě 3.12(d) se mluví o limitě funkce N proměnných s předpisem

$$x \mapsto \big(f(x), g(x)\big) = \sum_{i=1}^{M} f_i(x) \cdot g_i(x)$$

a ve Větě 3.12(e) zase o funkci N proměnných s předpisem

$$x \mapsto \rho(f(x), g(x)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \big(f_i(x) - g_i(x)\big)^2}.$$

Věta 3.13 (o limitě složeného zobrazení)**.** *Nechť* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^R$, $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^M$, $L \in \mathbb{R}^R$. *Jestliže* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to b} g(x) = L$ *a existuje* $\mathcal{R}(a)$ *tak, že pro každé* $x \in \mathcal{R}(a) \cap \mathcal{D}(f)$ *platí* $f(x) \neq b$, *pak*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L.$$

Podívejme se nyní na spojitost v bodě. Po výkladu limit vektorových funkcí by nás již nemělo překvapit, že definice budou téměř na chlup podobné těm pro funkce v $\mathbb{R}^N$, a že spojitost vektorové funkce bude charakterizována spojitostí jejích složek.

Definice 3.14 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A \cap \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f *je v bodě* a *spojitá vzhledem k množině* A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in A \cap \mathcal{D}(f), x \in \mathcal{U}_\delta(a) \ : \ f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big),$$

neboli

$$\forall \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big) \ \exists \mathcal{U}_\delta(a) \ : \ f\big(\mathcal{U}_\delta(a) \cap A \cap \mathcal{D}(f)\big) \subset \mathcal{U}_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Speciálně, pro $A = \mathcal{D}(f)$ říkáme, že f *je v bodě* a *spojitá.*

Věta 3.15. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A \cap \mathcal{D}(f)$. Pak platí:*

(a) jestliže a je izolovaný bod $A \cap \mathcal{D}(f)$, pak f je v bodě a spojitá vzhledem k množině A,

(b) jestliže a je hromadný bod $A \cap \mathcal{D}(f)$, pak f je v bodě a spojitá vzhledem k množině A právě tehdy, když

$$f(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Opět si neodpustíme Heineovu větu – tentokrát již naposledy v těchto skriptech.

Věta 3.16 (Heineova o spojitosti)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A \cap \mathcal{D}(f)$. Zobrazení f je spojité v bodě a vzhledem k množině A právě tehdy, když pro každou posloupnost $\left\{x^{[n]}\right\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z $A \cap \mathcal{D}(f)$ pro niž $\lim\limits_{n\to\infty} x^{[n]} = a$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{[n]}) = f(a).$$

Věta 3.17. *Nechť $f = (f_1, \ldots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $a \in A \cap \mathcal{D}(f)$. Zobrazení f je spojité v bodě a vzhledem k množině A právě tehdy, když f_i jsou spojité v bodě a vzhledem k množině A pro každé $i = 1, \ldots, M$.*

Příklad 3.18 Funkce

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2y + xy \\ 3xy - 3x \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

je v každém bodě z $\mathbb{R}^2$ spojitá, protože obě funkce $f_1(x, y) = x^2y + xy$ a $f_2(x, y) = 3xy - 3x$ jsou spojité v každém bodě z $\mathbb{R}^2$. ○

Příklad 3.19 Dokažte, že každé lineární zobrazení $\mathbb{R}^N$ do $\mathbb{R}^M$ je spojité v každém bodě z $\mathbb{R}^N$.

Řešení. Jak již víme z Poznámky 3.6, každé lineární zobrazení je ve tvaru

$$L(x) = B \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

kde B je matice typu $M \times N$. Zvolme bod $a \in \mathbb{R}^N$ libovolně. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ platí

$$\|L(x) - L(a)\| = \|Bx - Ba\| = \|B(x - a)\| \leq \|B\| \cdot \|x - a\|,$$

kde jsme využili nerovnosti z Příkladu 1.39. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak lze položit

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\|B\| + 1},$$

protože pak pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ splňující $\|x - a\| < \delta$ platí

$$\|L(x) - L(a)\| \leq \|B\| \cdot \|x - a\| < \frac{\|B\|}{\|B\| + 1}\varepsilon < \varepsilon.$$ ○

Vzhledem k Poznámce 3.6 a Příkladu 3.19 pak zobrazení R a S z Příkladu 3.3 jsou spojité v každém bodě z $\mathbb{R}^2$.

Důkaz následujících vět je opět přenechán čtenáři.

Věta 3.20. *Nechť f, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Jsou-li f a g spojité v bodě a, pak jsou v tomto bodě spojitá i zobrazení*

$$\|f\|, \quad f+g, \quad f-g, \quad (f,g), \quad \rho(f,g).$$

Věta 3.21 (o limitě složeného zobrazení)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^R$, $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^M$. Jestliže $\lim_{x\to a} f(x) = b$ a g je spojitá v bodě b, pak*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b).$$

Odtud již okamžitě dostáváme následující.

Důsledek 3.22 (o spojitosti složeného zobrazení)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^R$, $a \in \mathbb{R}^N$. Jestliže f je spojitá v bodě a a g je spojitá v bodě $f(a)$, pak $g \circ f$ je spojitá v bodě a.*

Nyní si nadefinujme spojitost na množině – bude to stejné jako u funkcí v $\mathbb{R}^N$ a mnohé věty o spojitosti se snadno zobecní i pro vektorové funkce.

Definice 3.23 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f *je spojitá na množině A*, jestliže

$$\forall x' \in A \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \ \forall x \in A, \left\|x - x'\right\| < \delta : \ \left\|f(x) - f(x')\right\| < \varepsilon,$$

přitom pokud $A = \mathcal{D}(f)$, říkáme krátce, že f *je spojitá*.

Poznámka 3.24 Opět platí, že zobrazení je spojité na dané množině právě tehdy, když jsou na té množině spojité její složky. Proto také nepřekvapí, že vektorová funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je spojitá na množině $A \subset \mathcal{D}(f)$ právě tehdy, když je spojitá restrikce $f|_A$.

Věta 3.25. *Nechť f, $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Jsou-li f a g spojité na množině A, pak jsou spojitá na množině A i zobrazení*

$$\|f\|, \quad f+g, \quad f-g, \quad (f,g), \quad \rho(f,g).$$

Věta 3.26 (o spojitosti složeného zobrazení)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $g : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^R$, $A \subset \mathbb{R}^N$. Jestliže f je spojité na množině A a g je spojitá na množině $f(A)$, pak $g \circ f$ je spojitá na množině A.*

Podobně jako funkce více proměnných i spojitá zobrazení mezi $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^M$ zachovávají kompaktnost a souvislost – viz následující dvě věty.

Věta 3.27. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je spojité na kompaktní množině $A \subset \mathcal{D}(f)$. Pak $f(A)$ je kompaktní.*

Důkaz. Zvolme libovolnou posloupnost $\{y^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z $f(A)$. Pak existuje posloupnost prvků $\{x^{[n]}\}_{n=1}^{\infty}$ z množiny A tak, že $y^{[n]} = f(x^{[n]})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z kompaktnosti A plyne, že existuje konvergentní vybraná posloupnost $\{x^{[k_n]}\}_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $a \in A$. Ze spojitosti f v bodě a a Heineovy věty (Věta 3.16) pak plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} y^{[k_n]} = \lim_{n\to\infty} f(x^{[k_n]}) = f(a) \in f(A).$$

□

Věta 3.28. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je spojité na souvislé množině $D \subset \mathcal{D}(f)$. Pak $f(D)$ je souvislá množina.*

Důkaz. Nechť $y^{[1]}, y^{[2]} \in f(D)$. Pak existují $x^{[1]}, x^{[2]} \in D$ takové, že

$$y^{[1]} = f(x^{[1]}) \quad \text{a} \quad y^{[2]} = f(x^{[2]}).$$

Protože D je souvislá množina, existuje spojité zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ spojité na intervalu $[\alpha, \beta]$, jehož obor hodnot je podmnožinou D a platí

$$\varphi(\alpha) = x^{[1]} \quad \text{a} \quad \varphi(\beta) = x^{[2]}.$$

Uvažujme vektorovou funkci $\psi = f \circ \varphi$, tzn. $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ je spojité (viz Větu 3.26) na intervalu $[\alpha, \beta]$, obor hodnot ψ je podmnožinou $f(D)$ a platí

$$\psi(\alpha) = y^{[1]} \quad \text{a} \quad \psi(\beta) = y^{[2]}.$$

To ale znamená, že $f(D)$ je souvislá množina. □

3.3 Směrová a parciální derivace

Tyto pojmy budou přirozenými zobecněními stejnojmenných pojmů pro funkce N proměnných. Jejich definice budou dokonce formálně téměř totožné.

Definice 3.29 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $0 \neq \nu \in \mathbb{R}^N$. Existuje-li limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\nu) - f(a)}{t}$$

nazýváme ji *směrovou derivací vektorové funkce f v bodě a podle vektoru ν*. Budeme ji značit

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a), \text{ nebo } f'_{\nu}(a), \ldots$$

Poznámka 3.30

- Srovnejte Definici 3.29 s jejím *speciálním případem*, což je Definice 2.73. Důležitý rozdíl je ten, že limita v Definici 3.29 je limita vektorové funkce, tzn. směrová derivace je (sloupcový) vektor z $\mathbb{R}^M$!

- Dále vzhledem k Větě 3.10 platí, že složky směrové derivace vektorové funkce jsou směrové derivace složek této vektorové funkce, tzn. je-li $f = (f_1, \ldots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ a existuje-li $f'_\nu(a)$, pak platí

$$f'_\nu(a) = \begin{pmatrix} (f_1)'_\nu(a) \\ (f_2)'_\nu(a) \\ \vdots \\ (f_M)'_\nu(a) \end{pmatrix}.$$

- Samozřejmě pak stejně definujeme i *parciální derivace vektorové funkce v bodě* – opět to místo čísel budou (sloupcové) vektory z $\mathbb{R}^M$. Nebudeme již nafukovat text definicí téměř shodnou s Definicí 2.78. Jen zmiňme, že pro vektorovou funkci $f = (f_1, \ldots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ a bod $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, pak platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}.$$

  A budeme používat i *parciální derivace vektorových funkcí*. Opět nebudeme text nafukovat zobecněním Definice 2.81 pro vektorové funkce. Je snad jasné, že parciální derivace vektorové funkce f podle i-té proměnné je M-vektorová funkce N proměnných daná předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x), \ldots,\ \frac{\partial f_M}{\partial x_i}(x) \right)^T.$$

- Zvláštní pozornost věnujme vektorové funkci *jedné* proměnné. Zřejmě parciální derivace vektorové funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ podle její jediné proměnné je funkce mající předpis

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(t) \\ \varphi'_2(t) \\ \vdots \\ \varphi'_M(t) \end{pmatrix}.$$

  Protože jde o jedinou proměnnou můžeme slova „podle první proměnné“ vynechávat a vektorovou funkci φ' nazývat pouze *derivací* φ.

Příklad 3.31 Vypočtěte směrové derivace funkce φ z Příkladu 3.3(a) podle vektoru $\nu = 1$ v bodech $\frac{\pi}{4}$ a π.

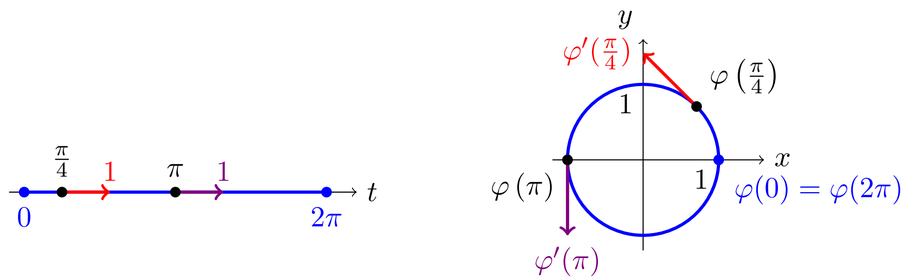
Řešení. Protože nám jde o směrové derivace ve směru vektoru $\nu = 1$ a φ je vektorová funkce jedné proměnné, stačí spočítat derivace jejích složek. Platí

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Proto pak

$$\varphi'_\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{4} \\ \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \varphi'_\nu(\pi) = \varphi'(\pi) = \begin{pmatrix} -\sin\pi \\ \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Obě směrové derivace společně s vektory $\nu = 1$ posunutých do příslušných bodů lze vidět na Obrázku 3.6. ◯



(a) Definiční obor s body a vektorem $\nu = 1$.

(b) Obor hodnot zobrazení φ společně se směrovými derivacemi.

Obrázek 3.6: Směrové derivace z Příkladu 3.31.

Příklad 3.32 Vypočtěte parciální derivace vektorové funkce $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisem

$$\omega(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (\theta, \varphi)^T \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

v bodě $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Řešení. Zřejmě pak pro každé $(\theta, \varphi)^T \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že

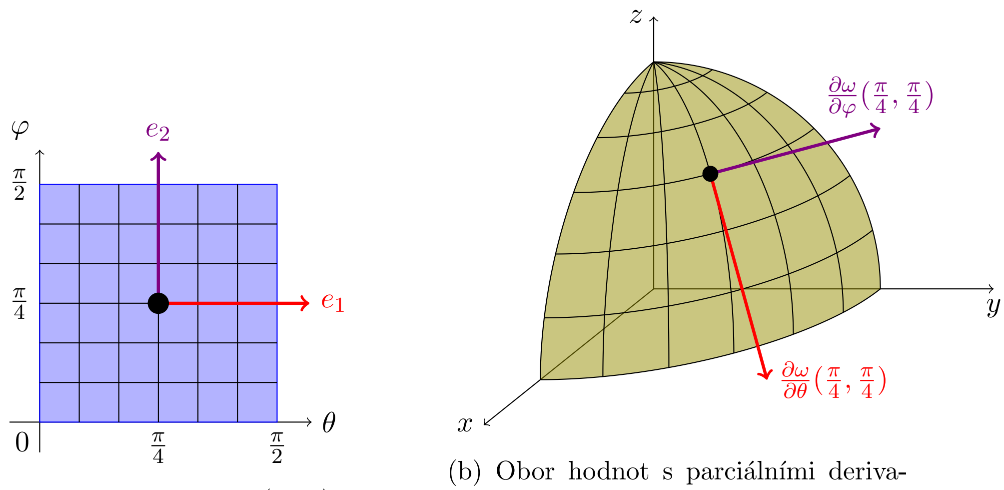
$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tyto vektory jsou ukázány na Obrázku 3.7. ◯

Poznámka 3.33 Podobným způsobem lze zobecnit i parciální derivace vektorových funkcí druhého a vyšších řádů.

3.4 Diferenciál

Diferenciál vektorové funkce je opět přirozeným zobecněním totálního diferenciálu – jeho definice je totiž formálně téměř totožná s Definicí 2.90.



(a) Definiční obor s bodem $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ a vektory e_i umístěnými do tohoto bodu.

(b) Obor hodnot s parciálními derivacemi podle obou proměnných v bodě $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Obrázek 3.7: Zobrazení z Příkladu 3.32(b).

Definice 3.34 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Lineární zobrazení $\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ nazveme *diferenciálem vektorové funkce f v bodě a*, jestliže existuje

- okolí $\mathcal{U}(o) \subset \mathbb{R}^N$ a
- zobrazení $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ splňující

$$\lim_{h \to o} \frac{\|\tau(h)\|}{\|h\|} = 0$$

tak, že pro každé $h \in \mathcal{U}(o)$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \tau(h).$$

Jak již víme z Poznámky 3.6, lineární zobrazení $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má svého reprezentanta, jde o matici typu $M \times N$. Neměla by nás tedy překvapit následující věta.

Věta 3.35. *Nechť má zobrazení $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ v bodě $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ totální diferenciál. Pak*

(i) f je v bodě a spojitá,

(ii) existují $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ pro každé $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$ a platí

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i, \quad h = (h_1, \dots, h_N)^T \in \mathbb{R}^N,$$

a tedy reprezentantem diferenciálu vektorové funkce f v bodě a je matice typu $M \times N$ ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}.$$

Důkaz. ad (i): Předpokládejme, že zobrazení f má v bodě a diferenciál, tzn. existuje matice $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ tak, že

$$f(a+h) - f(a) = \mathrm{d}f(a)(h) + \tau(h) = B \cdot h + \tau(h),$$

kde

$$\lim_{h \to o} \frac{\|\tau(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

odkud plyne $\lim\limits_{h \to o} \|\tau(h)\| = 0$. Pak podle Příkladu 1.39 platí

$$\|f(a+h) - f(a)\| \le \|B \cdot h\| + \|\tau(h)\| \le \|B\| \cdot \|h\| + \|\tau(h)\|.$$

Pravá strana jde k nule pro $h \to o$. Tedy f je spojitá v bodě a.
ad (ii): V definici diferenciálu položme $h = te_i$, kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak platí

$$f(a+te_i) - f(a) = tBe_i + \tau(te_i) = tb_i + \tau(te_i),$$

kde $b_i \in \mathbb{R}^M$ je i-tý sloupec matice B. Podělíme t, provedeme limitní přechod pro $t \to 0$ a dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = b_i + \lim_{t \to 0} \frac{\tau(te_i)}{t}.$$

Z faktu

$$\left\| \frac{\tau(te_i)}{t} \right\| = \frac{\|\tau(te_i)\|}{\|te_i\|} \to 0 \quad \text{pro } t \to 0$$

plyne existence parciálních derivací i reprezentace diferenciálu. □

Definice 3.36 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ má diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^N$. Jeho reprezentanta nazýváme *Jacobiho maticí vektorové funkce f v bodě a* a značíme $Jf(a)$ nebo $\nabla f(a)$. Determinant této matice nazýváme *jakobiánem funkce f v bodě a*.

Poznámka 3.37 Podíváme-li se na Jacobiho matici vektorové funkce f pořádně, zjistíme, že její řádky jsou tvořeny gradienty složek vektorové funkce f. Proto by nás nemuselo překvapit, že podobně jako tomu bylo u limity a spojitosti, také *diferenciál vektorové funkce existuje právě tehdy, když existují diferenciály jejích složek* (zkuste dokázat!). Je třeba zdůraznit, že zde je potřeba chápat gradienty funkcí N-proměnných jako *řádkové* vektory či matice typu $1 \times N$. Tedy pro $f = (f_1, \ldots, f_M)^T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ platí

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \nabla f_2(a) \\ \vdots \\ \nabla f_M(a) \end{pmatrix}.$$

Zdůrazněme také, že Věta 3.35 říká, že diferenciál vektorové funkce f v bodě a má předpis

$$\mathrm{d}f(a)(h) = Jf(a) \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}^N,$$

kde násobení na pravé straně je (maticové) násobení matice typu $M \times N$ se sloupcovým vektorem délky N.

Příklad 3.38 Vypočtěte Jacobiho matici a jacobián zobrazení

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

v bodě $(r, \varphi)^T \in \mathbb{R}^2$.

Řešení. Protože stačí spočítat čtyři parciální derivace, téměř ihned vidíme, že

$$J\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Jakobián je roven

$$\det J\Phi(r, \varphi) = r.$$

○

Nyní směřujeme k formulaci a důkazu věty o diferenciálu složeného zobrazení. Aby se nám tato věta snadněji dokazovala, nejprve uveďme následující pomocné tvrzení.

Lemma 3.39. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ je diferenciálem vektorové funkce f v bodě a právě tehdy, když existuje*

- *okolí $\mathcal{U}(o) \subset \mathbb{R}^N$ a*
- *zobrazení $\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ spojité v bodě o, pro něž $\eta(o) = o$*

tak, že pro každé $h \in \mathcal{U}(o)$ platí

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + \|h\|\eta(h).$$

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť f má v bodě a diferenciál, tzn. platí výrok Definice 3.34. Položme

$$\eta(h) = \begin{cases} \dfrac{\tau(h)}{\|h\|} & \text{pro } h \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}, \\ o & \text{pro } h = o. \end{cases}$$

Podle předpokladu $\lim\limits_{h\to o}\eta(h)=o$ a přitom $\eta(o)=o$.
($\Leftarrow$): V opačném případě položíme

$$\tau(h)=\|h\|\eta(h),\quad h\in\mathbb{R}^N. \qquad \square$$

Věta 3.40. *Nechť $g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ mají v bodě $a\in\mathbb{R}^N$ diferenciál, zobrazení $f:\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^R$ má diferenciál v bodě $g(a)$. Pak složená funkce $F=f\circ g$ má také diferenciál v bodě a, přitom jeho reprezentant je*

$$\nabla F(a)=\nabla f\big(g(a)\big)\cdot\nabla g(a).$$

Důkaz. Podle předpokladů a Lemmatu 3.39 existuje okolí $\mathcal{U}_{\delta_1}(o)\subset\mathbb{R}^N$, zobrazení $\eta_1:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ spojité v bodě o, $\eta_1(o)=o$ tak, že

$$g(a+h)-g(a)=\nabla g(a)\cdot h+\|h\|\cdot\eta_1(h)\quad\text{pro každé } h\in\mathcal{U}_{\delta_1}(o) \tag{3.1}$$

a dále existuje okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(o)\subset\mathbb{R}^M$, zobrazení $\eta_2:\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^R$ spojité v bodě o, $\eta_2(o)=o$ tak, že

$$f\big(g(a)+k\big)-f\big(g(a)\big)=\nabla f\big(g(a)\big)\cdot k+\|k\|\cdot\eta_2(k)\quad\text{pro každé } k\in\mathcal{U}_\varepsilon(o). \tag{3.2}$$

Podle Věty 3.35 je g spojitá v bodě a, tzn. k $\mathcal{U}_\varepsilon\big(g(a)\big)$ existuje $\mathcal{U}_{\delta_2}(a)$ takové, že pro každé $x\in\mathcal{U}_{\delta_2}(a)$ platí $g(x)\in\mathcal{U}_\varepsilon\big(g(a)\big)$. Jinak řečeno, pro každé $h\in\mathcal{U}_{\delta_2}(o)$ platí $g(a+h)\in\mathcal{U}_\varepsilon\big(g(a)\big)$, tzn. $g(a+h)-g(a)\in\mathcal{U}_\varepsilon(o)$. Položme

$$\mathcal{U}_\delta(o)=\mathcal{U}_{\delta_1}(o)\cap\mathcal{U}_{\delta_2}(o).$$

Pak pro každé $h\in\mathcal{U}_\delta(o)$ platí

$$g(a+h)-g(a)\in\mathcal{U}_\varepsilon(o),$$

lze tedy tento vektor dosadit do (3.2) za k. Po dosazení pak levá strana (3.2) je rovna

$$f\big(g(a)+k\big)-f\big(g(a)\big)=f\big(g(a+h)\big)-f\big(g(a)\big)=F(a+h)-F(a)$$

a pravá strana je vzhledem k (3.1) rovna

$$\begin{aligned}
&\nabla f\big(g(a)\big)\cdot\big(g(a+h)-g(a)\big)+\|g(a+h)-g(a)\|\cdot\eta_2\big(g(a+h)-g(a)\big)\\
&\quad=\nabla f\big(g(a)\big)\cdot\big(\nabla g(a)\cdot h+\|h\|\cdot\eta_1(h)\big)+\|g(a+h)-g(a)\|\cdot\eta_1\big(g(a+h)-g(a)\big)\\
&\quad=\nabla f\big(g(a)\big)\cdot\nabla g(a)\cdot h+\|h\|\cdot\nabla f\big(g(a)\big)\cdot\eta_1(h)+\|g(a+h)-g(a)\|\cdot\eta_1\big(g(a+h)-g(a)\big)\\
&\quad=:\nabla f\big(g(a)\big)\cdot\nabla g(a)\cdot h+\tau(h).
\end{aligned}$$

Zbývá dokázat, že

$$\lim_{h\to o}\frac{\|\tau(h)\|}{\|h\|}=0.$$

Pro každé $h\in\mathcal{U}_\delta(o)$ platí

$$\|g(a+h)-g(a)\|=\big\|\nabla g(a)\cdot h+\|h\|\cdot\eta_1(h)\big\|\le\|\nabla g(a)\|\cdot\|h\|+\|h\|\cdot\|\eta_1(h)\|$$

a

$$\|\tau(h)\| \leq \|h\| \cdot \|\nabla f(g(a))\| \cdot \|\eta_1(h)\| + \|g(a+h) - g(a)\| \cdot \|h\| \cdot \big(\|\nabla g(a)\| + \|\eta_1(h)\|\big).$$

Podělením této nerovnosti výrazem $\|h\|$ pak pro $h \to o$ dostáváme kýženou limitní rovnost.
□

Porovnáme-li levou a pravou stranu rovnosti z tvrzení Věty 3.40, dostáváme vzorce pro parciální derivace složek složeného zobrazení.

Důsledek 3.41. *Nechť platí předpoklady Věty 3.40. Označíme-li proměnné zobrazení g jako $x_1, \ldots, x_N$ a proměnné zobrazení f jako $y_1, \ldots, y_M$, pak*

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\big(g(a)\big) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$$

pro každé $k = 1, \ldots, R$ a $i = 1, \ldots, N$.

Poznamenejme, že pro $N = M = R = 1$ dostáváme tvrzení věty o derivaci složené funkce jedné proměnné.

3.5 Potenciál, rotace a divergence

Definice 3.42 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ má spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $D \subset \mathcal{D}(f)$. Pak zobrazení přiřazující každému bodu $x \in D$ gradient funkce f v tomto bodě budeme nazývat *gradientem funkce* f a značit $\operatorname{grad} f$ či ∇f.

Jak uvidíme dále, gradient funkce více proměnných je analogií k derivaci funkce jedné proměnné. Je třeba upozornit na fakt, že je-li $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, pak $\nabla f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, tzn. gradient je N-vektorová funkce N proměnných.

Definice 3.43 Nechť $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $D \subset \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(f)$ je otevřená množina. Řekneme, že F *je potenciálem funkce* f *na* D, jestliže

$$\forall x \in D : \ \nabla F(x) = f(x).$$

V tom případě také říkáme, že f *je potenciální na* D.

Poznámka 3.44

- Pojem potenciálu by někomu mohl připomínat primitivní funkci jedné proměnné. Skutečně, pro $N = 1$ tyto pojmy splývají (tedy za dodatečného předpokladu, že D je souvislá množina, což je v $\mathbb{R}$ právě interval).

- Podmínku z definice potenciálního pole lze vyjádřit také po složkách, tzn.

$$\forall i = 1, \ldots, N \ \forall x \in D : \ \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x).$$

Příklad 3.45 Uvažujme hmotný bod o hmotnosti M umístěný do počátku prostoru $\mathbb{R}^3$. Pak každý hmotný bod jednotkové hmotnosti je přitahován k hmotnému bodu v počátku silou o velikosti

$$F = \frac{G \cdot M \cdot 1}{r^2},$$

kde G je gravitační konstanta a r je vzdálenost od počátku, přitom směr této síly ukazuje k počátku. Je-li tedy $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x \neq o$, pak jednotkový vektor směřující z x směrem k počátku je roven

$$-\frac{x}{\|x\|} = \left(-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, -\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right).$$

Vektorová funkce, která každému hmotnému bodu jednotkové hmotnosti přiřazuje sílu, kterou je tento bod přitahován k počátku, má předpis

$$F(x) = F(x_1, x_2, x_3) = \frac{GM}{\|x\|^2} \cdot \frac{-x}{\|x\|} = -\frac{GMx}{\|x\|^3}.$$

Tato vektorová funkce má potenciál na $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$, což je funkce třech proměnných

$$\varphi(x) = \frac{GM}{\|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}.$$

Čtenáři je přenecháno ověření tohoto faktu. ◯

Věta 3.46.

(a) *Nechť $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je potenciálem vektorové funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ na množině $D \subset \mathcal{D}(f)$, $C \in \mathbb{R}$. Pak funkce $F + C$ je také potenciálem funkce f na D.*

(b) *Jsou-li $F, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ potenciály vektorové funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ na otevřené a souvislé množině, pak $F - G$ je konstantní na D.*

Důkaz. ad (a): Tvrzení plyne přímo z faktu

$$\nabla(F + C) = \nabla F + 0 = f$$

na D.
ad (b): Položme $V = F - G$ na D. Máme dokázat, že V je konstantní funkce na D. Podle předpokladů platí

$$\nabla V(x) = \nabla(F - G)(x) = \nabla F(x) - \nabla G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro každé $x \in D$, tzn. V má na D nulové všechny parciální derivace. Uvažujme dva libovolné body $a, b \in D$. Ze souvislosti a otevřenosti D plyne, že a a b lze spojit lomenou čarou ležící uvnitř D (viz Poznámku 2.69). Pro každou úsečku $\overline{a^{[k]}a^{[k+1]}}$ tvořící tuto lomenou čáru pak podle Věty 2.77 existuje $\theta_k \in (0, 1)$ tak, že

$$\begin{aligned} V(a^{[k+1]}) - V(a^{[k]}) &= \frac{\partial V}{\partial(a^{[k+1]} - a^{[k]})}\big(a^{[k]} + \theta_k(a^{[k+1]} - a^{[k]})\big) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(a^{[k]} + \theta_k(a^{[k+1]} - a^{[k]})\big) \cdot (a^{[k+1]} - a^{[k]}) = 0. \end{aligned}$$

Tedy nutně platí $V(a) = V(b)$. Odtud odvozujeme, že V je konstantní na D. □

Důsledek 3.47. *Má-li vektorová funkce* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *na otevřené souvislé množině* D *potenciál* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, pak všechny potenciály této funkce na* D *mají předpis* $F + C$*, kde* $C \in \mathbb{R}$ *je libovolná konstanta (tzn. potenciály ke stejné funkci na souvislé množině jsou stejné až na aditivní konstantu).*

Poznámka 3.48 V Důsledku 3.47 byl podstatný předpoklad souvislosti množiny D. Bez tohoto předpokladu by tvrzení neplatilo. Ukažme si to na protipříkladu. Uvažujme množinu $D = D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{R}^2$, kde

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \rho((x, y), (1, 0)) < 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \rho((x, y), (-1, 0)) < 1\}.$$

Zřejmě D není souvislá. Definujme na množině D dvě funkce $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisy

$$F(x) = 0, \quad x \in D, \qquad G(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in D_1, \\ 0 & \text{pokud } x \in D_2. \end{cases}$$

Pak platí

$$\nabla F(x) = \nabla G(x) = 0$$

pro každé $x \in D$. Tzn. obě funkce jsou potenciály k nulové vektorové funkci na množině D. Ovšem tyto funkce se neliší o aditivní konstantu. Problém byl právě v množině D.

Možná nás napadne otázka, co je potřeba k tomu, aby vektorová funkce byla potenciální. Nejprve si ukažme opačnou implikaci, tzn. důsledek potenciálnosti vektorové funkce.

Věta 3.49. *Nechť* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *má spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině* D*. Je-li* f *na* D *potenciální, pak*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

pro každé $x \in D$*,* $i, j = 1, \dots, N$*.*

Důkaz. Podle předpokladu existuje funkce $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ taková, že $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$, pro každé $x \in D$, $i = 1, \dots, N$, z čehož mimo jiné plyne, že F má spojité druhé parciální derivace. Podle Schwarzovy věty (Věta 2.107) pak jsou tyto derivace záměnné na D, tzn.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

pro každé $x \in D$, $i, j = 1, \dots, N$. □

Poznámka 3.50 Bohužel, podmínka rovnosti příslušných parciálních derivací z tvrzení Věty 3.49 je pouze nutná. Aby byla i postačující, je potřeba další předpoklad. Tím je tzv. *jednoduchá souvislost* množiny D. Přesnou definici jednoduché souvislosti množiny v $\mathbb{R}^N$ si uvádět nebudeme – potřebovali bychom k tomu jednoúčelově několik pojmů. Jednoduchou souvislost stačí chápat intuitivně. Množinu $D \subset \mathbb{R}^N$ nazveme jednoduše souvislou, jestliže každou uzavřenou křivku (tzn. křivku mající stejný počáteční a koncový bod) v D lze „spojitě zdeformovat v rámci množiny D do bodu“. Uveďme několik příkladů:

1. Okolí bodu v $\mathbb{R}^N$ je jednoduše souvislá množina.
2. Redukované okolí bodu v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^2$ není jednoduše souvislá množina, přitom v $\mathbb{R}^N$ pro $N > 2$ jednoduše souvislá je.
3. Mezikruží
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$$
není jednoduše souvislá množina. Ovšem analogický pojem „mezikoulí“, tzn. množina
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2\}$$
již jednoduše souvislá je.
4. Torus (tzn. duše od kola) není jednoduše souvislá množina.

Bez důkazu uveďme postačující podmínku potenciálnosti vektorové funkce.

Věta 3.51. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ má spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené a jednoduše souvislé množině D. Platí-li*
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$
pro každé $x \in D$, $i, j = 1, \ldots, N$, pak f je potenciální na D.

Příklad 3.52 Uvažujme vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 3\cos y \\ x^2 - 3x\sin y + 2y \end{pmatrix}.$$
Zjistěte, zda je f potenciální na $\mathbb{R}^2$ a pokud ano, určete její potenciál.

Řešení. Protože $\mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá množina a
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x - 3\sin y - (2x - 3\sin y) = 0,$$
pak podle Věty 3.51 je f potenciální na $\mathbb{R}^2$.

Tedy existuje funkce dvou proměnných $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že $\frac{\partial F}{\partial x} = f_1$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = f_2$ na $\mathbb{R}^2$. Zintegrováním první rovnosti podle x dostáváme
$$F(x,y) = \int f_1(x,y)\,\mathrm{d}x = \int 2xy + 3\cos y\,\mathrm{d}x = x^2y + 3x\cos y + C_1,$$
kde C_1 je „integrační konstanta vzhledem k x“ – je jasné, že C_1 může být závislá na y. Takže lepší je značit ji jako $C_1(y)$. Pak zderivováním poslední rovnosti podle y dostáváme
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3x\sin y + C_1'(y).$$
Porovnáním této parciální derivace s funkcí f_2 dostáváme podmínku
$$C_1'(y) = 2y.$$

Ta je splněna pro $C_1(y) = y^2 + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Dohromady tedy dostáváme

$$F(x,y) = x^2y + 3x\cos y + y^2 + C, \quad (x,y)^T \in \mathbb{R}^2,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolné. ○

Představme si další pojem, ovšem pouze pro $N = 3$.

Definice 3.53 Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má spojité parciální derivace. Pak vektorovou funkci $\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovanou předpisem

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^T$$

nazýváme *rotací vektorové funkce* f.

Příklad 3.54 Uvažujme funkci F z Příkladu 3.45. Snadno spočítáme, že $\operatorname{rot} F = o$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$. Fakt, že rotace této vektorové funkce je nulová plyne z potenciálnosti F a Věty 3.49.

Poznámka 3.55 S pomocí pojmu rotace lze tvrzení Věty 3.49 v $\mathbb{R}^3$ formulovat takto: *Je-li $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ potenciální pole na D, pak $\operatorname{rot} f = o$ na D.*

Poznámka 3.56 Fyzikální význam rotace můžeme částečně pochopit na následujícím příkladu. Uvažujme vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ popisující rychlostní pole či proud částic (vody, plynu) v nějaké nádobě či rouře. Uvažujme malou kuličku jejíž střed je pevně umístěn do bodu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (uvnitř této nádoby či roury), přitom proud může touto kuličkou libovolně otáčet. Pak $\operatorname{rot} f(x,y,z)$ udává rotaci této kuličky – směr $\operatorname{rot} f$ udává osu rotace i směr otáčení (s využitím pravidla pravé ruky – vzpomeňme si na vektorový součin z fyziky), velikost $\operatorname{rot} f$ zase odpovídá velikosti rychlosti otáčení.

Příklad 3.57 Uvažujme vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ danou předpisem

$$f(x,y,z) = (-y, x, 0)^T, \quad (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3,$$

viz Obrázek 3.8. Pak

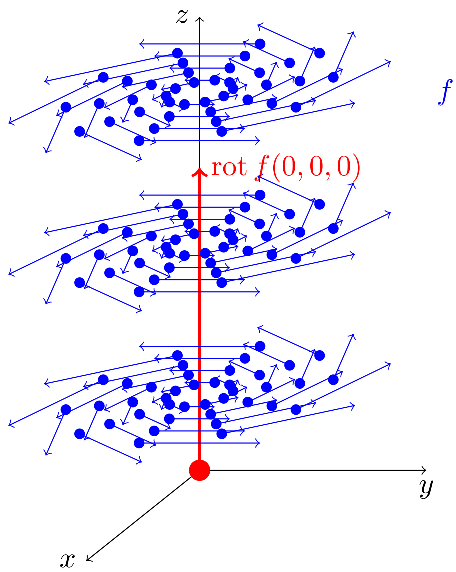
$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = (0,0,2), \quad (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3.$$

Definice 3.58 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ má spojité parciální derivace prvního řádu. Pak funkci $\operatorname{div} f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

nazýváme *divergencí vektorové funkce* f.

Poznámka 3.59 Divergence má užitečný fyzikální význam. Uvažujme vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ udávající rychlost změny teploty v každém bodě z nějaké množině $D \subset \mathbb{R}^3$. Pokud $\operatorname{div} f(a) > 0$ v nějakém $a \in D$, pak v bodě a se vyskytuje zářič tepla. Naopak, pokud $\operatorname{div} f(a) < 0$, v bodě a je teplo pohlcováno.



Obrázek 3.8: Funkční hodnoty funkce f z Příkladu 3.57 v některých bodech a rotace této funkce v počátku (červeně).

Poznámka 3.60 Mezi právě definovanými pojmy platí celá řada identit. Pro vektorové funkce $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a funkci třech proměnných $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mající spojité parciální derivace, platí

- $\operatorname{div}(fF) = (F, \nabla f) + f \cdot \operatorname{div} F$,
- $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + (\nabla f, F)$.

Dokažte!

Kapitola 4

Extrémy funkcí více proměnných

Podobně jako u funkce jedné proměnné tak i u funkcí více proměnných nás budou zajímat extremální hodnoty. Při definování pojmů se budeme dost inspirovat analogickými pojmy pro funkce jedné proměnné. Navíc nám zde kromě lokálních a globálních extrémů přibude pojem *vázaného lokálního extrému.*

4.1 Lokální extrémy

Pojem lokálního extrému již známe pro funkci jedné proměnné. Následující pojem je jeho přirozeným zobecněním.

Definice 4.1 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a *lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje $\mathcal{U}_\delta(a) \subset \mathcal{D}(f)$ tak, že

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(a)$$

$$\big(f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(a)\big).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a *ostré lokální maximum (minimum)*, jestliže existuje $\mathcal{R}_\delta(a) \subset \mathcal{D}(f)$ tak, že

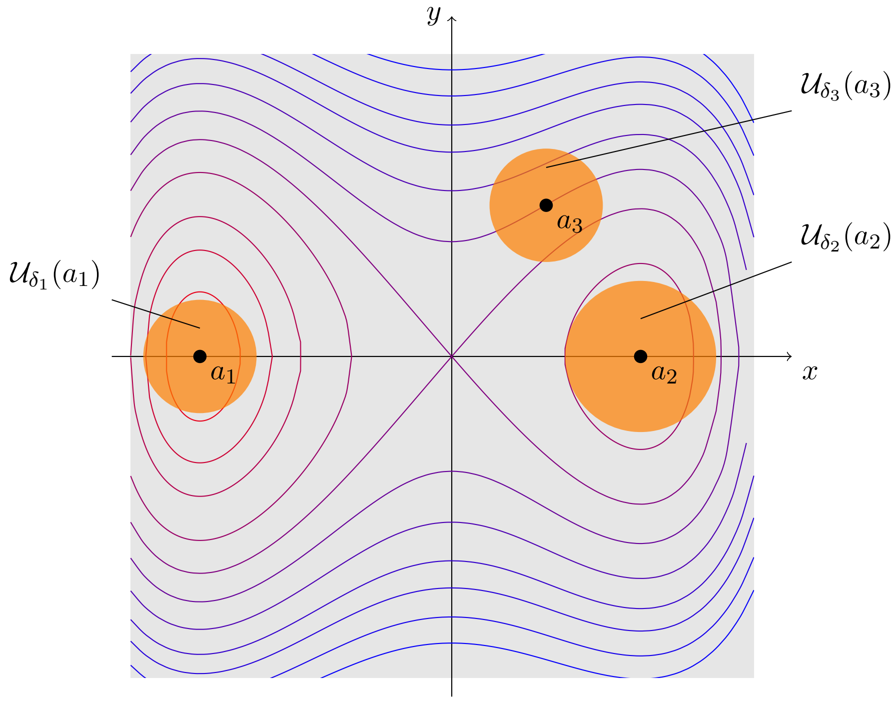
$$f(x) < f(a) \quad \forall x \in \mathcal{R}_\delta(a)$$

$$\big(f(x) > f(a) \quad \forall x \in \mathcal{R}_\delta(a)\big).$$

Souhrnně jim budeme říkat *(ostré) lokální extrémy*. Bod a nazýváme bodem *(ostrého) lokálního minima/maxima/extrému.*

Lokální extrémy si představíme velmi snadno – stačí si vzpomenout na Poznámku 2.10, kde daná funkce dvou proměnných x, y (jejíž graf a hladiny jsou na Obrázku 2.2) udává nadmořskou výšku v daném místě o souřadnicích (x, y).

Na Obrázku 4.1 jsou zobrazeny hladiny funkce společně s body a_1, a_2 a a_3 a jejich vybranými okolími. Podle barev hladin a s pomocí Obrázku 2.2 můžeme odhadnout, že daná funkce má v bodech a_1 a a_2 ostrá lokální maxima. Oproti tomu pro okolí bodu a_3 neplatí výrok z definice lokálního extrému. Je vidět, že v bodech z tohoto okolí, které „jsou nad hladinou funkce procházející bodem a_2“, má funkce menší funkční hodnoty než v tomto bodě a v bodech z tohoto okolí, které „jsou pod hladinou funkce procházející bodem a_2“, má funkce větší funkční hodnoty než v tomto bodě. A je snad také vidět, že toto platí i pro jakékoliv „menší“ okolí bodu a_3. Tedy v bodě a_3 nemá daná funkce lokální extrém.



Obrázek 4.1: Lokální extrémy funkce dvou proměnných.

Tyto pojmy jsou navíc zobecněním lokálních extrémů funkcí jedné proměnné.

Jak lokální extrémy hledat? Návod najdeme u funkcí jedné proměnné. Lokální extrémy jsme hledali tak, že jsme nejprve našli tzv. stacionární body (body s nulovou derivací) a pomocí znaménka druhé derivace, popř. derivací vyššího řádu jsme určili zda o jde či nejde o extrém. Podobně to bude u funkcí více proměnných.

Věta 4.2. *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ lokální extrém. Existuje-li $f'_{x_i}(a)$, kde $i \in \{1, \dots, N\}$, pak*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = f(a + te_i)$ pro $t \in \mathcal{U}_\varepsilon(0)$, kde $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$ je takové okolí $0 \in \mathbb{R}$, že platí

$$a + te_i \in \mathcal{D}(f) \quad \text{pro každé } t \in \mathcal{U}_\varepsilon(0).$$

Pak pro každé

$$\varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Stačí dokázat, že $\varphi'(0) = 0$. To ale plyne z faktu, že funkce φ má v bodě 0 lokální extrém (z Fermatovy věty, viz [13, Věta 7.30]). □

Asi nás nepřekvapí následující definice.

Definice 4.3 Mějme $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že a je *stacionární bod funkce* f, jestliže existují všechny parciální derivace $f'_{x_i}(a)$ a pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Vybaveni novým pojmem, můžeme vyslovit následující tvrzení plynoucí okamžitě z Věty 4.2.

Důsledek 4.4 (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Každý bod lokálního extrému, ve kterém existují všechny parciální derivace prvního řádu, je stacionárním bodem.*

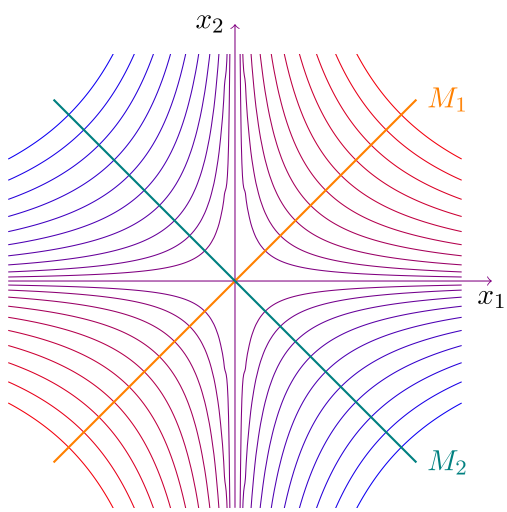
Poznámka 4.5 Opačná implikace k implikaci z Důsledku 4.4 již neplatí. Například počátek $o = (0, 0)$ je stacionárním bodem funkce

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

a přitom není bodem lokálního extrému této funkce. Dokažme to. Uvažujme množinu

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1 = x_2\},$$

což je přímka procházející počátkem, viz Obrázek 4.2. Pak pro každé $(x_1, x_2) \in M_1$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$



Obrázek 4.2: Hladiny funkce f a množiny M_i z Poznámky 4.5.

platí

$$f(x_1, x_2) = x_2 \cdot x_2 = x_2^2 > 0 = f(0, 0).$$

Tedy v každém redukovaném okolí bodu $(0, 0)$ nabývá funkce kladných hodnot a přitom v bodě $(0, 0)$ je funkce nulová. Odtud vidíme, že f v bodě $(0, 0)$ nenabývá svého lokálního maxima. Uvažujme druhou množinu

$$M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1 = -x_2\},$$

což je opět přímka procházející počátkem, viz Obrázek 4.2. Pak pro každé $(x_1, x_2) \in M_1$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ platí

$$f(x_1, x_2) = (-x_2) \cdot x_2 = -x_2^2 < 0 = f(0, 0).$$

Tedy v každém redukovaném okolí bodu $(0,0)$ nabývá funkce záporných hodnot a přitom v bodě $(0,0)$ je funkce nulová. Odtud vidíme, že f v bodě $(0,0)$ nenabývá ani svého lokálního minima.

Podobně jako u funkce jedné proměnné musíme nějakým způsobem zjistit, zda je stacionární bod také hledaným lokálním extrémem – k tomu nám poslouží diferenciály vyšších řádů. Budeme se pro jednoduchost zabývat zejména druhým diferenciálem (viz Definici 2.111) – což je kvadratická forma.

Ve stručnosti si nadefinujeme a osvětlíme některé pojmy z teorie kvadratických forem, které budou pro náš další výklad podstatné.

Definice 4.6 Řekneme, že kvadratická forma $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je

- *pozitivně definitní*, jestliže $q(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$,
- *negativně definitní*, jestliže $q(x) < 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$,
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $q(x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N$,
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $q(x) \leq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N$,
- *indefinitní*, jestliže existují x, $y \in \mathbb{R}^N$ tak, že $q(x) > 0$ a $q(y) < 0$,

Poznámka 4.7

(a) Vidíme tedy, že kvadratická forma je

- pozitivně definitní právě tehdy, když nabývá pouze kladných hodnot – s jedinou výjimkou, kterou je nulový vektor,
- negativně definitní právě tehdy, když nabývá pouze kladných hodnot – s jedinou výjimkou, kterou je nulový vektor,
- indefinitní právě tehdy, když nabývá v nějaké vektoru zápornou a v nějakém vektoru kladnou funkční hodnotu.

Kvadratická forma, která je pozitivně semidefinitní a zároveň není pozitivně definitní, nabývá právě nezáporných hodnot, přitom pro nějaký nenulový vektor nabývá nulové hodnoty. Podobně to platí pro negativně semidefinitní formy. Např. nulová kvadratická forma je pozitivně i negativně semidefinitní současně.

(b) Z definice kvadratické formy plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}^N$, $c \in \mathbb{R}$ platí

$$q(cx) = c^2 q(x).$$

Odtud se dá jednoduše dokázat, že například q je pozitivně definitní právě tehdy, když $q(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ splňující $\|x\| = 1$. Podobně to platí pro ostatní pojmy.

Z Poznámky 2.26 mimo jiné víme, že kvadratická forma $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je jednoznačně daná *symetrickou* maticí A typu $N \times N$ tak, že

$$q(x) = (xA, x) = xAx^T, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Proto možná nepřekvapí následující definice.

Definice 4.8 Řekneme, že symetrická matice A typu $N \times N$ je

- *pozitivně definitní*, jestliže $(xA, x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$,
- *negativně definitní*, jestliže $(xA, x) < 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$,
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $(xA, x) \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N$,
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $(xA, x) \leq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N$,
- *indefinitní*, jestliže existují $x, y \in \mathbb{R}^N$ tak, že $(xA, x) > 0$ a $(yA, y) < 0$,

Poznámka 4.9 Je to zřejmé, ale lépe to zdůraznit: Z Definice 4.6 a 4.8 je vidět, že kvadratická forma je pozitivně definitní (negativně definitní; pozitivně semidefinitní; negativně semidefinitní; indefinitní), je-li takový její reprezentant.

Ověřovat definitnost symetrické matice podle definice nemusí být zrovna nejjednodušší – existuje následující snadno použitelné kritérium.

Věta 4.10 (Sylvesterovo kritérium)**.** *Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N \times N}$ je symetrická čtvercová matice typu $N \times N$. Označme*

$$\triangle_1 = a_{11},\ \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \triangle_N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}.$$

Pak matice A je

- *pozitivně definitní právě tehdy, když $\triangle_1 > 0$, $\triangle_2 > 0$, $\ldots$, $\triangle_N > 0$,*
- *negativně definitní právě tehdy, když $\triangle_1 < 0$, $\triangle_2 > 0$, $\ldots$, $\triangle_N(-1)^N > 0$,*
- *indefinitní, pokud není ani pozitivně definitní ani negativně definitní a přitom platí $\triangle_N \neq 0$ (tzn. A je regulární matice).*

Poznámka 4.11 Sylvestrovo kritérium nám tedy dává velmi efektivní způsob určování definitnosti symetrické matice. Stačí vypočítat příslušné subdeterminanty $\triangle_i$ pro $i = 1, \ldots, N$. Přitom, pokud všechna tato čísla jsou kladná, můžeme usoudit na pozitivní definitnost matice. Pokud $\triangle_1 < 0$ a pak $\triangle_i$ pravidelně mění znaménko, je matice negativně definitní. Pokud čísla $\triangle_i$ netvoří ani jeden z těchto vzorů a navíc A je regulární matice, usoudíme na indefinitnost matice. Zbývající možnost, tzn. pokud je matice A singulární, v této větě diskutována není – v tom případě nemůže být matice pozitivně ani negativně definitní.

Příklad 4.12 Určete definitnost následujících kvadratických forem:

(a) $q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,

(b) $q_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$,

(c) $q_3(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$,

(d) $q_4(x_1, x_2) = x_1 x_2$,

(e) $q_5(x_1, x_2) = x_1^2$,

(f) $q_6(x_1, x_2) = -x_1^2$.

Řešení. V těchto úlohách je vždy zásadní určit reprezentanta kvadratické formy. Na Obrázku 4.3 pak jsou části grafů jednotlivých kvadratických forem.
ad (a): Platí

$$q_1(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

tedy reprezentant je matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejme $\triangle_i$ ze Sylvesterova kriteria:

$$\triangle_1 = 1 > 0, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Podle něj pak matice a tedy i kvadratická forma q_1 je pozitivně definitní.
ad (b): Reprezentant kvadratické formy q_2 je matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a následně

$$\triangle_1 = 1 > 0, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Podle Sylvesterova kritéria (Věta 4.10) pak jde o indefinitní matici tedy i indefinitní kvadratickou formu.
ad (c): Pro reprezentanta a $\triangle_i$ platí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \triangle_1 = -1 < 0, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Podle Sylvesterova kritéria (Věta 4.10) pak jde o negativně definitní matici tedy i negativně definitní kvadratickou formu.
ad (d): Pro reprezentanta a $\triangle_i$ platí

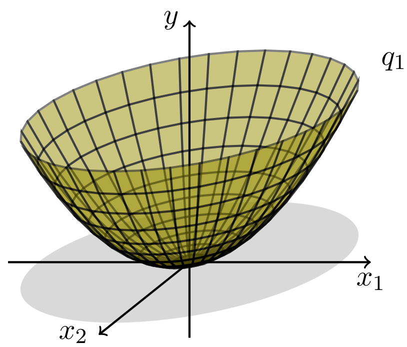
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \triangle_1 = 0, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0.$$

To ukazuje na indefinitnost kvadratické formy q_4.
ad (e): Zde opět dostáváme reprezentanta a $\triangle_i$ následující

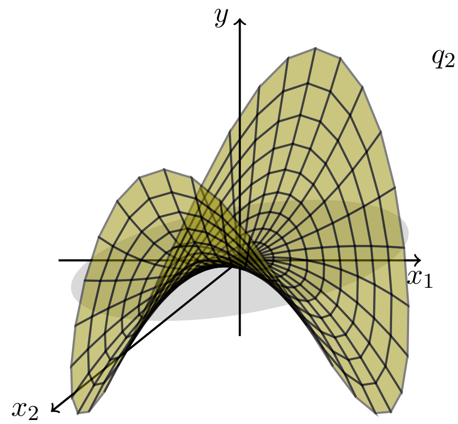
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \triangle_1 = 1, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sylvestrovo kritérium (Věta 4.10) nám nedává odpověď na otázku definitnosti matice. Z předpisu formy q_5 ale snadno vidíme, že nabývá pouze nezáporných hodnot. Protože pro nenulový vektor $x = (0, 1)$ máme $q_5(x) = 0$, zřejmě jde o pozitivně semidefinitní formu, která není pozitivně definitní.
ad (f): Zde opět dostáváme reprezentanta a $\triangle_i$ následující

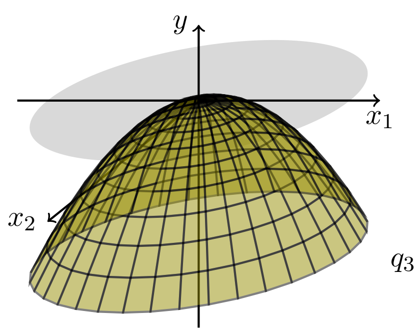
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \triangle_1 = 0, \quad \triangle_2 = 0.$$



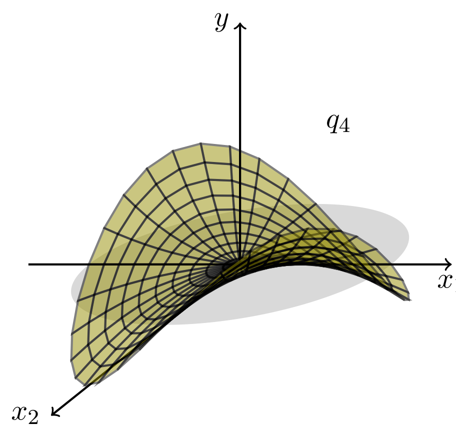
(a) Graf restrikce funkce q_1 na jednotkový kruh.



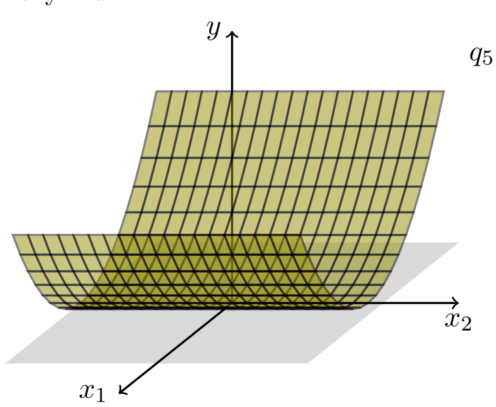
(b) Graf restrikce funkce q_2 na jednotkový kruh.



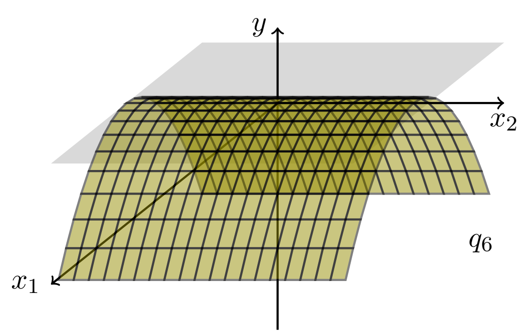
(c) Graf restrikce funkce q_3 na jednotkový kruh.



(d) Graf restrikce funkce q_4 na jednotkový kruh.



(e) Graf restrikce funkce q_5 na interval $[-1,1] \times [-1,1]$.



(f) Graf restrikce funkce q_6 na interval $[-1,1] \times [-1,1]$.

Obrázek 4.3: Části grafů funkcí z Příkladu 4.12.

Sylvestrovo kritérium (Věta 4.10) nám opět nedává odpověď na otázku definitnosti matice. Z předpisu formy q_6 ale snadno vidíme, že nabývá pouze nekladných hodnot. Protože pro nenulový vektor $x = (1, 0)$ máme $q_6(x) = 0$, zřejmě jde o negativně semidefinitní formu, která není negativně definitní. ◯

Poznámka 4.13 Další možností určení definitnosti symetrické matice je pomocí jejích vlastních čísel. Vlastní čísla čtvercové matice typu $N \times N$ jsou definována jako řešení rovnice

$$\det(A - x \cdot I) = 0$$

o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ (kde I je jednotková matice typu $N \times N$). Z definice determinantu je přitom hned vidět, že vlastní čísla jsou kořeny jistého polynomu stupně N. Např. pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jde o rovnici $(1 - x)^2 = 0$, která má jen jeden dvojnásobný kořen 1. Tato matice má tedy jediné vlastní číslo, což je 1. Obecně, kořeny polynomu s reálnými koeficienty mohou mít i komplexní kořeny, tzn. vlastní čísla nemusejí být reálná. Dá se ale dokázat, že *symetrické* matice mají vlastní čísla pouze reálná. Nyní se podívejme, jak souvisejí vlastní čísla s definitností symetrických matic. Platí tvrzení: Symetrická matice A je

- pozitivně definitní právě tehdy, když má pouze kladná vlastní čísla,
- negativně definitní právě tehdy, když má pouze záporná vlastní čísla,
- pozitivně semidefinitní právě tehdy, když 0 je vlastní číslo a ostatní vlastní čísla jsou kladná,
- negativně semidefinitní právě tehdy, když 0 je vlastní číslo a ostatní vlastní čísla jsou záporná
- indefinitní právě tehdy, když má alespoň jedno kladné a jedno záporné vlastní číslo.

K důkazu důležité Věty 4.15 budeme potřebovat jistou vlastnost symetrických pozitivně definitních matic.

Lemma 4.14. *Nechť A je pozitivně definitní matice typu $N \times N$. Pak existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tak, že každá symetrická matice $B \in \mathfrak{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$, pro kterou platí*

$$\|A - B\| < \varepsilon,$$

je také pozitivně definitní ($\|\cdot\|$ je maticová norma definována v Příkladu 1.39).

Důkaz. Nechť A je pozitivně definitní matice. To je ekvivalentní s tím, že $(xA, x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ takové, že $\|x\| = 1$ – viz Poznámku 4.7(b). Protože, kvadratická forma $q(x) = (xA, x)$ je spojitá na kompaktní množině

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N ; \|x\| = 1\},$$

nabývá q na K svého minima, označme ho ε, tzn.

$$q(x) \geq \varepsilon > 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ takové, že $\|x\| = 1$. Pro každou čtvercovou matici B a vektor $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\| = 1$ platí

$$\begin{aligned}|(xB,x) - (xA,x)| = |(xB - xA, x)| = \big|\big(x(B-A), x\big)\big| &\le \|x(B-A)\| \cdot \|x\| \\ &\le \|B-A\| \cdot \|x\|^2 = \|B-A\|.\end{aligned}$$

Následně pro každou symetrickou matici B, pro niž $\|A - B\| < \varepsilon$ a $x \in \mathbb{R}^N$, pro které $\|x\| = 1$, platí

$$(xB,x) = (xB,x) - (xA,x) + (xA,x) \ge -|(xB,x) - (xA,x)| + (xA,x) > -\varepsilon + \varepsilon = 0.$$

Podle Poznámky 4.7(b) je B je pozitivně definitní matice. □

Lemma 4.14 vlastně říká následující: Uvažujeme-li normovaný lineární prostor všech symetrických matic typu $N \times N$ s maticovou normou z Příkladu 1.39, pak její podmnožina všech pozitivně definitních matic je otevřená. Otevřená je i množina všech negativně definitních matic a indefinitních matic – dokažte! Oproti tomu, množina všech pozitivně semidefinitních matic ani množina všech negativně semidefinitních matic v tomto prostoru otevřená není.

Nyní se vraťme zpět k lokálním extrémům. Ukažme si jeden ze způsobů jak rozhodnout o tom, zda stacionární bod je či není bodem lokálního extrému.

Věta 4.15 (postačující podmínky lokálního extrému)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ je stacionární bod funkce f a funkce f má na nějakém okolí bodu a spojité všechny parciální derivace druhého řádu. Platí*

(a) je-li $\mathrm{d}^2 f(a)$ pozitivně definitní, pak f má v bodě a ostré lokální minimum,

(b) je-li $\mathrm{d}^2 f(a)$ negativně definitní, pak f má v bodě a ostré lokální maximum,

(c) je-li $\mathrm{d}^2 f(a)$ indefinitní, pak f nemá v bodě a lokální extrém.

Důkaz. ad (a): Podle předpokladu je $\mathrm{d}^2 f(a)$ pozitivně definitní, tedy je pozitivně definitní i Hessova matice $\nabla^2 f(a)$. Pak podle Lemmatu 4.14 k Hessově matici $\nabla^2 f(a)$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že každá symetrická matice B splňující $\|A - B\| < \varepsilon$ je pozitivně definitní. Ze spojitosti parciálních derivací funkce f v bodě a plyne existence $\mathcal{U}_{\delta_1}(a)$ takového, že pro každé $x \in \mathcal{U}_{\delta_1}(a)$ platí

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| < \frac{\varepsilon}{N}.$$

Tedy pro každé $x \in \mathcal{U}_{\delta_1}(a)$ platí

$$\left\|\nabla^2 f(a) - \nabla^2 f(x)\right\| < \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^2} = \sqrt{N^2 \frac{\varepsilon^2}{N^2}} = \varepsilon.$$

Odtud tedy vidíme, že $\mathrm{d}^2 f(x)$ je pro každé $x \in \mathcal{U}_{\delta_1}(a)$ pozitivně definitní. Podle předpokladu existuje okolí $\mathcal{U}_{\delta_2}(a)$, na kterém má funkce f spojité derivace druhého řádu. Podle Taylorovy věty (Věta 2.116) pro každé $h \in \mathbb{R}^N$, takové, že $a + h \in \mathcal{R}_{\delta_2}(a)$ existuje $\tau \in (0,1)$ splňující

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a + \tau h)(h).$$

Využili jsme přitom předpokladu, že bod a je stacionárním bodem funkce f. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak pro každé $h \in \mathbb{R}^N$ takové, že $a + h \in \mathcal{R}_\delta(a)$ platí

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2 f(a+\tau h)(h) > 0,$$

tzn. pro každé $x \in \mathcal{R}_\delta(a)$ platí $f(x) > f(a)$. Tedy f má v bodě a ostré lokální minimum. Ostatní případy se dokáží podobně. □

Poznámka 4.16

- K určení lokálního extrému nám tedy stačí ukázat pozitivní nebo negativní definitnost druhého diferenciálu (což je kvadratická forma). Pokud je ovšem pouze semidefinitní, Věta 4.15 nám nepomůže a musíme si poradit jinak.
- Všimněte si, že Věta 4.15 nám pomůže k odhalení pouze *ostrých* lokálních extrémů.

Příklad 4.17 Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(4-x-y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Řešení. Přirozený definiční obor této funkce je celé $\mathbb{R}^2$, tzn. hledejme lokální extrémy v celé rovině. Zřejmě funkce f má také všude spojité parciální derivace (všech řádů), takže podle Důsledku 4.4 hledejme stacionární body funkce f. Řešíme soustavu rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 2xy - y^2 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - x^2 - 2xy = 0,$$

kterou lze upravit na

$$y(4-2y-y) = 0, \qquad \text{(I)}$$
$$x(4-x-2y) = 0. \qquad \text{(II)}$$

Z (I) plyne, že buď (a) $y = 0$ nebo (b) $4 - 2x - y = 0$.
ad (a): Nechť $y = 0$. Dosazením do (II) dostáváme

$$x(4-x) = 0.$$

Odtud plyne, že $x = 0$ nebo $x = 4$. Dostáváme tak dva stacionární body

$$a_1 = (0,0), \quad a_2 = (4,0).$$

ad (b): Pak $y = 4 - 2x$. Dosazením do (II) po úpravě dostáváme

$$x(3x-4) = 0,$$

tedy $x = 0$ nebo $x = \frac{4}{3}$. Dostáváme další dva stacionární body

$$a_3 = (0,4), \quad a_4 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Nyní určíme pomocí druhého diferenciálu, zda jsou nalezené stacionární body body lokálního extrému či nikoliv. Nejprve určíme Hessovu matici funkce f v obecném bodě (x, y). Platí

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 4-2x-2y \\ 4-2x-2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\nabla^2 f(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a v souladu se značením Sylvesterova kritéria (Věta 4.10) platí

$$\triangle_1 = 0 \quad \text{a} \quad \triangle_2 = -16 \neq 0.$$

Tedy podle tohoto kritéria je Hessova matice a následně i druhý diferenciál v tomto bodě indefinitní. Z Věty 4.15 plyne, že f v bodě a_1 *nemá* lokální extrém.
Dále platí

$$\nabla^2 f(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix},$$

kde opět s využitím značení ze Sylvesterova kritéria máme

$$\triangle_1 = 0, \quad \triangle_2 = -16 \neq 0.$$

Opět je druhý diferenciál v bodě a_2 indefinitní. A z Věty 4.15 plyne, že ani v bodě a_2 nemá funkce f lokální extrém.

Dále máme

$$\nabla^2 f(a_3) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zde s použitím Sylvesterova kritéria máme $\triangle_1 = -8 < 0$ a $\triangle_2 = -16 < 0$, tedy $\nabla^2 f(a_3)$ a následně $\mathrm{d}^2 f(a_3)$ je opět indefinitní. Opět podle Věty 4.15 nemá funkce v a_3 lokální extrém.

Zbývá poslední bod a_4. Platí

$$\nabla^2 f(a_4) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Protože $\triangle_1 = -\frac{8}{3} < 0$ a $\triangle_2 = \frac{48}{9} > 0$, podle Sylvesterova kriteria je matice $\nabla^2 f(a_4)$ negativně definitní. Tedy je negativně definitní i kvadratická forma $\mathrm{d}^2 f(a_4)$ a podle Věty 4.15 má funkce f v bodě a_4 ostré lokální maximum. ○

Příklad 4.18 Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Řešení. Definičním oborem této funkce je $\mathbb{R}^3$, přitom je jasné, že má v každém bodě spojité parciální derivace všech řádů. Hledejme nejprve stacionární body této funkce. Řešíme soustavu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 1 = 0.$$

Tuto soustavu snadno vyřešíme. Z poslední rovnice okamžitě určíme $z = -\frac{1}{2}$, z druhé dostáváme $y = -6x$, což můžeme dosadit do rovnice první, odkud máme $3x^2 - 72x = 0$. Tato rovnice má dvě řešení $x_1 = 0$ a $x_2 = 24$. Odtud dostáváme $y_1 = 0$ a $y_2 = -144$. Dostáváme tak dva stacionární body

$$a_1 = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{a} \quad a_2 = \left(24, -144, -\frac{1}{2}\right).$$

Hessova matice v obecném bodě má tvar

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Konkrétně pak pro a_1 platí

$$\nabla^2 f(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ke zjištění definitnosti Hessovy matice použijme opět Sylvesterovo kritérium (Věta 4.10). Protože

$$\triangle_1 = 0, \quad \triangle_2 = -144, \quad \triangle_3 = -288 \neq 0,$$

jde o indefinitní matici, což znamená, že f nemá v bodě a_1 lokální extrém.
Podívejme se nyní na bod a_2. Pak

$$\nabla^2 f(a_2) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

odkud vidíme, že

$$\triangle_1 = 144 > 0, \quad \triangle_2 = 144 > 0, \quad \triangle_3 = 288 > 0$$

a podle Sylvesterova kritéria dostáváme pozitivní definitnost. Funkce f tak nabývá v bodě a_2 ostrého lokálního minima. ○

Nabízí se otázka, co nastane, je-li $\mathrm{d}^2 f(a) = 0$, popř. jsou-li takové i diferenciály vyšších řádů. Podobně jako u funkce jedné proměnné platí následující věta.

Věta 4.19 (postačující podmínky lokálního extrému). *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ je stacionární bod funkce f takový, že*

$$\mathrm{d}^2 f(a) = 0, \ \ \mathrm{d}^3 f(a) = 0, \ \ \ldots, \ \ \mathrm{d}^{m-1} f(a) = 0,$$

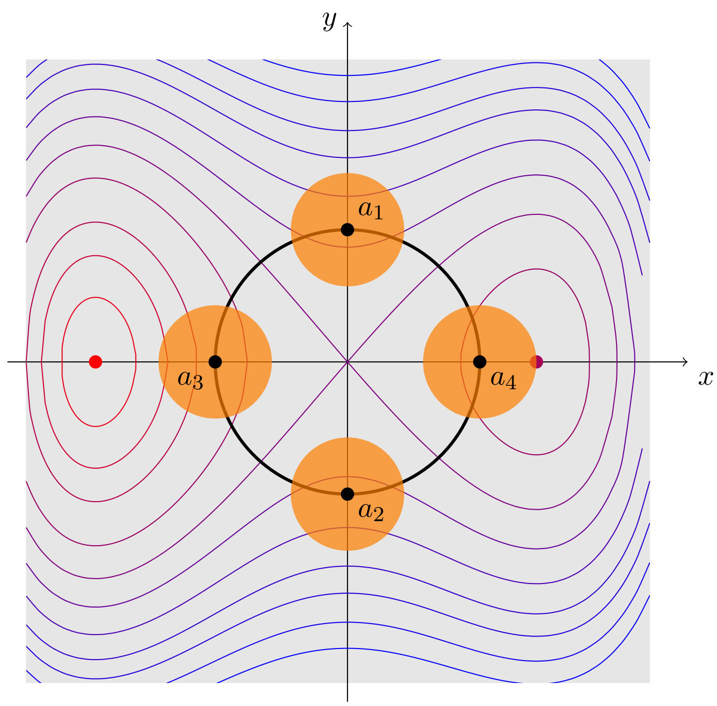
funkce f má na nějakém okolí $\mathcal{U}(a)$ spojité všechny parciální derivace až do m-tého řádu. Platí

- *je-li m liché, pak f nemá v bodě a lokální extrém,*
- *je-li m sudé, pak*
  - *je-li $\mathrm{d}^m f(a)$ pozitivně definitní, pak f má v bodě a ostré lokální minimum,*
  - *je-li $\mathrm{d}^m f(a)$ negativně definitní, pak f má v bodě a ostré lokální maximum,*
  - *je-li $\mathrm{d}^m f(a)$ indefinitní, pak f nemá v bodě a lokální extrém.*

Poznámka 4.20 Ve Větě 4.19 se objevil pojem definitnosti a indefinitnosti formy $\mathrm{d}^m f(a)$. To je podobné jako pro kvadratickou formu, tzn. o $\mathrm{d}^m f(a)$ řekneme, že je pozitivně definitní, pokud pro každé $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$ platí $\mathrm{d}^m f(a)(h) > 0$. Mimochodem, přímo z definice lze dokázat, že každá nenulová forma *lichého* stupně je indefinitní.

4.2 Vázané lokální extrémy

Uvažujme funkci jejíž graf a hladiny jsou vyobrazeny na Obrázku 2.2. Představme si nyní, že je vytvořena závodní dráha, která, zaznačena v „mapě“, tvoří kružnici – viz Obrázek 4.4. Mohl by nás zajímat tzv. výškový profil této dráhy, zejména pak, ve kterých bodech této cesty dosáhne závodník lokálního minima či maxima. Vzhledem k načrtnutým vrstevnicím se dá vcelku snadno uhodnout, že extremálních hodnot v rámci této dráhy dosáhnou závodníci v bodech o souřadnicích $a_1, \dots, a_4$, přičemž „lokálního minima“ je dosaženo v bodech a_1 a a_2 a „lokálního maxima“ je dosaženo v bodech a_3 a a_4. Všimněte si ale, že ani jeden z těchto bodů není bodem lokálního extrému funkce. Důvodem je fakt, že v našem vnímání extrémů se omezujeme právě na vyznačenou kružnici. To nás vede k následujícímu pojmu.



Obrázek 4.4: Lokální extrémy funkce dvou proměnných.

Definice 4.21 Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A$. Řekneme, že f má v bodě a *vázané lokální maximum (minimum) vzhledem k množině* A, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{U}(a) \cap A$ platí

$$f(x) \leq f(a) \qquad \big(f(x) \geq f(a)\big).$$

Podobně definujeme *vázané ostré lokální maximum (minimum)*, kde nahradíme okolí redukovaným okolím a neostrou nerovnost ostrou nerovností.

Vyšetřování vázaných lokálních extrémů se odvíjí od toho, jak je zadána množina A z Definice 4.21. Uvažujme dva případy:

- *parametricky:* množina A je zadána jako obor hodnot nějaké N-vektorové funkce – jejím proměnným říkáme parametry,
- *implicitně:* množina A je zadána jako množina všech řešení jedné rovnice či soustavy rovnic o N neznámých.

Příklad 4.22 Jednotkovou kružnici lze zadat parametricky i implicitně. Implicitní zadání je notoricky známé

$$K\big((0,0),1\big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Tedy jednotková kružnice je daná jako množina bodů (x, y), které jsou řešením jedné rovnice o dvou neznámých. Každému absolventu střední školy je ale známo i parametrické zadání (vlastně se tímto způsobem geometricky definují goniometrické funkce), tzn.

$$K\big((0,0),1\big) = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ t \in \mathbb{R}\},$$

kde právě proměnné t říkáme parametr.

4.2.1 Parametrické zadání množiny A

Tento případ je jednodušší na teorii i použití. Základní myšlenka spočívá v definování pomocné funkce, jejíž proměnné jsou parametry, kterými byla A zadaná. Lokální extrémy (i jejich typ) této pomocné funkce splývá s vázanými lokálními extrémy původní funkce vzhledem k množině A. Tuto myšlenku ilustrujme na několika příkladech.

Příklad 4.23 Určete vázané lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

vzhledem k množině

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x = 3t, y = t + 2, t \in \mathbb{R}\}.$$

Řešení. Množina A je přímka a jde o jednoparametrickou množinu. Uvažujme pomocnou funkci

$$g(t) = f(3t, t+2) = 11t^2 + 8t + 8, \quad t \in \mathbb{R},$$

což je funkce jedné reálné proměnné t. Zdůrazněme, že má-li g lokální extrém v bodě t, pak funkce f má v bodě $(3t, t+2)$ vázaný lokální extrém vzhledem k množině A – a to stejného typu. Najdeme tedy lokální extrémy funkce g. Platí

$$g'(t) = 22t + 8, \quad g''(t) = 22.$$

Funkce g má v bodě $t = -\frac{4}{11}$ lokální minimum. Tedy funkce f má vzhledem k množině A vázané lokální minimum v bodě

$$(x,y) = \left(-\frac{12}{11}, \frac{7}{11}\right).$$

Protože funkce g nemá lokální maxima, nemá ani f vázané lokální maximum vzhledem k množině A. ◯

Příklad 4.24 Vyšetřete vázaný lokální extrém funkce

$$f(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

vzhledem k množině

$$A = \{(\cos t, \sin t) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Řešení. Vidíme, že A je opět daná parametricky a mimochodem jde o jednotkovou kružnici. Definujme pomocnou funkci

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cdots = \frac{1}{2}\sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pak $g'(t) = \cos 2t$, $t \in \mathbb{R}$ a $g'(t) = 0$ právě tehdy, když

$$2t = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

tzn.

$$t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože $g''(t) = -2\sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$, pak

$$g''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -2(-1)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vzhledem k tomu, že nás zajímají funkční hodnoty funkce g pouze na nějakém intervalu délky 2π, určíme druhou derivaci jen v následujících čtyřech bodech

$$g''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 < 0, \quad g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 > 0, \quad g''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 < 0, \quad g''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2 > 0.$$

Odtud usuzujeme, že funkce g má ostrá lokální maxima v bodech $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{5\pi}{4}$ a ostrá lokální minima v bodech $\frac{3\pi}{4}$ a $\frac{7\pi}{4}$. Proto funkce f nabývá vzhledem k množině A vázané ostré lokální maximum v bodech

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{a} \quad \left(\cos\frac{5\pi}{4}, \sin\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

a vázané ostré lokální minimum v bodech

$$\left(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{a} \quad \left(\cos\frac{7\pi}{4}, \sin\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \qquad \bigcirc$$

Příklad 4.25 Určete vázané lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

vzhledem k množině

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z = x - y\}.$$

Řešení. Nejprve si všimněme, že nyní hledáme vázané lokální extrémy funkce tří proměnných a množina A je již podmnožinou $\mathbb{R}^3$. Zadání množiny A je vlastně implicitní. Ovšem toto zadání je tak jednoduché, že ho lze chápat i jako parametrické, kde parametry jsou přímo proměnné x a y, tzn. lze také psát

$$A = \{(x, y, x - y) \; ; \; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Úlohu tak převedeme na hledání lokálního extrému pomocné funkce $g(x, y) = f(x, y, x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Protože

$$g(x, y) = 4x^2 - 2xy + 3y^2,$$

pak

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 8x - 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2x + 6y,$$

odkud okamžitě vypočteme, že jediný stacionární bod funkce g je $(0, 0)$. Protože pro Hessovu matici funkce g v tomto bodě, tj. pro matici

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

platí $\triangle_1 = 8 > 0$ a $\triangle_2 = 44 > 0$, je podle Sylvesterova kritéria tato matice pozitivně definitní. Podle Věty 4.15 má funkce g v bodě $(0, 0)$ ostré lokální minimum. Odtud již plyne, že funkce f má v bodě $(0, 0, 0)$ vzhledem k množině A ostré vázané lokální minimum. ◯

4.2.2 Implicitní zadání množiny A

Nyní se podívejme na případ, ve kterém je množina A zadána implicitně, tzn. ve tvaru

$$A = \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; g_1(x) = 0, \; g_2(x) = 0, \; \dots, \; g_M(x) = 0\}, \tag{4.1}$$

kde $g_1, \dots, g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jsou funkce, $M \leq N$. Množina A je tedy průnikem 0-hladin funkcí $g_1, \dots, g_M$.

Následující věta nám dává návod, jak hledat vázané lokální extrémy *metodou Lagrangeových multiplikátorů.* Ačkoliv je tvrzení věty na první pohled trochu složitější, základní myšlenka je jednoduchá – body vázaných extrémů budou takové body z množiny A, ve kterých bude gradient funkce f (tedy funkce jejíž extrém hledáme) lineární kombinací gradientů funkcí $g_1, \dots, g_M$ v tomto bodě – viz dále Příklad 4.28 (zejména Obrázek 4.5).

Věta 4.26 (o Lagrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť mají funkce $f, g_1, \dots, g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ($1 \le M \le N$) spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $D \subset \mathbb{R}^N$ a v každém bodě z množiny D má matice*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_M}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_M}{\partial x_N} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

hodnost rovnu M (tedy maximální hodnost). Uvažujme množinu A definovanou v (4.1) *tak, že $A \subset D$. Má-li funkce f v bodě $a \in A$ lokální extrém vzhledem k množině A, pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \nabla g_j(a). \tag{4.3}$$

Poznámka 4.27 Matice z (4.2) je vlastně Jacobiho matice vektorové funkce $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, jejíž složky jsou po řadě funkce $g_1, \dots, g_M$.

Místo důkazu (který lze nalézt např. v [3]) si ilustrujme použití této věty na následujícím příkladu.

Příklad 4.28 Nalezněte vázané lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

vzhledem k množině

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x^2 + y^2 = 1\}.$$

Řešení. Řešení této úlohy lze uhádnout. Na Obrázku 4.5 vidíme některé hladiny funkce f a množinu A (zeleně), což je 0-hladina funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Podle hladin funkce f je vidět, že vzhledem k množině A nabývá funkce f svých největších hodnot v bodech

$$a_1 = (0, 1), \quad a_2 = (0, -1)$$

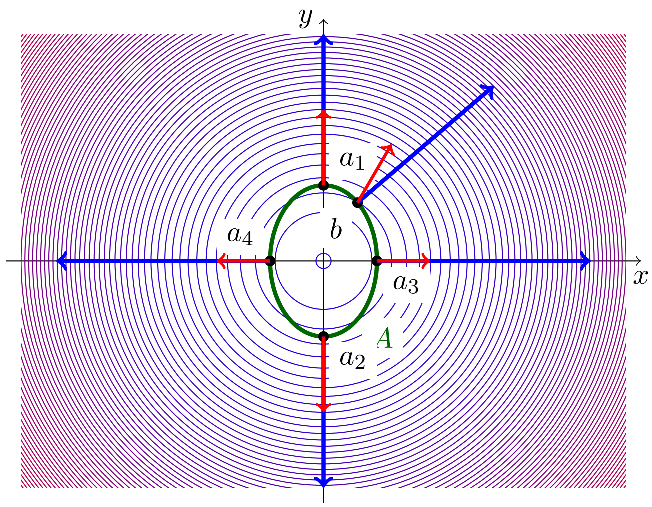
a svých nejmenších hodnot v bodech

$$a_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad a_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Kromě toho jsou na Obrázku 4.5 zobrazeny gradienty funkce f (červeně) a g (modře) v těchto bodech. Je jasné, že gradienty funkce f a g v těchto bodech jsou kolineární, tzn. pro každé $i = 1, \dots, 4$ existuje $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(a_i) = \lambda_i \nabla g(a_i),$$

což odpovídá podmínce (4.3). Je také vidět, že v bodě $b \in A$ z Obrázku 4.5 to splněno již není. ◯



Obrázek 4.5: Hladiny funkce f, množina A, gradienty funkcí f a g ve vybraných bodech z Příkladu 4.28.

Poznámka 4.29 Definujeme takzvanou *Lagrangeovu funkci*

$$L(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_M) = f(x) - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j g_j(x),$$

tedy funkci N proměnných $x_1, \ldots, x_N$ o M parametrech $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$. Pak podmínka (4.3) se dá napsat jako soustava rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a; \lambda) = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

kde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$.

Definice 4.30 Nechť A je dána v (4.1). Řekneme, že $a \in A$ je stacionární bod funkce f na A, jestliže existují tzv. *Lagrangeovy multiplikátory* $\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ tak, že platí (4.3).

Věta 4.26 tedy říká, že funkce f může mít vázaný lokální extrém vzhledem k A jen ve stacionárních bodech na A. Opět musíme nějakým způsobem ověřit, jestli je stacionární bod bodem vázaného extrému. K tomu nám opět poslouží druhý diferenciál.

Věta 4.31. *Nechť mají funkce $f, g_1, \ldots, g_M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ($1 \leq M \leq N$) spojité parciální derivace druhého řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^N$, který je stacionárním bodem funkce f na A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$ jsou jeho Lagrangeovy multiplikátory, tzn. pro každé $i = 1, \ldots, N$ platí*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(a; \lambda) = 0.$$

Nechť má matice (4.2) v bodě a hodnost rovnu M.

- *Jestliže pro každé $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{o\}$ splňující*

  $$(\nabla g_j(a), h) = 0 \quad \textit{pro } j = 1, \ldots, M,$$

  platí

  $$\mathrm{d}^2 L(a; \lambda)(h) > 0 \ (\textit{resp. } < 0),$$

  pak má funkce f v bodě a ostré lokální minimum (resp. maximum) vzhledem k A.

- *Jestliže existují $h^{[1]}, h^{[2]} \in \mathbb{R}^N$ takové, že*

  $$(\nabla g_j(a), h^{[i]}) = 0 \quad \textit{pro } j = 1, \ldots, M, \ i = 1, 2$$

  a

  $$\mathrm{d}^2 L(a; \lambda)(h^{[1]}) > 0 \quad \textit{a} \quad \mathrm{d}^2 L(a, \lambda)(h^{[2]}) < 0$$

  pak f nemá v bodě a vázaný extrém vzhledem k A.

Důkaz Věty 4.31 lze nalézt třeba v [3].

Příklad 4.32 Vyřešte Příklad 4.28 metodou Lagrangeových multiplikátorů, tzn. pomocí Věty 4.26 a 4.31.

Řešení. Již víme, že množina A je 0-hladina funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zřejmě $\nabla g(x, y) = (4x, 2y)$ pro každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pak podmínka plné hodnosti matice (4.2) v tomto případě znamená nenulovost gradientu funkce g. Vyřešením soustavy

$$4x = 0, \quad 2y = 0$$

dvou rovnic o dvou neznámých zjišťujeme, že gradient je nenulový všude až na počátek. Předpoklad plné hodnosti matice (4.2) je tak splněn pro $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{o\}$, přitom $A \subset D$. Nyní uvažujme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \lambda(2x^2 + y^2 - 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Určíme vázané stacionární body a k nim odpovídající Lagrangeovy multiplikátory. Vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých x, y a λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y; \lambda) &= x - 4\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y; \lambda) &= y - 2\lambda y = 0, \\ 2x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Úpravou dostáváme následující soustavu

$$x(1-4\lambda) = 0, \tag{I}$$
$$y(1-2\lambda) = 0, \tag{II}$$
$$2x^2 + y^2 = 1. \tag{III}$$

Z rovnice (I) dostáváme, že platí buď (a) $x = 0$, nebo (b) $\lambda = \frac{1}{4}$.
ad (a): Dosadíme-li do (III), platí $y^2 = 1$, tzn. dostáváme dvě řešení $y_{1,2} = \pm 1$. Dosazením do (II) pak dostáváme $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$. Dostáváme tak dvě řešení

$$a_1 = (x_1, y_1) = (0, 1), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2},$$

a

$$a_2 = (x_2, y_2) = (0, -1), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

ad (b): Dosazením $\lambda = \frac{1}{4}$ do (II) dostáváme $y = 0$. Dosazením do (III) dostaneme $2x^2 = 1$, tzn. máme dvě řešení $x_{3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Takto máme další dvě řešení

$$a_3 = (x_3, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \lambda_3 = \frac{1}{4},$$

a

$$a_4 = (x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}.$$

Nyní vyšetříme, zda funkce f má v bodech a_i, $i = 1, \dots, 4$ vázaný lokální extrém vzhledem k A – a to podle Věty 4.31.

K tomu nejprve vypočteme Hessovu matici Lagrangeovy funkce

$$\nabla^2 L(x, y; \lambda) = \begin{pmatrix} 1-4\lambda & 0 \\ 0 & 1-2\lambda \end{pmatrix}.$$

ad (1): Bod $a_1 = (0, 1)$ s multiplikátorem $\lambda_1 = \frac{1}{2}$: Podmínka

$$(\nabla g(a_1), h) = 0$$

pro $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je ekvivalentní s rovností

$$4 \cdot 0 \cdot h_1 + 2 \cdot 1 \cdot h_2 = 0,$$

tzn. $h_2 = 0$. Tuto podmínku tedy splňují všechny vektory ve tvaru

$$h = (h_1, 0), \quad h_1 \in \mathbb{R},$$

což jsou vektory kolmé na gradient funkce g v bodě a_1 a jedná se o „směrové vektory tečny k množině A v bodě a_1“ – viz Obrázek 4.5. Pro tyto vektory platí

$$\mathrm{d}^2 L(a_1; \lambda_1)(h) = -h_1^2.$$

Kvadratickou formu na levé straně lze chápat jako formu o jedné proměnné h_1. Tato forma je negativně definitní, protože $\mathrm{d}^2 L(a_1; \lambda_1)(h) < 0$ pro každé $h = (h_1, 0)$, $h_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy podle Věty 4.31 má funkce f v bodě a_1 ostré lokální maximum vzhledem k množině A.

ad (2): Bod $a_2 = (0, -1)$ s multiplikátorem $\lambda_2 = \frac{1}{2}$: Podmínka

$$(\nabla g(a_2), h) = 0$$

pro $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je ekvivalentní s rovností

$$4 \cdot 0 \cdot h_1 - 2 \cdot 1 \cdot h_2 = 0,$$

tzn. $h_2 = 0$. Dostáváme pak pro tyto vektory

$$\mathrm{d}^2 L(a_2; \lambda_2)(h) = -h_1^2,$$

tedy podobně jako v předchozím případě má podle Věty 4.31 funkce f v bodě a_2 ostré lokální maximum vzhledem k množině A.
ad (3): Bod $a_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ s multiplikátorem $\lambda_3 = \frac{1}{4}$: Podmínka

$$(\nabla g(a_3), h) = 0$$

pro $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je ekvivalentní s rovností

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot h_1 + 2 \cdot 0 \cdot h_2 = 0,$$

tzn. $h_1 = 0$. Dostáváme pak pro tyto vektory

$$\mathrm{d}^2 L(a_3; \lambda_3)(h) = \frac{1}{2} h_2^2.$$

Podle Věty 4.31 funkce f má v bodě a_3 ostré lokální minimum vzhledem k množině A.
ad (4): Bod $a_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ s multiplikátorem $\lambda_4 = \frac{1}{4}$: Podmínka

$$(\nabla g(a_4), h) = 0$$

pro $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ je ekvivalentní s rovností

$$-\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot h_1 + 2 \cdot 0 \cdot h_2 = 0,$$

tzn. opět $h_1 = 0$. Dostáváme pak pro tyto vektory

$$\mathrm{d}^2 L(a_4; \lambda_4)(h) = \frac{1}{2} h_2^2.$$

Podle Věty 4.31 funkce f má v bodě a_4 ostré lokální minimum vzhledem k množině A. ○

4.3 Globální (absolutní) extrémy

Tento pojem již známe – jde o pouhou největší/nejmenší funkční hodnotu dané funkce na dané množině – viz Definici 2.13.

Definice 4.33 Souhrnně globálnímu maximu a mininu říkáme *globální extrém.*

Navíc již známe jednoduchou postačující podmínku pro existenci globálních extrémů – je to Důsledek 2.63. V následující větě tuto postačující podmínku pouze doplníme o další užitečnou informaci.

Věta 4.34. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathcal{D}(f)$ je kompaktní. Pak f nabývá na A svého globálního maxima i minima. Funkce nabývá globální extrém buď uvnitř v bodě lokálního extrému nebo na hranici.*

Poznámka 4.35 Tvrzení Věty 4.34 nám dává praktický návod k určení globálního extrému. Stačí vyšetřit body z množin $\operatorname{int} A$ a ∂A:

- $\operatorname{int} A$: stacionární body a body, ve kterých funkce nemá některou z parciálních derivací – a určit v těchto bodech funkční hodnotu. K tomu použijeme kapitolu o lokálních extrémech.
- ∂A: stacionární body funkce f vzhledem k množině A a body ve kterých Lagrangeova funkce nemá některou z parciálních derivací – a určit v těchto bodech funkční hodnotu. K tomu použijeme některé poznatky o vázaných extrémech.

Nakonec porovnáme získané funkční hodnoty a určíme největší a nejmenší z nich. To bude globální maximum a globální minimum funkce f na množině A.

Příklad 4.36 Vypočtěte maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = xy$$

na množině

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Řešení. Nejprve vyšetřeme stacionární body funkce v množině

$$\operatorname{int} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + 2y^2 < 1\}$$

viz Obrázek 4.6a. Řešíme soustavu rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x = 0,$$

která má jediné řešení $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Tento bod leží v $\operatorname{int} A$, zapamatujme si proto hodnotu

$$f(0, 0) = 0.$$

Nyní se podívejme na množinu

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + 2y^2 = 1\}.$$

Je jasné, že jde o elipsu – viz Obrázek 4.6b. Tato množina je zadaná implicitně (ale šlo by ji jednoduše zadat i parametricky). Stačí určit stacionární body funkce f na A a vypočítat funkční hodnoty funkce f v těchto bodech. Lagrangeova funkce je pak definovaná předpisem

$$L(x, y; \lambda) = xy - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1).$$

Řešme soustavu

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y;\lambda) = y - 2\lambda x = 0, \tag{I}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y;\lambda) = x - 4\lambda y = 0, \tag{II}$$
$$x^2 + 2y^2 = 1. \tag{III}$$

Z prvních dvou rovnic můžeme odvodit, že platí

$$y(1-8\lambda^2) = 0.$$

Jsou tedy dvě možnosti: (a) $y = 0$ nebo (b) $\lambda^2 = \frac{1}{8}$.

(a) Z rovnice (II) dostáváme $x = 0$ a dosazením do rovnice (II) dostáváme $0^2 + 2 \cdot 0^2 = 1$, což nemůže platit. Tato cesta nám žádné řešení nepřinesla.

(b) Nechť $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Pak z rovnice (II) máme $x = \sqrt{2}y$ a dosazením do (III) dostáváme $y^2 = \frac{1}{4}$. Dostáváme tak dvě řešení

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

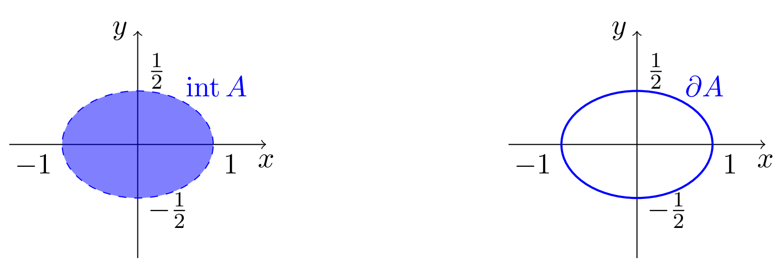
Pro $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ postupujeme úplně stejně a dostáváme další řešení

$$(x_3, y_3) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{a} \quad (x_4, y_4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Funkční hodnoty funkce f v těchto čtyřech bodech jsou po řadě

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Porovnáme-li vypočítané funkční hodnoty, pak dostáváme, že funkce f nabývá na množině A své největší hodnoty $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v bodech (x_1, y_1) a (x_2, y_2)) a nejmenší hodnoty $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v bodech (x_3, y_3) a (x_4, y_4)). ◯



(a) Množina int A. (b) Množina ∂A.

Obrázek 4.6: Množina A z Příkladu 4.36.

Příklad 4.37 Vypočtěte největší a nejmenší funkční hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

na množině

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| + |y| \leq 1\}.$$

Řešení. Nejprve vyšetřeme stacionární body funkce v množině

$$\operatorname{int} A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| + |y| < 1\}$$

viz Obrázek 4.7a. Řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - x = 0, \end{aligned}$$

z čehož okamžitě vidíme $y = 2x$ a $x = 2y$. To je splněno právě pro $(x,y) = (0,0)$, který *leží v* $\operatorname{int} A$ (pozor tuto inkluzi je vždy potřeba ověřit!). Zapamatujeme si funkční hodnotu v tomto bodě, což je

$$f(0,0) = 0.$$

Nyní se podívejme na množinu

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |x| + |y| = 1\}.$$

Je potřeba si tuto množinu načrtnout. Třeba tak, že uvažujeme části této množiny v jednotlivých kvadrantech. Např. v prvním kvadrantu platí $x \geq 0$, $y \geq 0$, tzn. průnik ∂A s prvním kvadrantem je množina daná podmínkami

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad x + y = 1,$$

což je úsečka s krajními body $(1,0)$ a $(0,1)$. Takto postupujeme s dalšími kvadranty a dostáváme, že ∂A je čtverec o vrcholech $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ a $(0,-1)$, viz Obrázek 4.7b. Množinu si rozsekáme na úsečky (a), (b), (c) a (d) – viz zmíněný obrázek.

(a) První úsečka je množina uspořádaných dvojic (x,y) daná vztahy

$$y = -1 - x, \quad x \in [-1, 0].$$

Definujeme pomocnou funkci

$$g_a(x) = f(x, -1 - x), \quad x \in [-1, 0].$$

Tuto funkci uvažujeme kvůli tomu, že nabývá právě všech hodnot co funkce f na úsečce (a). Z toho ovšem plyne, že největší, resp. nejmenší funkční hodnota funkce g_a na intervalu $[-1, 0]$ je největší, resp. nejmenší funkční hodnota funkce f na úsečce (a). Funkce g_a nabývá globální extrémy buď uvnitř intervalu $(-1, 0)$ ve svém stacionárním bodě, nebo v krajních bodech $x = -1$ a $x = 0$. Protože

$$g_a(x) = x^2 - x(-1 - x) + (-1 - x)^2 = 3x^2 + 3x + 1,$$

pak

$$g_a'(x) = 6x + 3$$

a tedy stacionární bod je $x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$. Funkce g_a může mít globální extrém na intervalu $[-1, 0]$ v bodech

$$x = -1, \quad x = -\frac{1}{2}, \quad x = 0.$$

Z toho plyne, že f může nabývat extrému na úsečce (a) v bodech

$$(-1, 0), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad (0, -1).$$

Platí

$$f(-1, 0) = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad f(0, -1) = 1.$$

Stejně budeme postupovat na dalších částech ∂A.

(b) Druhá úsečka je množina ve tvaru

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; y = x - 1, \ x \in [0, 1]\}.$$

Definujeme $g_b(x) = f(x, x - 1)$, $x \in [0, 1]$ a počítáme dále. V této části dostáváme

$$f(0, -1) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad f(1, 0) = 1.$$

(c) Na třetí úsečce

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; y = -x + 1, \ x \in [0, 1]\}$$

dostáváme

$$f(0, 1) = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad f(1, 0) = 1.$$

(d) Konečně na poslední úsečce

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; y = x + 1, \ x \in [-1, 0]\}$$

dostáváme

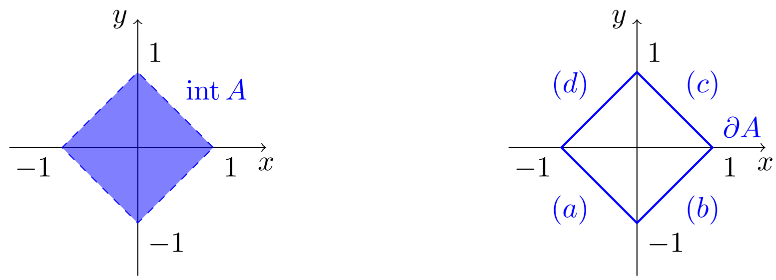
$$f(-1, 0) = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad f(0, 1) = 1.$$

Podíváme-li se na všechny doposud vypočítané funkční hodnoty funkce f na množině A podezřelé z globálního extrémismu, dostáváme

$$\min_A f = 0, \quad \max_A f = 1.$$

○

Mnohdy hledáme extrémy funkcí více proměnných na celém $\mathbb{R}^N$. K dispozici máme následující větu.



(a) Množina int A. (b) Množina ∂A.

Obrázek 4.7: Množina A z Příkladu 4.37.

Věta 4.38. *Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}^N$ a platí*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty.$$

Pak f nabývá svého globálního minima vzhledem k $\mathbb{R}^N$ a to v některém z bodů lokálního extrému. Navíc, pokud f má všechny parciální derivace prvního řádu ve všech bodech z $\mathbb{R}^N$, pak f nabývá svého globálního minima v některém ze stacionárních bodů.

Důkaz. Podle limitního předpokladu k číslu $K = f(o)$ existuje $\mathcal{U}_\delta(o)$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ taková, že $\|x\| \geq \delta$ platí $f(x) > K = f(o)$. Odtud plyne, že pokud nabývá funkce f svého globálního minima vzhledem k množině $\overline{\mathcal{U}_\delta(o)}$, jde o globální minimum vzhledem k celému $\mathbb{R}^N$. Ale podle Věty 4.34 funkce f skutečně nabývá globálního minima vzhledem k množině $\overline{\mathcal{U}_\delta(o)}$. □

Ukažme si nyní aplikaci právě vyložené teorie na velmi praktický problém, ve kterém chceme k daným bodům v rovině najít přímku, která je jim v jistém smyslu nejblíže. Je pravda, že je ho možno vyřešit daleko rychleji prostředky lineární algebry, naši metodu lze ovšem zobecnit i na aproximaci složitějšími křivkami.

Příklad 4.39 (metoda nejmenších čtverců) Jsou dány body v rovině

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $x_i \neq x_j$ pro $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ – viz Obrázek 4.8. Nalezněte přímku, která je těmto bodům „nejblíže“.

Řešení. Je nutno konstatovat, že zadání příkladu není korektní. Není totiž jasné, jakým způsobem zjistíme, která přímka je bodům blíže než jiná. Těch způsobů je totiž více. My zvolíme následující pravidlo: Pro danou přímku o rovnici

$$y = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ definujeme její vzdálenost od zadaných bodů jako číslo

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

A bude nás zajímat taková přímka, pro kterou je toto číslo *nejmenší*. Tento součet má pěkný geometrický význam. Pro danou přímku jde o součet obsahů čtverců o délce strany $|ax_i + b - y_i|$, viz Obrázek 4.8. Naším úkolem je tedy najít rovnici přímky $y = ax + b$, tedy hodnoty parametrů a a b, pro něž funkce

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

nabývá nejmenší hodnoty.

Nejprve je třeba ověřit, že takové globální minimum existuje. Je okamžitě vidět, že f je spojitá a má spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}^2$. A dá trochu práce ověřit, že také platí

$$\lim_{\|(a,b)\| \to \infty} f(a,b) = \infty.$$

Podle Věty 4.38 pak funkce nabývá svého globálního minima vzhledem k celému $\mathbb{R}^N$ a to v nějakém stacionárním bodě. Určeme tedy stacionární body. Řešíme soustavu o neznámých a a b:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0.$$

Tu lze upravit na soustavu

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Označme matici této soustavy jako A. Její determinant je roven číslu

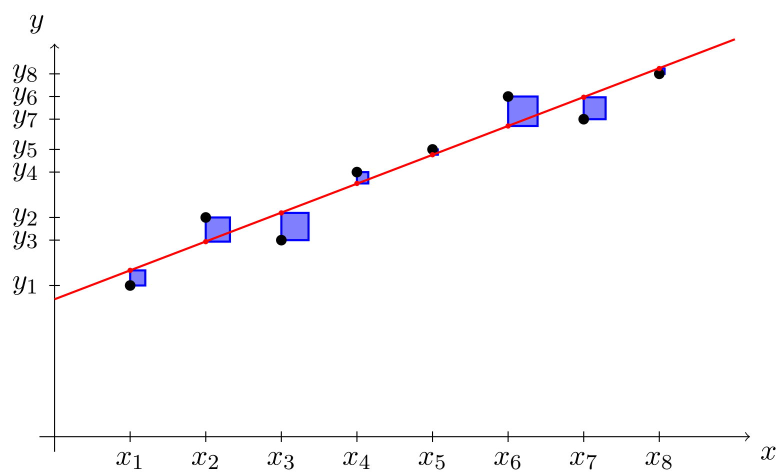
$$\det A = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2.$$

Lze dokázat pravdivost následujícího výroku:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \ \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \ : \ n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 > 0.$$

Důkaz je ponechán čtenáři jako užitečné zopakování si metody důkazu matematickou indukcí. Díky tomu je ale naše soustava rovnic vždy řešitelná a má jediné řešení $(\tilde{a}, \tilde{b})$ (třeba pomocí Cramerova pravidla), kde

$$\tilde{a} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$



Obrázek 4.8: Zadané body s proloženou přímkou a čtverci z Příkladu 4.39.

a

$$\tilde{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Dostali jsme tak jediný stacionární bod.

Závěr: Hledaná přímka má rovnici $y = \tilde{a}x + \tilde{b}$. Její graf, pak lze vidět na Obrázku 4.8. ○

Kapitola 5

Číselné řady

Nyní se budeme zabývat sčítáním nekonečného množství čísel, konkrétně součtem všech členů nějaké posloupnosti reálných čísel. Zajímá nás, jak pro danou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ smysluplně definovat výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

a jak s ním dále pracovat, tedy zda pro „nekonečné součty" platí stejná pravidla jako pro součty konečného počtu sčítanců. Takové otázky se datují až do starověku a jejich špatné uchopení vede na různé paradoxy – vygooglete si asi nejznámější paradox o Achillovi a želvě. A není to jen taková matematicko-filozofická hříčka. S nekonečnými řadami se nevědomky setkáváme již na základní škole. Desetinný zápis reálného čísla totiž není nic jiného než zápis součtu jisté číselné řady – viz dále.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 5.1 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. *(Nekonečnou) číselnou řadou* nazýváme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + \cdots .$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel definovanou

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \ldots$$

nazýváme *posloupností částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Rozlišujeme tři případy:

- Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a má součet s.*
- Existuje-li nevlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, říkáme, že řada *diverguje k* $\pm\infty$.
- Neexistuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, říkáme, že řada *osciluje.*

Poznámka 5.2

(a) Přímo z definice vidíme, jakým způsobem jsme zvolili „sečtení nekonečného počtu čísel". Vezmeme si první člen a_1, k němu přičteme druhý člen a_2, k tomuto součtu přičteme třetí člen a_3, atd. Pak se díváme, co se s tímto „částečným“ součtem děje. Je třeba zdůraznit, že toto není jediný způsob sčítání nekonečného počtu čísel, i když jde asi o ten nejpřirozenější. Zmiňme jiný způsob, např. *Cesàrovu sumaci*, kde konvergence řady není podmíněna konvergencí posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, ale konvergencí posloupnosti

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Dá se dokázat, že řady konvergentní ve smyslu Definice 5.1 jsou konvergentní i ve smyslu Cesàrově a součty jsou stejné.

(b) Nemá-li $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vlastní* limitu, říkáme souhrnně, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(c) Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bude mít dvojí význam. Jednak bude označovat řadu samotnou, a pokud tato řada konverguje či diverguje k $\pm\infty$, označuje navíc i její součet (bude to tedy číslo z $\mathbb{R}^*$).

(d) Někdy je výhodnější indexovat sčítance v řadě již od nuly, tzn. uvažujeme ještě „nultý člen“ posloupnosti a_0 a následně řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

Jde pouze o „posunutí“ indexu; sčítanců je pořád „stejně mnoho“ (přesně: tolik, kolik je přirozených čísel – říká se *spočetně mnoho*). Např. *geometrická řada* se zapisuje buď jako

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots .$$

Vidíme, že v obou případech sčítáme ta samá čísla, a v tom samém pořadí (lze je tedy při troše dobré vůle chápat za totožné). Podobně můžeme řady indexovat počínaje libovolným celým číslem.

Příklad 5.3 Vyšetřete konvergenci *geometrické řady*, tzn. řady ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots ,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Řešení. Jestliže $q = 1$, platí

$$s_n = a + a + \cdots + a = na \to \infty \cdot \operatorname{sgn} a, \quad \text{pro } n \to \infty.$$

Pokud $q \neq 1$, pak lze psát

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \\ &= a(1 + q + \cdots + q^{n-1})\frac{1-q}{1-q} = a\frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

Stačí jen vyšetřit limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ vzhledem k parametru q, přitom se použije znalostí získaných např. v [13]. Nakonec dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty \cdot \operatorname{sgn} a & \text{pro } q \geq 1, \\ \frac{a}{1-q} & \text{pro } |q| < 1, \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

Závěr: Geometrická řada konverguje k $\frac{a}{1-q}$ pro $|q| < 1$, diverguje k $\infty \cdot \operatorname{sgn} a$ pro $q \geq 1$ a osciluje pro $q \leq -1$. ○

Příklad 5.4 Dokažte, že *harmonická řada*, tzn. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

diverguje.

Řešení. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost jejích částečných součtů. Protože

$$s_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1} > s_n > 0$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost kladných čísel, tzn. má kladnou limitu; označme ji $s \in (0, \infty]$. Dokážeme, že $s = \infty$. Uvažujme podposloupnost $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž limita je rovna také s. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 2^n} \\ &\geq s_{2^n} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2^n} + \frac{1}{2 \cdot 2^n} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 2^n}}_{2^n \times} = s_{2^n} + \frac{2^n}{2 \cdot 2^n} = s_{2^n} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Přejdeme-li na obou stranách s $n \to \infty$, máme

$$s \geq s + \frac{1}{2}.$$

Žádné reálné číslo tuto nerovnost nesplňuje, přitom pro $s = \infty$ nerovnost platí. ○

Příklad 5.5 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Pomocí rozkladu na parciální zlomky lze vypočítat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud vidíme, že pro posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$ a tedy řada konverguje a má součet roven číslu 1. ○

Poznámka 5.6 Řadu v Příkladu 5.5 jsme byli schopni vyjádřit ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n+1}),$$

kde

$$c_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro obecnou posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ se těmto řadám říká *teleskopické* a jejich součet se spočítá velmi jednoduše. A to proto, že její n-tý částečný součet je roven

$$(c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + \cdots + (c_n - c_{n+1}) = c_1 - c_{n+1}.$$

Odtud již vidíme, že teleskopická řada konverguje právě tehdy, když konverguje posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Přitom, pokud konverguje, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n+1}) = c_1 - \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Ukázali jsme si pár jednoduchých příkladů, ve kterých jsme vypočítali limity posloupností částečných součtů řad. To v nás může vyvolat klamnou představu, že je to normální jev. Ve skutečnosti je tomu právě naopak. Většinou nejsme schopni z definice spočítat součet řady. Ovšem nám bude stačit umět odpovědět na následující otázku: *zda je či není řada konvergentní.* Ukážeme si několik (těch nejjednodušších a nejznámějších) způsobů, jak rozhodnout o konvergenci či divergenci zadané řady.

Začněme nutnou podmínkou konvergence, která se používá pro dokázání divergence řady.

Věta 5.7 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz. Podle předpokladu je posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, označme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0,$$

kde jsme v předposlední rovnosti využili větu o aritmetice *konvergentních* posloupností. □

Jak je zdůrazněno i názvem Věty 5.7, opačná implikace v této větě *obecně neplatí.* Tzn. existují řady, které nutnou podmínku splňují, ale divergují, viz Příklad 5.4. *Nelze tedy dedukovat konvergenci řady zjištěním, že posloupnost jejích členů jde k nule!!!*

Příklad 5.8 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 5n^4 + 1}{5n^5 + 100n + 2}.$$

Řešení. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 5n^4 + 1}{5n^5 + 100n + 2} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

podle nutné podmínky konvergence (Věta 5.7) řada nemůže konvergovat; řada tedy diverguje. Na tomto místě je třeba znovu zdůraznit, že pokud by nám limita vyšla nulová, nic by to o konvergenci či divergenci řady neříkalo! ◯

Nyní si představme další variantu Bolzanovy–Cauchyovy věty, tentokrát pro konvergenci číselné řady. Budeme ji používat zejména v důkazech.

Věta 5.9 (Bolzanova–Cauchyova nutná a postačující podmínka konvergence)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ n_0 \leq m < n \ : \ |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Důkaz. Podle definice řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje posloupnost jejích částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ta je pak podle Bolzanovy–Cauchyovy věty pro posloupnosti ekvivalentní s tím, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq m < n$ platí

$$|s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Přitom pro $m < n$ platí

$$|s_n - s_m| = |a_1 + \cdots + a_n - (a_1 + \cdots + a_m)| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n|.$$ □

Následující věta nám říká, že konečně mnoho členů nemá vliv na konvergenci, resp. divergenci řady. Stejnojmenná věta platí i pro limity posloupností – ovšem u posloupností nemá konečný počet členů vliv ani na *hodnotu limity.* V tomto případě ale na výsledný součet mají vliv *všechny nenulové* členy řady. Asi netřeba zdůrazňovat důležitost této věty. Díky ní si můžeme předefinovat libovolný konečný počet členů řady, aniž by to mělo vliv na konvergenci/divergenci.

Věta 5.10 (o invarianci)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel takové, že*

$$a_n = b_n \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n = b_n$. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$s_n - s_{n_0} = a_{n_0+1} + \cdots + a_n = b_{n_0+1} + \cdots + b_n = t_n - t_{n_0},$$

tzn.

$$s_n = t_n + (s_{n_0} - t_{n_0}).$$

Tedy existuje-li vlastní limita posloupnosti $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje i vlastní limita posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, a naopak. □

Podívejme se, jak je to se sčítáním řad a násobením řady jedním číslem.

Věta 5.11 (o linearitě)**.**

(a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada,* $k \in \mathbb{R}$*,* $k \neq 0$*. Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ *konvergují nebo divergují současně. V případě, že konvergují, platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right).$$

(b) Jestliže jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *je také konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz. ad (a): Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$. Pak

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i = ks_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu t právě tehdy, když $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu s, a pokud obě konvergují, pak $t = ks$.
ad (b): Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$u_n = s_n + t_n.$$

Protože posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergují, konverguje i $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, a platí

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n.$$ □

Nyní se podívejme, zda pro součet nekonečného počtu reálných čísel platí asociativní zákon. Následující příklad ukazuje, že je třeba opatrnosti.

Příklad 5.12 Uvažujme tzv. *Grandiho řadu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

Pak se můžeme pokusit spočítat její součet následujícím způsobem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0,$$

ale třeba také takto

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1.$$

Docházíme k dvěma různým výsledkům. V čem je chyba? Problém je v chybném předpokladu platnosti *asociativního zákona pro sčítání nekonečného počtu čísel.* Ten totiž platí pouze pro konvergentní řady (viz dále Větu 5.13). Přitom se lze snadno přesvědčit o tom, že Grandiho řada diverguje (osciluje). ○

Věta 5.13 (asociativní zákon pro konvergentní řady)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $k_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme*

$$b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz. Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak vybraná posloupnost $\{s_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, musí konvergovat i její podposloupnost a limity jsou stejné.
□

Poznámka 5.14 Předchozí věta říká, že *konvergentní* řadu lze libovolně přezávorkovat a její součet se nezmění, tzn. konverguje-li řada $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, pak konverguje i řada

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + (a_{k_2+1} + \cdots + a_{k_3}) + \cdots$$

a jejich součet je stejný.

5.2 Řady s nezápornými členy

Pojďme se nyní systematicky zabývat otázkou jak efektivně zjišťovat konvergenci řad. Pro jednoduchost se budeme nejprve zabývat řadami, jejichž členy jsou nezáporné (resp. kladné).

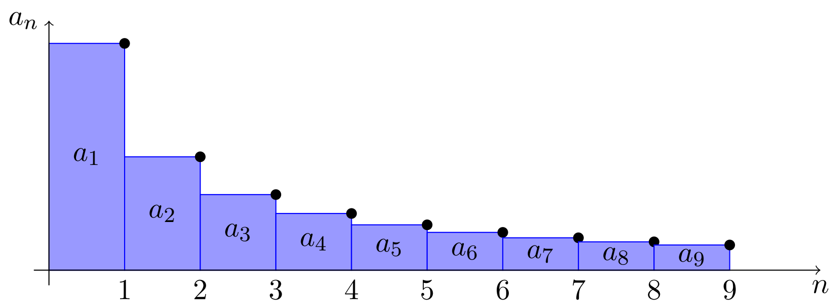
Definice 5.15 Je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nazývá se řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řadou s nezápornými členy.* Podobně *řadou s kladnými členy* rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Jednoduchost těchto řad je také vyjádřena v následující větě.

Věta 5.16. *Řada s nezápornými členy buď konverguje (a má nezáporný součet) nebo diverguje k ∞. Konverguje právě tehdy, když její posloupnost částečných součtů je ohraničená.*

Důkaz. Tvrzení plyne z faktu, že posloupnost částečných součtů řady s nezápornými členy je neklesající, tedy monotónní. Kromě toho jde o posloupnost s nezápornými členy, tedy její limita je buď nezáporné číslo (pokud posloupnost konverguje) nebo ∞ (v opačném případě). Přitom konverguje právě tehdy, když je ohraničená. □

Poznámka 5.17 (geometrická interpretace součtu řady) Řadu s nezápornými či kladnými členy lze jednoduše chápat jako součet nekonečného počtu obsahů obdélníků o stranách a_n a 1, viz Obrázek 5.1 s grafem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vzniklý obrazec je možno podle potřeby uvažovat také „posunutý doprava o jedničku" (viz Obrázek 5.2a). Čtenář si sám může představit, jak je to s geometrickým významem řad s libovolnými členy.



Obrázek 5.1: Geometrický význam součtu řady s nezápornými členy

Nyní se podívejme jak efektivně zjišťovat konvergenci. Začněme tzv. srovnávacími kritérii, ve kterých vždy potřebujeme jinou řadu, o jejíž konvergenci/divergenci již víme.

Věta 5.18 (1. srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí

(i) jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(ii) jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Důkaz. ad (i): Vzhledem k větě o invarianci (Věta 5.10) můžeme předpokládat, že nerovnost

$$a_n \leq b_n$$

platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pak

$$s_n \leq t_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a je tedy ohraničená i $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tzn. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
ad (ii): Jde o obměnu (i). □

Srovnávací kritérium nás vede k následující definici.

Definice 5.19 Platí-li pro dvojici řad s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nerovnosti

$$a_n \leq b_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je majorantní k řadě* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a naopak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je minorantní k řadě* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Jazykem Definice 5.19 si můžeme Větu 5.18 pamatovat tak, že najdeme-li k vyšetřované řadě majorantní řadu, která je navíc konvergentní, pak je i naše původní řada konvergentní. Naopak, najdeme-li k vyšetřované řadě minorantní řadu, která je navíc divergentní, pak je i naše původní řada divergentní. Chápeme-li součet řady s nezápornými členy jako obsah útvaru z Obrázku 5.1, lze tato tvrzení interpretovat i geometricky. Totiž obsah útvaru, který je součtem majorantní řady, je vždy *větší (nebo roven)* obsahu útvaru, který je roven součtu minorantní řady. Je tedy logické, že pokud obsah útvaru odpovídající majorantní řadě je konečný, musí být obsah útvaru odpovídající minorantní řadě také konečný. A naopak, je-li obsah útvaru odpovídající minorantní řadě nekonečný, pak je obsah útvaru odpovídající majorantní řadě také nekonečný.

Příklad 5.20 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$$

pro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 2$.

Řešení. Předně vyšetříme případ $\alpha = 2$. Platí

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1)n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Protože z Příkladu 5.5 víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ neboli $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ je konvergentní, pak podle srovnávacího kritéria (Věta 5.18) je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \geq 2$ platí

$$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Opět ze srovnávacího kritéria plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pro $\alpha \geq 2$ konverguje. ○

Příklad 5.21 Nechť je dána posloupnost přirozených čísel $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že $0 \leq c_n < 10$. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots$$

konverguje.

Řešení. Jde o řadu s nezápornými členy a platí

$$\frac{c_n}{10^n} < \frac{10}{10^n} = \frac{1}{10^{n-1}}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jak už víme z Příkladu 5.3, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}}$ je konvergentní geometrická řada. Podle 1. srovnávacího kritéria (Věta 5.18) pak naše řada rovněž konverguje. ○

Součet řady z Příkladu 5.21 jsme zvyklí už od základní školy zapisovat jako

$$0.c_1 c_2 c_3 \ldots$$

(no, místo tečky jsme zvyklí psát čárku). Nyní jsme dokázali, že tato řada konverguje, tedy její součet je opravdu reálné číslo. Dokonce se dá dokázat, že *každé* reálné číslo se dá zapsat ve tvaru

$$\pm \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} \right),$$

kde $c_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, což zapisujeme zkráceně

$$\pm c_0.c_1c_2c_3\ldots$$

Tak například

$$\frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 0.3333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 = \frac{5}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \cdots = 0.4\bar{9} = \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots,$$

nebo třeba

$$\pi = 3.1415\ldots = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots.$$

Věta 5.22 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

(i) Jestliže $L < \infty$, pak platí implikace

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

(ii) Jestliže $L > 0$, pak platí implikace

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Důkaz. ad (i): Nechť $L < \infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle předpokladu existence limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon.$$

Odtud plyne, že

$$a_n < (L + \varepsilon) b_n$$

pro všechna $n \geq n_0$ (tzn. pro s.v. $n \in \mathbb{N}$). Podle věty o linearitě (Věta 5.11) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (L + \varepsilon) b_n$, a následně podle srovnávacího kritéria (Věta 5.18) konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
ad (ii): Dokažme sporem, tzn. předpokládejme, že $L > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{1}{L} < \infty,$$

kde pokládáme $1/L = 0$ pokud $L = \infty$. Pak podle první části a z konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – to je spor. □

Příklad 5.23 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}.$$

Řešení. Předně je třeba zdůraznit, že jde o řadu s kladnými členy, protože $\frac{\pi}{n} \in (0, \pi)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Porovnáme ji s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} \frac{1}{\pi} = \lim_{x\to 0+} \frac{\pi x}{\sin \pi x} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} > 0,$$

kde jsme použili Heineovu větu: $x_n = \frac{1}{n} \to 0$ pro $n \to \infty$ a „vzorec“ $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 5.22) také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ diverguje. ◯

Věta 5.24 (2. srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Pak platí

- *jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*
- *jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.*

Důkaz. Vzhledem k větě o invarianci (Věta 5.10) můžeme dokonce předpokládat, že nerovnosti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_n}{b_1}$$

a tedy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n$$

neboli

$$\frac{b_1}{a_1} a_n \leq b_n.$$

Tvrzení pak plynou z Věty 5.18 a posledních dvou nerovností. □

Poznámka 5.25 Podobně jako nerovnost u prvního, tak i u druhého srovnávacího kritéria má pěkný geometrický význam. Je třeba mít na paměti, že *konvergence řady s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ závisí na tom, jak „rychle“ konverguje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ k nule* (totiž, kdyby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak by podle nutné podmínky konvergence řada divergovala). Na posloupnost

$$v_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

se můžeme dívat jako na měřítko rychlosti klesání (podobně jako nám derivace funkce udává rychlost růstu/poklesu funkčních hodnot dané funkce). Udává, jak se liší sousední členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jsou-li členy v_n blízké nule, pak zřejmě posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesá hodně rychle. Naopak, jsou-li blízké jedničce, je posloupnost téměř konstantní. A do třetice, zjistíme-li, že členy posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ stále větší než 1, jde zřejmě o rostoucí posloupnost a podle nutné podmínky konvergence můžeme usoudit na divergenci dané řady. Tedy, nerovnost v tvrzení druhého srovnávacího kritéria se dá chápat tak, že členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesají (pokud je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající) rychleji než členy posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 5.26 (odmocninové, Cauchyovo kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Platí:*

(a) Existuje-li $q < 1$ *tak, že*

$$\sqrt[n]{a_n} \le q \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(b) Je-li

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \textit{pro } \infty\textit{-mnoho } n \in \mathbb{N},$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. ad (a): Z předpokladu plyne

$$a_n \le q^n < 1 \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Pak konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne z konvergence geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ s kvocientem menším než 1 a srovnávacího kritéria (Věta 5.18).
ad (b): Pak

$$a_n \ge 1 \quad \text{pro } \infty\text{-mnoho } n \in \mathbb{N}$$

a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence (viz Větu 5.7). □

Příklad 5.27 Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots .$$

Řešení. Jde o řadu s kladnými členy. Označme

$$a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{4^n} & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n]{a_n} \le \frac{1}{2} < 1.$$

Tedy podle odmocninového kritéria (Věta 5.26) řada konverguje. ○

Věta 5.28 (limitní odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Platí

(a) je-li $q < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(b) je-li $q > 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. ad (a): Zvolme $\bar{q} \in (q, 1)$. Pak podle předpokladu

$$\sqrt[n]{a_n} < \bar{q} < 1 \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Podle odmocninového kritéria (Věta 5.26(a)) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
ad (b): Z předpokladu plyne

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

tedy i pro ∞-mnoho $n \in \mathbb{N}$. Podle odmocninového kritéria (Věta 5.26(b)) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Příklad 5.29 Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

Řešení. Jde o řadu s nezápornými členy, označme její členy a_n. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1.$$

Podle limitního odmocninového kritéria (Věta 5.28) řada konverguje. ○

Limitní odmocninové kritérium je jednodušší na použití než odmocninové kritérium, protože místo hledání vhodných odhadů členů posloupnosti stačí spočítat limitu. Ne vždy ale tato limita existuje. Třeba Příklad 5.27 se pomocí limitní verze (Věta 5.28) vyřešit nedá.

Všimněme si, že limitní odmocninové kritérium neříká nic v případě, že $q = 1$. Proto zde uvedeme více kritérií.

Věta 5.30 (podílové, d'Alembertovo kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Platí:*

(a) Existuje-li $q < 1$ tak, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. ad (a): Vzhledem k větě o invarianci (Věta 5.10) můžeme předpokládat platnost nerovností

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q = q\frac{q^n}{q^n} = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

(všimněme si, že to lze, protože $q > 0$) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, z 2. srovnávacího kritéria (Věta 5.24) dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
ad (b): Nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

je pro všechna $n \in \mathbb{N}$ ekvivalentní s $a_{n+1} \geq a_n$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy neklesající posloupnost kladných čísel. Odtud plyne $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, tzn. není splněna nutná podmínka konvergence. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Důkaz následujícího kritéria se provede téměř stejně jako důkaz limitního odmocninového kritéria, přitom využíváme Větu 5.30. Je ponechán čtenáři jako jednoduché cvičení.

Věta 5.31 (limitní podílové kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Platí

(a) je-li $q < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) je-li $q > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Poznámka 5.32 Poznamenejme, že pokud existuje limita posloupnosti $\{a_{n+1}/a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak existuje i limita posloupnosti $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a rovnají se (viz např. [4]). Odtud plyne, že pokud nejprve zvolíme limitní podílové kritérium a příslušná limita vyjde číslo 1, nemá smysl zkoušet limitní odmocninové kritérium. Opačně, pokud bychom nejprve zvolili limitní odmocninové kritérium, ve kterém by vyšla limita rovna jedné, pak nemá smysl zkoušet limitní podílové kritérium, protože by limita vyšla také 1 nebo by neexistovala – v obou případech bychom nic nezjistili!

Příklad 5.33 Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Řešení. Jde o řadu s kladnými členy, označme je a_n. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Z limitního podílového kritéria (Věta 5.31) plyne, že řada konverguje. ○

Pokud předchozí kritéria nepomohou, můžeme použít jemnější kritérium.

Věta 5.34 (Raabeho kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Platí:*

(a) Existuje-li $q > 1$ tak, že

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq q \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1 \quad \textit{pro s.v. } n \in \mathbb{N},$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. ad (a): Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq q > 1.$$

Označme $\varepsilon = q - 1 > 0$, takže platí

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq 1 + \varepsilon$$

pro každé $n \geq n_0$. Pak

$$n(a_n - a_{n+1}) \geq a_n(1 + \varepsilon),$$

a po úpravě

$$(n-1)a_n - na_{n+1} \geq \varepsilon a_n.$$

pro $n \geq n_0$. Postupně dosazujme do poslední nerovnosti $n = n_0 + 1$, $n = n_0 + 2$, …, $n = n$ a dostáváme

$$\begin{aligned} n_0 a_{n_0+1} - (n_0+1)a_{n_0+2} &\geq \varepsilon a_{n_0+1}, \\ (n_0+1)a_{n_0+2} - (n_0+2)a_{n_0+3} &\geq \varepsilon a_{n_0+2}, \\ &\dots \\ (n-1)a_n - na_{n+1} &\geq \varepsilon a_n. \end{aligned}$$

Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, dostáváme

$$n_0 a_{n_0+1} - na_{n+1} \geq \varepsilon\left(a_{n_0+1} + \cdots + a_n\right) = \varepsilon(s_n - s_{n_0})$$

pro $n \geq n_0 + 1$. Tedy

$$\varepsilon(s_n - s_{n_0}) \leq n_0 a_{n_0+1}$$

a odtud plyne, že

$$s_n \leq \frac{n_0}{\varepsilon} a_{n_0+1} + s_{n_0}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. To ale znamená, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Podle Věty 5.16 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

ad (b): Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1.$$

Pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}.$$

Z 2. srovnávacího kritéria (Věta 5.24) a divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. □

Raabeho kritérium prakticky moc používat nebudeme. Je ale užitečné pro důkaz jeho limitní verze – viz následující větu. Její důkaz je opět analogický důkazu limitního odmocninového kritéria (Věta 5.28) a je opět doporučen čtenáři jako snadné cvičení.

Věta 5.35 (limitní Raabeho kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = q.$$

Pak

(a) je-li $q > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) je-li $q < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Poznámka 5.36 Podívejme se podrobněji na limitní Raabeho kritérium. Po něm sáhneme poté, co selhalo limitní podílové kritérium, tzn. vyšlo nám

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Pak je třeba určit limitu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Všimněme si, že v tomto případě je výraz v limitě nutně neurčitý, konkrétně $\infty \cdot 0$. Limita této nové limity obsahuje jemnější informaci o tom, jak se členy posloupnosti $\{a_{n+1}/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ blíží k jedničce. Její hodnota nám tak může rozhodnout o konvergenci či divergenci posloupnosti. Pokud nám opět vyjde číslo 1, musíme se opět poohlédnout po jiných kritériích.

Příklad 5.37 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

Řešení. Označme n-tý člen vyšetřované řady jako a_n. Pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}}{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1}} = \cdots = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Tedy limitní podílové kritérium (Věta 5.31) nelze použít. Zkusme limitní Raabeho kritérium. Pak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right) = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-1}{2(2n+1)} = \frac{6}{4} > 1.$$

Tedy podle Věty 5.35 řada konverguje. ◯

Následující kritérium ukazuje souvislost řad s nevlastním integrálem. Umožňuje nám úlohu převést na úlohu určení konvergence/divergence nevlastního integrálu.

Věta 5.38 (integrální kritérium)**.** *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[1, \infty)$ nezáporná a nerostoucí. Označme*

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje.}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je její posloupnost částečných součtů. Označme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Protože funkce f je podle předpokladu nerostoucí na $[1, \infty)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [n, n+1]$ platí

$$f(x) \le f(n) = a_n$$

a následně

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_n^{n+1} a_n\,\mathrm{d}x = a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, viz Obrázek 5.2a. Označíme

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in (1, \infty).$$

a dokážeme, že $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existuje a je vlastní. Protože f je nezáporná, pak F je neklesající na $(1, \infty)$, takže $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existuje. Stačí již jen dokázat, že funkce F je ohraničená. Nechť $x \in (1, \infty)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in [n, n+1]$ a platí

$$0 \le F(x) \le F(n+1) = \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n \le s.$$

($\Leftarrow$): Nechť $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní, tzn. $\lim_{x\to\infty} F(x) = I \in \mathbb{R}$, kde F je funkce z první části důkazu. Z nezápornosti f plyne, že F je neklesající na $(1, \infty)$, tzn. $F(x) \le I$ pro každé $x \in (1, \infty)$. Z toho, že f je nerostoucí, plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [n, n+1]$

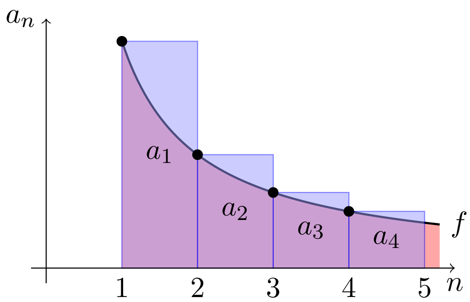
$$f(x) \ge f(n+1) = a_{n+1}$$

a následně

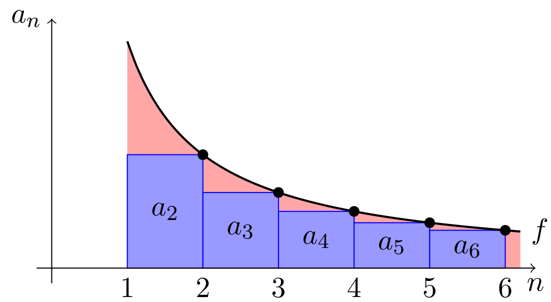
$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_n^{n+1} a_{n+1}\,\mathrm{d}x = a_{n+1}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, viz Obrázek 5.2b. Vzhledem k Větě 5.16 stačí dokázat, že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená shora. Zvolme libovolně $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \le a_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = a_1 + \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = a_1 + F(n) \le I. \quad \square$$



(a) Vztah podgrafu funkce f a geometrického významu řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.



(b) Vztah podgrafu funkce f a geometrického významu řady $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Obrázek 5.2: Náčrtek k důkazu integrálního kritéria.

Příklad 5.39 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$$

vzhledem k parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $\alpha \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence (viz Větu 5.7), tedy pro tyto hodnoty parametru α řada diverguje.
Nechť $\alpha > 0$. Pro $\alpha = 1$ a $\alpha \geq 2$ jsme tuto úlohu již vyřešili v Příkladech 5.4 a 5.20, nicméně rádi bychom již dostali úplnou odpověď. Limitní podílové a odmocninové kritérium nám odpověď nedává (ověřte!) a použití limitního Raabeho kritéria není zrovna snadné (přesvědčte se!). Zkusme integrální kritérium. Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}, \quad x \in (0, \infty),$$

což je mocninná funkce a platí

$$f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$f'(x) = (-\alpha)x^{-\alpha-1} < 0$$

pro všechna $x \in [1, \infty)$, funkce f je na tomto intervalu klesající. Podle integrálního kritéria (Věta 5.38) stačí vyšetřit pouze konvergenci/divergenci nevlastního integrálu

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x.$$

To ale již dávno víme: Pro $\alpha > 1$ integrál konverguje a pro $\alpha \in (0, 1]$ integrál diverguje.
Závěr: Pro $\alpha > 1$ řada konverguje a pro $\alpha \leq 1$ řada diverguje. ◯

Závěrem můžeme jen konstatovat, že existuje celá řada dalších kritérií pro konvergenci/divergenci řad s nezápornými členy.

5.3 Řady s libovolnými členy

Nyní se budeme zabývat řadami $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obecně, tzn. a_n nyní nemusejí být nutně nezáporná či kladná čísla. Ona je to poměrně složitá záležitost, takže se podíváme nejprve na speciální ale poměrně často se vyskytující případ. Budeme se věnovat řadám, jejichž členy pravidelně mění znaménko, tzn. sudé členy jsou kladné, liché záporné nebo naopak – viz následující definici.

Definice 5.40 Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *alternující*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\operatorname{sgn} a_n = -\operatorname{sgn} a_{n+1} \neq 0.$$

Mezi nejznámější příklady alternujících řad patří tzv. *Leibnizova řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

či Grandiho řada (viz Příklad 5.12). Obecně každá alternující řada může být zapsána ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n,$$

kde c_n jsou buď všechna kladná, nebo jsou všechna záporná. V našich úvahách se můžeme pro jednoduchost omezit na případ, že všechna c_n jsou kladná – rozmyslete proč.

Věta 5.41 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$$

konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť zmíněná řada konverguje. Podle nutné podmínky konvergence (Věta 5.7) platí

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} c_n = 0.$$

Vynásobíme-li posloupnost $\left\{(-1)^{n-1} c_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ omezenou posloupností $\left\{(-1)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dostáváme posloupnost mající nulovou limitu. Proto

$$0 = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} (-1)^{n+1} c_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} c_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

($\Leftarrow$): Předpokládejme $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - \cdots - c_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2n-1} - c_{2n}),$$

kde si všimneme, že uvedené výrazy v závorkách jsou nezáporné, protože $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Pak posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ (vybraná z posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$) je neklesající. Podobně pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n+1} = c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + c_{2n+1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2n} - c_{2n+1}),$$

kde si opět všimneme, že uvedené výrazy v závorkách jsou opět nezáporné, protože $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Pak posloupnost $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ (vybraná z posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$) je nerostoucí. Protože

$$c_1 - c_2 = s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n} + c_{2n+1} = s_{2n+1} \leq s_1 = c_1,$$

pak jsou posloupnosti $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ také ohraničené. Obě jsou tedy konvergentní. Navíc

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = 0,$$

tzn. mají stejnou limitu. Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existuje a je vlastní. □

Příklad 5.42 Rozhodněte o konvergenci Leibnizovy řady, tzn. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots .$$

Řešení. Víme, že $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných čísel a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Podle Leibnizova kritéria je řada konvergentní. ◯

Představme si další (a zároveň v těchto skriptech poslední) dvě kritéria pro řady s libovolnými členy. Lze je použít i na řady jiné než alternující. K tomu, abychom tato kritéria mohli snadněji dokázat, budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 5.43 (Abelovo lemma)**.** *Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mají následující vlastnosti:*

- *$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní,*
- *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má ohraničenou posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tzn. existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$|s_n| \leq M.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \right| \leq M\left(|c_1| + 2|c_n|\right).$$

Důkaz. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k a_k &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n = c_1 s_1 + c_2(s_2 - s_1) + \cdots + c_n(s_n - s_{n-1}) \\ &= s_1(c_1 - c_2) + s_2(c_2 - c_3) + \cdots + s_{n-1}(c_{n-1} - c_n) + s_n c_n.\end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření, použitím trojúhelníkové nerovnosti, ohraničenosti posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

a faktu, že rozdíly $c_1 - c_2$, $c_2 - c_3$, …, $c_{n-1} - c_n$ mají stejné znaménko, dostáváme

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} c_k a_k\right| &\le |s_1||c_1 - c_2| + \cdots + |s_{n-1}||c_{n-1} - c_n| + |s_n||c_n| \\ &\le M\left(|c_1 - c_2| + |c_2 - c_3| + \cdots + |c_{n-1} - c_n| + |c_n|\right) \\ &= M\left(|c_1 - c_2 + c_2 - c_3 + \cdots + c_{n-1} - c_n| + |c_n|\right) \\ &= M\left(|c_1 - c_n| + |c_n|\right) \le M\left(|c_1| + |c_n| + |c_n|\right) \\ &= M\left(|c_1| + 2|c_n|\right)\end{aligned}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Věta 5.44 (Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *mají následující vlastnosti:*

- $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *a*
- *posloupnost částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je ohraničená.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|s_n| \le M.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak podle předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ platí

$$|c_n| < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Dále pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ s využitím trojúhelníkové nerovnosti máme

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |s_n - s_m| \le |s_n| + |s_m| \le 2M.$$

Podle Abelova lemmatu (Lemma 5.43) pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \le m < n$ platí

$$\begin{aligned}|c_{m+1}a_{m+1} + \cdots + c_n a_n| &\le 2M\left(|c_{m+1}| + 2|c_n|\right) < 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + 2\frac{\varepsilon}{6M}\right) \\ &= 2M\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)\frac{\varepsilon}{M} = 2\frac{1+2}{6}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Podle Bolzanovy–Cauchyovy nutné a postačující podmínky (Věta 5.9) pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje. □

Poznamenejme, že Leibnizovo kritérium pro alternující řady se dá chápat jako důsledek právě dokázaného Dirichletova kritéria, položíme-li

$$a_n = (-1)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 5.45 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{4} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \cdots .$$

Řešení. Zřejmě nejde ani o řadu z nezápornými členy, ani o alternující řadu. Zkusme ověřit, že řada splňuje předpoklady Dirichletova kritéria. Označíme-li $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sice osciluje, nicméně posloupnost jejích částečných součtů je ohraničená (zdola nulou, shora číslem $1+\sqrt{2}$). Označíme-li dále $c_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, tak také posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje předpoklady zmíněné věty. Podle Dirichletova kritéria (Věta 5.44) řada konverguje. ◯

Věta 5.46 (Abelovo kritérium)**.** *Nechť $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mají následující vlastnosti:*

- *$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní,*
- *$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a*
- *řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje.

Důkaz. Podle předpokladu ohraničenosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje $M > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_n| < M.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak vzhledem ke konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky (Věta 5.9) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $n_0 \le m < n$ tak, že

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Podle Abelova lemmatu (Lemma 5.43) pro $n_0 \le m < n$ platí

$$|c_{m+1}a_{m+1} + \cdots + c_n a_n| \le \frac{\varepsilon}{3M} \left(|c_{m+1}| + 2|c_n|\right) < \frac{\varepsilon}{3M} \left(M + 2M\right) = \varepsilon.$$

Opět podle Bolzanovy–Cauchyovy věty (Věta 5.9) řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje. □

Poznámka 5.47 Podíváme-li se na tvrzení Dirichletova a Abelova kritéria, vidíme mnoho podobností. Obě tvrdí, že za jistých podmínek řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ konverguje. Dále mají stejný předpoklad monotónnosti posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Liší se pouze ve zbývajících dvou předpokladech. V Dirichletově kritériu se požaduje po $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, aby měla nulovou limitu, ale v Abelově kritériu se chce po této posloupnosti jen aby byla ohraničená – totiž konvergence posloupnosti implikuje její ohraničenost. Tedy podmínka na $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ je v Dirichletově kritériu *silnější.* Na druhou stranu, v Dirichletově kritériu se chce po řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, aby měla pouze ohraničenou posloupnost částečných součtů, zato v Abelově kritériu se chce, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ byla konvergentní, tzn. aby její posloupnost částečných součtů byla konvergentní. Zde vidíme, že podmínka na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *silnější* zase v Abelově kritériu. Nelze tedy říci, že by jedno kritérium bylo slabší/silnější než to druhé.

5.3.1 Absolutní a relativní konvergence

Nyní se budeme se bavit o vztahu mezi konvergencí/divergencí řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

To u řad s nezápornými členy není nijak zajímavé, protože jde vlastně o jednu a tutéž řadu. Naopak, mění-li členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ znaménko, situace je o dost zajímavější. Následující věta nám umožní v některých případech pro vyšetřování konvergence řad s libovolnými členy použít kritéria pro řady s nezápornými členy.

Věta 5.48. *Jestliže řada* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konverguje, pak konverguje i řada* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle Bolzanovy–Cauchyovy věty (Věta 5.9) pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$ platí

$$\big||a_{m+1}| + \cdots + |a_n|\big| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_0$ platí

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| = \big||a_{m+1}| + \cdots + |a_n|\big| < \varepsilon,$$

kde první nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje také Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. □

Máme-li např. zjistit, zda řada s libovolnými členy konverguje, můžeme se napřed podívat na řadu sestavenou z absolutních hodnot jejích členů, tzn. místo řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. To je ale řada s nezápornými členy! Můžeme na ni s výhodou použít kritéria z předchozí části. Pokud by ovšem řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní nebyla, nic to neříká o konvergenci či divergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 5.49 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \frac{\sin 4}{2^4} + \cdots .$$

Řešení. Vypočítáním prvních pár členů řady zjistíme, že nejde ani o řadu s nezápornými členy a ani o alternující řadu, takže nelze použít Leibnizovo kritérium (Věta 5.41). Použití Dirichletova nebo Abelova kritéria zase vyžaduje více práce. Proveďme to jednodušeji. Uvažujme řadu vytvořenou z absolutních hodnot členů zadané řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{2^n},$$

což je řada s nezápornými (dokonce s kladnými) členy. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ je konvergentní geometrická řada, pak podle 1. srovnávacího kritéria (Věta 5.18) i řada z absolutních hodnot je konvergentní. Pak ale podle Věty 5.48 je vyšetřovaná řada rovněž konvergentní. ○

Poznatek z Věty 5.48 nás může inspirovat k zavedení následujících dvou pojmů.

Definice 5.50 Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *relativně (neabsolutně) konverguje.*

Poznámka 5.51

- Pomocí těchto nových pojmů lze Větu 5.48 formulovat takto: „je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je také konvergentní“. Mimochodem, kdyby toto neplatilo, pojem absolutní konvergence by byl dosti matoucí. Jak uvidíme dále, pojmy absolutní a relativní konvergence budou užitečné u přerovnání řad.

- Je potřeba si uvědomit, že absolutní konvergence, relativní konvergence a divergence jsou navzájem se vylučující pojmy.

- Rozmyslete si fakt, že konvergentní řada *s nezápornými členy* je absolutně konvergentní a divergentní řada *s nezápornými členy* je divergentní (nemůže být relativně konvergentní).

Ukažme si, že pojem relativní konvergence není prázdný, tzn. ukažme si, že existuje řada, která relativně konverguje.

Příklad 5.52 Leibnizova řada (z Příkladu 5.42) relativně konverguje, protože podle Leibnizova kritéria (Věta 5.41) řada konverguje, ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

podle Příkladu 5.4 diverguje. ○

Věta 5.53. *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Důkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Platí

$$|s_n| = |a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n| = t_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\left| \lim_{n\to\infty} s_n \right| \leq \lim_{n\to\infty} t_n, \quad \text{tzn.} \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$ □

5.3.2 Přerovnání řad

Existuje něco jako komutativní zákon pro sčítání nekonečného množství čísel, tzn. lze zaměňovat pořadí sčítanců v dané řadě, abychom dostali stejný součet? Odpověď je velmi zajímavá – pro všechny absolutně konvergentní řady to platí (Věta 5.56), a pro všechny relativně konvergentní nikoliv (Věta 5.59).

Definice 5.54 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada, $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel, která je zároveň bijekce $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ (tzn. každé přirozené číslo se vyskytuje v posloupnosti právě jednou). Pak říkáme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \cdots$$

vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (neboli je *přerovnání řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

Příklad 5.55 Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

lze přerovnat třeba takto

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots ,$$

kde posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Definice 5.54 je definovaná předpisem $k_{2n} = 2n - 1$ a $k_{2n-1} = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. ◯

Věta 5.56 (o přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *vzniklá přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je libovolné. Z absolutní konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a Bolzanovy–Cauchyovy věty plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ pro něž $n_0 \le m < n$ platí

$$|a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Protože $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je permutace $\mathbb{N}$, existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\{1, \ldots, n_0\} \subset \{k_1, \ldots, k_p\}, \tag{5.2}$$

tedy mezi prvními p členy posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je všech prvních n_0 přirozených čísel. Z implikace $A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$ (platící pro každé dvě množiny A a B) vyplývá, že

$$\{k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots\} \subset \{n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}, \tag{5.3}$$

tedy všechny členy posloupnosti $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ s indexem větším než p jsou větší než n_0. Uvažujme nyní $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $p \le m < n$. Označíme-li

$$t = \max\{k_{m+1}, k_{m+2}, \ldots, k_n\},$$

pak $t > n_0$, a tedy platí

$$|a_{k_{m+1}}| + \cdots + |a_{k_n}| \overset{(\diamond)}{\le} |a_{n_0+1}| + \cdots + |a_t| \overset{(\heartsuit)}{<} \varepsilon.$$

Je třeba doplnit, že

- nerovnost ($\diamond$) plyne z definice t a (5.3) a
- nerovnost ($\heartsuit$) plyne z (5.1) pro $m = n_0$ a $n = t$.

Z Bolzanovy–Cauchyovy věty (Věta 5.9) plyne absolutní konvergence řady $\sum a_{k_n}$.
Nyní dokážeme rovnost součtů obou řad. Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti částečných součtů řad $\sum a_n$ a $\sum a_{k_n}$. Pro všechna $n > \max\{n_0, p\}$ (připomeňme, že p závisí na n_0 a to zase závisí na ε) platí

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| &= |a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n - (a_{k_1} + \cdots + a_{k_n})| \\ &\overset{(\clubsuit)}{\le} |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \cdots + |a_q| \overset{(\spadesuit)}{<} \varepsilon, \end{aligned}$$

kde $q = \max\{n, k_1, \ldots, k_n\}$. Nerovnost ($\clubsuit$) plyne z toho, že *každý* sčítanec ze součtu $a_1 + \cdots + a_{n_0}$ je obsažen v součtu $a_{k_1} + \cdots + a_{k_n}$ – což zase plyne přímo z (5.2). To znamená, že členy s indexem menším nebo rovným n_0 se již v absolutní hodnotě před ($\clubsuit$) vyskytovat nebudou. Poté již v této absolutní hodnotě zůstane jen rozdíl součtu $a_{n_0+1} + \cdots + a_n$ a součtu těch členů z původního součtu $a_{k_1} + \cdots + a_{k_n}$, které se dosud neodečetly. Nyní může ještě dojít k odečtení členů se stejným indexem. To, co v absolutní hodnotě nyní zůstalo, je součet čísel ve tvaru a_i nebo $-a_i$, kde $n_0 < i \le q$ – přičemž každý takový index se v něm vyskytuje nejvýše jednou. Na ni se použije trojúhelníková nerovnost. Totiž pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí nejen $|a+b| \le |a| + |b|$, ale také $|a-b| \le |a| + |b|$, tzn. platí např. $|a+b-c| \le |a| + |b| + |c|$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vzniklý součet je již menší nebo roven součtu absolutních hodnot čísel $|a_i|$ pro $i = n_0 + 1, \ldots, q$. Nerovnost ($\spadesuit$) plyne přímo z (5.1) pro $n = q$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n - t_n = 0$, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. $\square$

Nyní se podíváme na relativně konvergentní řady, kde komutativita neplatí. Dokonce lze dokázat více, viz dále Riemannovu větu (Věta 5.59). Nejprve zavedeme následující označení.

Definice 5.57 Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^+ = \max\{a, 0\}$$

kladnou část čísla a, a

$$a^- = \max\{-a, 0\}$$

zápornou část čísla a.

Snadno se lze přesvědčit o tom, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí

$$a^+, a^- \ge 0, \quad a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-.$$

Abychom dokázali Riemannovu větu, s výhodou využijeme následující lemma.

Lemma 5.58. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *relativně konverguje. Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *divergují k* ∞.

Důkaz. Kdyby obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergovaly, konvergoval by podle Věty 5.11 i jejich součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

což je ve sporu s relativní konvergencí. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ diverguje. Pak podle Věty 5.11 konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

což je opět spor. Podobně dostáváme spor v případě, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konverguje. ☐

Věta 5.59 (Riemannova)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ relativně konverguje.*

- *Pro každé $s \in \mathbb{R}$ existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$.*
- *Existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \infty$.*
- *Existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = -\infty$.*
- *Existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ osciluje.*

Důkaz. Je založen na faktu, že řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme napsat ve tvaru

$$(a_1^+ - a_1^-) + (a_2^+ - a_2^-) + (a_3^+ - a_3^-) + \cdots$$

a ta má stejný součet jako řada

$$a_1^+ + (-a_1^-) + a_2^+ + (-a_2^-) + a_3^+ + (-a_3^-) + \cdots$$

protože vždy alespoň jedno z čísel a_i^+ nebo a_i^- je nulové. Druhým důležitým faktem je divergence (k ∞) obou řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
Ukažme pouze, jak zkonstruovat přerovnání řady se součtem rovným danému číslu $s \in \mathbb{R}$: Z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ plyne existence nejmenšího indexu $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$a_1^+ + a_2^+ \cdots + a_{n_1}^+ > s.$$

Z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ zase plyne existence nejmenšího indexu $m_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$a_1^+ + a_2^+ \cdots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + a_2^- \cdots + a_{m_1}^-) < s.$$

Z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ plyne existence nejmenšího indexu $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$a_1^+ + a_2^+ \cdots + a_{n_1}^+ - (a_1^- + a_2^- \cdots + a_{m_1}^-) + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ > s.$$

Tímto způsobem dostaneme přeuspořádání původní řady (až na nulové sčítance, které nemají vliv na konvergenci ani na hodnotu součtu). Ještě je potřeba dokázat, že tato řada konverguje k s. Podívejme se podrobně na posloupnost částečných součtů této přerovnané řady – označme ji $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Vzhledem k nezápornosti kladných a záporných částí a uvedené konstrukci vyplývá, že

$$\begin{aligned}
&t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n_1} < s + a_{n_1}^+,\\
&t_{n_1} \geq t_{n_1+1} \geq t_{n_1+2} \geq \cdots \geq t_{n_1+m_1} > s - a_{m_1}^-,\\
&t_{n_1+m_1} \leq t_{n_1+m_1+1} \leq \cdots \leq t_{n_1+m_1+n_2} < s + a_{n_2}^+,\\
&t_{n_1+m_1+n_2} \geq t_{n_1+m_1+n_2+1} \geq \cdots \geq t_{n_1+m_1+n_2+m_2} < s - a_{m_2}^+,\\
&\dots
\end{aligned}$$

Nakreslete si to. Z nutné podmínky konvergence máme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tedy i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^- = 0$. S využitím věty o třech limitách dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = s$.
Ostatní tvrzení se dokáží použitím stejné myšlenky – více třeba v [4]. $\square$

Poznámka 5.60 Riemannova věta tedy říká, že vhodným přeuspořádáním členů relativně konvergentní řady lze vyrobit řadu s libovolným součtem, popř. divergentní k $\pm\infty$ i oscilující řadu.

5.4 Součin řad

Nakonec se podívejme jak je to s distributivním zákonem pro nekonečné řady.

Konkrétně máme na mysli následující. Uvažujme reálná čísla $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Pak již od základní školy víme, že platí

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)\cdot(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = &a_1b_1 + \cdots + a_1b_n\\
&+ a_2b_1 + \cdots + a_2b_n\\
&+ \cdots\\
&+ a_mb_1 + \cdots + a_mb_n.
\end{aligned}$$

Jinak řečeno, zmíněný součin mnohočlenů je roven součtu součinů

$$a_ib_j, \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n.$$

Přirozeně lze očekávat, že součin dvou řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

by měl být součet všech součinů

$$a_ib_j, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Tyto součiny si můžeme pěkně uspořádat do „nekonečné matice“

$$\begin{matrix}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots\\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots\\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{matrix}$$

Zbývá vyřešit otázku, *v jakém pořadí sečíst tyto součiny*?

Ukažme si dva nejznámější způsoby sečtení těchto čísel.

Definice 5.61 Uvažujme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

- Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ s členy rovnými
$$\gamma_1 = a_1b_1,\ \gamma_2 = a_1b_2 + a_2b_1,\ \gamma_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1,\ \dots$$
nazýváme *Cauchyův součin řad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ s členy rovnými
$$\delta_1 = a_1b_1,\ \delta_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1,\ \delta_3 = a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_2b_3 + a_3b_1,\ \dots$$
nazýváme *Dirichletův součin řad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Poznámka 5.62

- Členy Cauchyova ani Dirichletova součinu řad nejsou přímo součiny a_ib_j, ale rovnou jejich konečné součty. To ale vzhledem k asociativitě řad (Věta 5.13) vyjde nastejno.
- Všimněme si, jakými členy jsou tvořeny členy Cauchyova a Dirichletova součinu – nejlépe to uvidíme na výše uvedené „nekonečné matici". U Cauchyova součinu je n-tý člen tvořen součty prvků na n-té vedlejší diagonále této matice. U Dirichletova součinu je zase zajímavé to, že jeho n-tý částečný součet je součet členů v submatici tvořenou prvními n řádky a n sloupci – toho využijeme v důkazech.

Nejprve se podívejme na obecný případ uspořádání členů a_ib_j do řady.

Věta 5.63. *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Nechť členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jsou tvořeny právě všemi činiteli a_ib_j, $i, j \in \mathbb{N}$ a každý se v ní vyskytuje právě jednou. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je také absolutně konvergentní a platí*
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Důkaz. Podle předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = t \in \mathbb{R}$. Označme
$$c_n = a_{k_n} b_{\ell_n}$$
kde $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou bijekce na $\mathbb{N}$ (tzn. obě tyto posloupnosti obsahují právě jednou každé přirozené číslo). Zvolme $n \in \mathbb{N}$ libovolně a označme
$$p = \max\{k_1, \dots, k_n\} \quad \text{a} \quad q = \max\{\ell_1, \dots, \ell_n\}.$$
Pak
$$\begin{aligned} |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| &= |a_{k_1}| \cdot |b_{\ell_1}| + |a_{k_2}| \cdot |b_{\ell_2}| + \dots + |a_{k_n}| \cdot |b_{\ell_n}| \\ &\le \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{i=1}^{p} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{q} |b_j| \le s \cdot t. \end{aligned}$$

Protože $n \in \mathbb{N}$ je libovolné, dostáváme tak, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ je omezená, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ je absolutně konvergentní. Dokažme, že platí vzorec z tvrzení věty. Vzhledem k absolutní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ má každé další její přerovnání stejný součet. Vyberme si třeba přerovnání $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$, tedy Dirichletův součin řad. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupně posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$. Pak platí

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = s_n \cdot t_n$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme i požadovanou rovnost. □

Podívejme se nyní, co platí speciálně pro Dirichletův součin.

Věta 5.64. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady a $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ je jejich Dirichletův součin. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ je konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

Důkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$. Pak

$$w_n = s_n t_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud okamžitě plyne jak konvergence Dirichletova součinu, tak rovnost. □

Konečně se podívejme na Cauchyův součin řad.

Věta 5.65 (Mertensova)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ konvergují a alespoň jedna z nich absolutně. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ je Cauchyův součin těchto řad. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = ab.$$

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje. Označme $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ je Cauchyův součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Platí

$$\begin{aligned} s_n &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \\ &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) \\ &= a_1 v_n + a_2 v_{n-1} + \cdots + a_n v_1. \end{aligned}$$

Definujme pomocnou posloupnost $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$w_n = v_n - b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z $\lim_{n\to\infty} v_n = b$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Dále z rovnosti $v_n = w_n + b$ pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} s_n &= a_1(b+w_n) + a_2(b+w_{n-1}) + \cdots + a_n(b+w_1) \\ &= (a_1+a_2+\cdots+a_n)b + a_1w_n + a_2w_{n-1} + \cdots + a_nw_1 \\ &= t_nb + u_n, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli novou posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ vztahem

$$u_n = a_1w_n + a_2w_{n-1} + \cdots + a_nw_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} t_n = a$, platí $\lim_{n\to\infty} t_nb = ab$. Takže dokážeme-li $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, bude tím dokázáno, že $\lim_{n\to\infty} s_n = ab$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ab$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, je posloupnost jejích částečných součtů omezená, tj. existuje $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ tak, že

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < h, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, je posloupnost $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ohraničená, tj. existuje $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tak, že

$$|w_n| < k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí

$$|w_n| < \frac{\varepsilon}{2h}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $n_2 \leq n < m$ platí

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2n_0$ platí

$$\begin{aligned} |u_n| &= |a_1w_n + a_2w_{n-1} + \cdots + a_{n_0}w_{n-n_0+1} + a_{n_0+1}w_{n-n_0} + \cdots + a_nw_1| \\ &\leq |a_1||w_n| + |a_2||w_{n-1}| + \cdots + |a_{n_0}||w_{n-n_0+1}| \\ &\quad + |a_{n_0+1}||w_{n-n_0}| + \cdots + |a_n||w_1| \\ &< (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}|)\,\frac{\varepsilon}{2h} + (|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n|)\,k \\ &< h\frac{\varepsilon}{2h} + \frac{\varepsilon}{2k}k = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. □

Poznámka 5.66 Shrňme poslední tři věty. Pokud obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergují, je absolutně konvergentní jakkoliv uspořádaný součin řad a jeho součet je roven součinu součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pokud je alespoň jedna z nich absolutně konvergentní, Cauchyův součin je konvergentní. Nejméně chceme po řadách $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ v případě Dirichletova součinu – stačí jejich konvergence.

Kapitola 6

Posloupnosti funkcí

Ve skriptech [13] jsme se bavili o číselných posloupnostech. A to proto, že jsme potřebovali pracovat s uspořádanými nekonečnými seznamy čísel. Formálně jsme posloupnost reálných čísel definovali jako zobrazení přiřazující každému přirozeném číslu reálné číslo. U posloupností funkcí to je podobné, jen nebudeme přiřazovat číslo ale funkci.

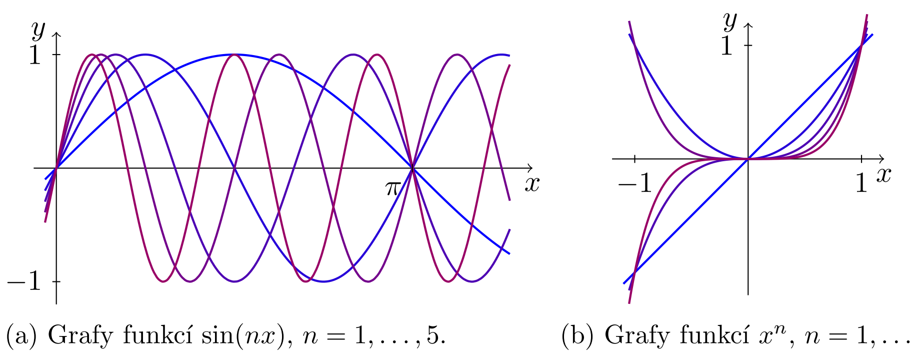
V této kapitole se opět zaměříme na to, co nás na posloupnostech nejvíc zajímá – jejich limity. A pro jednoduchost budeme mluvit pouze o posloupnostech funkcí jedné proměnné. Zobecnění pro funkce více proměnných je pak analogické.

6.1 Základní definice a značení

Definice 6.1 Nechť $D \subset \mathbb{R}$ a funkce $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ definované na této množině (tzn. $D \subset \mathcal{D}(f_n)$). Zobrazení, které každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje funkci f_n nazýváme *posloupnost funkcí na množině D* a značíme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

Příklad 6.2 Posloupnostmi funkcí na $\mathbb{R}$ jsou např. $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Obě jsou definované na celém $\mathbb{R}$. Grafy posloupností funkcí se sice nedají zobrazit, můžeme si ale zobrazit grafy prvních pár členů, viz Obrázek 6.1.



(a) Grafy funkcí $\sin(nx)$, $n = 1, \ldots, 5$.
(b) Grafy funkcí x^n, $n = 1, \ldots, 5$.

Obrázek 6.1: Posloupnosti z Příkladu 6.2.

6.2 Bodová konvergence

Seznamme se nejprve s nejjednodušším typem konvergence posloupnosti funkcí – bodovou. Samotný název je výstižný. Nejde vlastně nic jiného než o konvergenci posloupností funkčních hodnot $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pro pevná x.

Definice 6.3 Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na množině $D \subset \mathbb{R}$.

- Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje v bodě* $\bar{x} \in D$, jestliže posloupnost $\{f_n(\bar{x})\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.
- Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *(bodově) konverguje na množině* $M \subset D$, jestliže $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ve všech bodech množiny M. Funkci $f : M \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in M \tag{6.1}$$
nazýváme *(bodovou) limitou posloupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *na množině* M. Pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* f *bodově na* M a značíme „$f_n \to f$ na M pro $n \to \infty$“.
- Množinu všech bodů z množiny D, ve kterých posloupnost konverguje, nazýváme *oborem (bodové) konvergence posloupnosti* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Příklad 6.4 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Podívejme se nejprve pro jednoduchost na konvergenci v jednom bodě, konkrétně v bodě $\bar{x} = \frac{3}{4}$. Protože

$$f_n\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

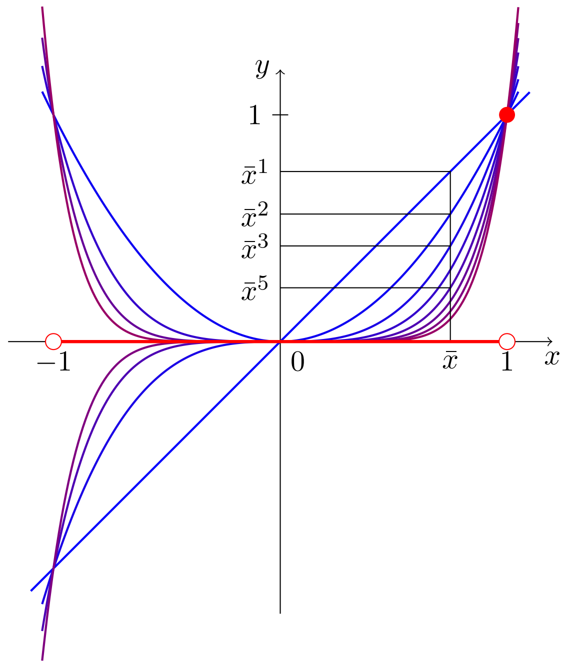
posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v tomto bodě k číslu 0 (všimněte si na Obrázku 6.2 na které ose vykreslujeme prvky této číselné posloupnosti). Pro ostatní body můžeme tuto úvahu provést s využitím znalosti geometrické posloupnosti a zjistíme, že obor konvergence zadané posloupnosti je interval $(-1, 1]$. Navíc, limitní funkce má předpis

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 1 & \text{pro } x = 1, \end{cases}$$

viz Obrázek 6.2. ○

Příklad 6.5 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. K nalezení limitní funkce použijeme vztah (6.1). Zvolíme pevně číslo $x \in \mathbb{R}$ a budeme zkoumat posloupnost reálných čísel $\left\{\mathrm{e}^{-nx^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Platí

$$\mathrm{e}^{-nx^2} = \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^n,$$

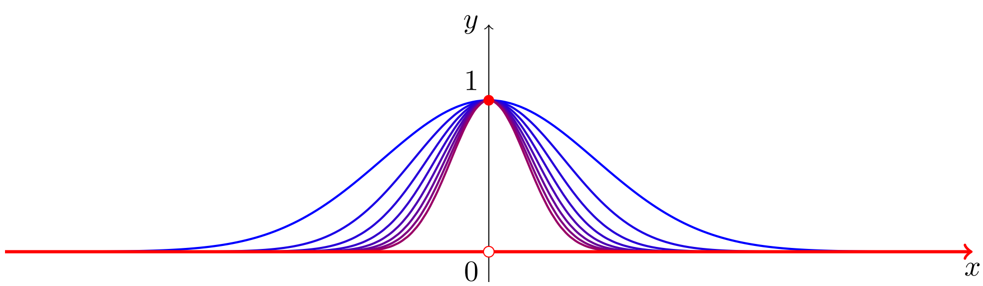


Obrázek 6.2: Grafy prvních pár členů posloupnosti $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ a její limity (červeně).

z čehož je vidět, že pro $x = 0$ posloupnost konverguje k číslu 1 a pro $x \neq 0$ jde k 0 (protože $\mathrm{e}^{-x^2} \in (0, 1)$). Tedy posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$, viz Obrázek 6.3. ◯



Obrázek 6.3: Grafy prvních pár členů posloupnosti a její limity (červeně) z Příkladu 6.5.

Příklad 6.6 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1), \quad x \in (0, \infty), \ n \in \mathbb{N}.$$

Pro pevně zvolené $x > 0$, $x \neq 1$ platí

$$f_n(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln x} - 1}{\frac{1}{n}\ln x} \ln x \to \ln x,$$

kde jsme využili znalosti limity
$$\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^y-1}{y}=1.$$
Pro $x=1$ platí $f_n(1)=0$, tedy $f(1)=0=\ln 1$. Posloupnost $\{f_n\}$ tedy konverguje k ln na intervalu $(0,\infty)$. ◯

6.3 Stejnoměrná konvergence

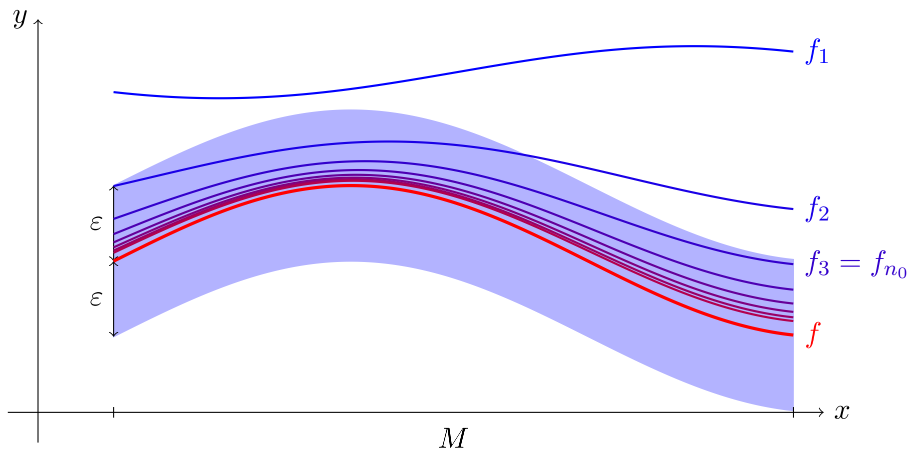
Na rozdíl od posloupností reálných čísel, u posloupností funkcí se budeme bavit více typy konvergence. V Příkladech 6.4 a 6.5 sice byly členy posloupností spojité funkce, ale jejich limita už spojitá nebyla. K tomu, aby se spojitost členů posloupnosti přenesla i na její limitu bodová konvergence nestačí. Definujme silnější pojem konvergence.

Definice 6.7 Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na neprázdné množině $D\subset\mathbb{R}$. Řekneme, že *posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je stejnoměrně konvergentní na množině* $M\subset D$, jestliže existuje funkce $f: M\to\mathbb{R}$ taková, že
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\ \forall x\in M\ :\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$
a značíme „$f_n\rightrightarrows f$ na M pro $n\to\infty$“.

Poznámka 6.8

- Srovnejme pojem stejnoměrné a bodové konvergence. Mějme dánu posloupnost reálných funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, definovaných na $D\subset\mathbb{R}$, $f: M\to\mathbb{R}$, kde $M\subset D$. Všimněte si, že tvrzení $f_n\to f$ na M je ekvivalentní s výrokem
$$\forall x\in M\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\ :\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$
Přitom tvrzení $f_n\rightrightarrows f$ na M je zase ekvivalentní s výrokem
$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\ \forall x\in M\ :\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$
Tyto dvě definice se liší *jen* pořadím kvantifikovaného výrazu $\forall x\in M$. Rozdíl je v tom, že u bodové konvergence může přirozené číslo n_0 být pro každé x jiné (tzn. závisí jak na ε tak na x), ale u stejnoměrné konvergence hodnota n_0 nezávisí na výběru $x\in M$ (tzn. pro dané ε a pro všechna x je ho třeba zvolit stejné).
- *Stejnoměrná konvergence implikuje bodovou konvergenci*, ale naopak to neplatí, viz Příklad 6.10. Stejnoměrná konvergence je tedy silnější než bodová konvergence.

Poznámka 6.9 (geometrický význam stejnoměrné konvergence) Stejnoměrnou konvergenci, tedy nezávislost čísla n_0 na x si lze pěkně představit na obrázku. Nejprve si pro $\varepsilon>0$ a funkci f definovanou na množině M představme ε-*pás funkce* f, čímž rozumíme množinu
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x\in M\ \wedge\ |y-f(x)|<\varepsilon\}.$$
Pak $f_n\rightrightarrows f$ na M právě tehdy, když ke zvolenému $\varepsilon>0$ existuje takový index n_0, že grafy funkcí f_n *pro všechna* $n\geq n_0$ leží v ε-pásu limitní funkce f, viz Obrázek 6.4



Obrázek 6.4: Grafy pár členů posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, její limita f (červeně) a ε-pás funkce f (světle modře).

Příklad 6.10 Uvažujme posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a její limitu f z Příkladu 6.4. Ukážeme, že tato posloupnost nekonverguje stejnoměrně ke své limitě na intervalu $(-1, 1)$. Tedy máme ukázat, že existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existují $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a $x \in (-1, 1)$ tak, že

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

To se dá přeformulovat také tak, že máme ukázat existenci $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ bodů z intervalu $(-1, 1)$ tak, že $|f_m(x_m) - f(x_m)| \geq \varepsilon$ pro všechna $m \in \mathbb{N}$. Položme třeba $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a najdeme $x_m \in (-1, 1)$ tak, že $|x_m^m - 0| \geq \frac{1}{2}$. Stačí vzít $x_m = \sqrt[m]{\frac{1}{2}}$. Pak opravdu

$$|f_m(x_m) - f(x_m)| = \left| \left(\sqrt[m]{\frac{1}{2}} \right)^m - 0 \right| = \frac{1}{2} \quad \text{pro všechna } m \in \mathbb{N},$$

viz Obrázek 6.5. K závěru, že posloupnost na intervalu $(-1, 1)$ není stejnoměrně konvergentní dojdeme intuitivně i přímým pohledem na tento obrázek. Totiž všechny členy posloupnosti jsou spojité a v bodě 1 nabývají čísla 1. Proto *žádný* člen této posloupnosti nemůže zůstat v $\frac{1}{2}$-pásu nulové funkce (část tohoto pásu je rovněž na Obrázku 6.5). ○

Příklad 6.11 Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z Příkladu 6.4 konverguje ke své limitě stejnoměrně na *každém* uzavřeném podintervalu $[a, b]$ intervalu $(-1, 1)$.

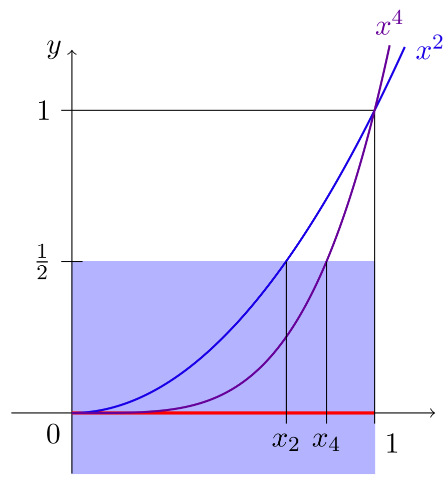
Řešení. Jak již víme z Příkladu 6.4, $f_n \to 0$ na $[a, b]$. Dokažme, že je tato konvergence dokonce stejnoměrná. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože $|a|$, $|b| < 1$, posloupnosti $\{|a|^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{|b|^n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergují k nule, tzn. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|a|^n < \varepsilon$ a $|b|^n < \varepsilon$. Dále pro všechna $x \in [a, b]$ platí $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$, tedy

$$|x|^n \leq \big(\max\{|a|, |b|\}\big)^n = \max\{|a|^n, |b|^n\}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dohromady tedy pro všechna $n \geq n_0$ a $x \in [a, b]$ platí

$$|x^n - 0| = |x|^n \leq \max\{|a|^n, |b|^n\} < \varepsilon.$$ ○

Uveďme si další variantu Bolzanovy–Cauchyovy věty – tentokrát pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí.



Obrázek 6.5: Ilustrace postupu z Příkladu 6.10.

Věta 6.12 (Bolzanova–Cauchyova). *Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na množině M právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \ \forall x \in M \ : \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť tedy posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje k funkci f na M. K libovolnému $\varepsilon > 0$ lze tedy nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pro všechna } x \in M.$$

Tedy pro každou dvojici čísel n, $m \in \mathbb{N}$ splňujících $n \geq n_0$ a $m \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$): Předpokládejme, že je splněna podmínka Věty 6.12. Pak zřejmě platí, že pro každé $x \in M$ splňuje posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro číselné posloupnosti. Existuje tedy vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pro všechna $x \in M$. Tuto limitu označíme symbolem $f(x)$. Tím je definována funkce $f : M \to \mathbb{R}$, která je bodovou limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Stačí tedy jen dokázat, že konvergence je stejnoměrná. Z naší podmínky plyne, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pro všechna } x \in M.$$

Přejdeme-li v této nerovnosti k limitě pro $m \to \infty$, dostáváme

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x \in M,$$

což jsme chtěli dokázat. □

Předchozí věta je nejznámější a nejdůležitější nutnou a postačující podmínkou stejnoměrné konvergence. Používá se zejména v důkazech. Oproti tomu, následující věta dává návod, jak prakticky zjistit, zda daná posloupnost funkcí stejnoměrně konverguje či ne.

Věta 6.13 (nutná a postačující podmínka stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť je dána posloupnost* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *na množině* M *a funkce* $f : M \to \mathbb{R}$*. Označme*

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{na } M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

Důkaz. ($\Rightarrow$): Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak podle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tedy pro všechna $n \geq n_0$ dostáváme

$$\sigma_n = \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$): Nechť naopak $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n < \varepsilon. \qquad \square$$

Příklad 6.14 Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$$

na

(a) intervalu $[0, 1]$,

(b) intervalu $[1, \infty)$.

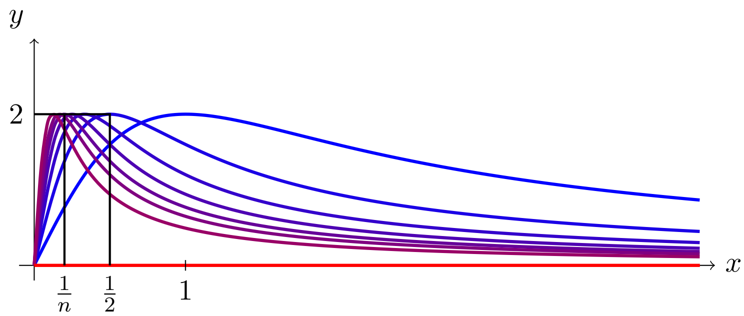
Řešení. Snadno spočítáme, že $f_n \to f$ na $[0, \infty)$, kde $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [0, \infty)$. Dále si všimněme, že

- $f_n(x) > 0$ pro všechna $x \in (0, \infty)$,
- f_n jsou spojité na $[0, \infty)$,
- $f_n(0) = 0$ a $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

viz Obrázek 6.6. Vyšetřeme nyní posloupnost na obou intervalech.

(a) Uvažujme funkce f_n pouze na intervalu $M = [0, 1]$. Abychom mohli použít Větu 6.13, je nutné určit σ_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože f_n jsou spojité na $[0, 1]$, pak

$$\sigma_n = \max_{x \in [0,1]} f_n(x)$$



Obrázek 6.6: Grafy několika prvních členů posloupnosti funkcí z Příkladu 6.14.

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Funkce f_n zřejmě může nabývat svého maxima buď v krajních bodech definičního intervalu nebo ve stacionárních bodech. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x > 0$ platí

$$f_n'(x) = \frac{2n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Zřejmě $f_n'(x) = 0$ právě tehdy když $1 - n^2x^2 = 0$, tedy $x = \frac{1}{n}$ (rovnici totiž řešíme pouze na intervalu $(0, 1)$). Platí

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 2, \qquad f_n(1) = \frac{2n}{1 + n^2}.$$

Z toho vyplývá, že $\sigma_n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 2 \neq 0$. Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaná na $[0, 1]$ nekonverguje stejnoměrně ke své limitní funkci.

(b) Nyní uvažujme posloupnost funkcí na intervalu $[1, \infty)$. Opět z vlastností členů naší posloupnosti dostáváme, že

$$\sigma_n = \max_{x\in[1,\infty)} f_n(x).$$

Podobně jako v části (a) je nutné určit přesnou hodnotu σ_n pro každé $n \in \mathbb{N}$, přitom již víme, že f_n' jsou záporné na $[1, \infty)$, tzn. na tomto intervalu jsou funkce f_n klesající. Z toho vyplývá, že

$$\sigma_n = f_n(1) = \frac{2n}{1 + n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tentokrát ovšem $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, z čehož plyne, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konverguje na $[1, \infty)$. ○

Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností funkcí

Pojem stejnoměrné konvergence se zavádí zejména kvůli tomu, že některé vlastnosti členů stejnoměrně konvergentní posloupnosti se přenáší i na její limitu.

Věta 6.15 (o limitě, Mooreova–Osgoodova)**.** *Nechť f_n, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f_n \rightrightarrows f$ na $(c, c+\delta)$. Dále nechť existují vlastní limity*

$$\lim_{x\to c+} f_n(x)(=: b_n) \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pak také existují $\lim_{x\to c+} f(x)$ a $\lim_{n\to\infty} b_n$ a jsou si rovny, tzn.

$$\lim_{x\to c+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to c+} f_n(x). \tag{6.2}$$

Důkaz. Podle předpokladu konverguje posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ k funkci f na $(c, c+\delta)$, takže z Bolzanovy–Cauchyovy věty (Věta 6.12) plyne, že pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } x \in (c, c+\delta). \tag{6.3}$$

Když v (6.3) přejdeme k limitě pro $x \to c+$, dostaneme pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$ nerovnosti

$$|b_n - b_m| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

takže posloupnost čísel $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro číselné posloupnosti, je tedy konvergentní. Označme $b = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$.
Nyní stačí jen dokázat, že $\lim_{x\to c+} f(x) = b$, tzn. ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in (c, c+\delta), c < x < c+\delta_1\ :\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné konvergence plyne existence čísla $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } x \in (c, c+\delta),\ \text{všechna } n \geq n_1.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } n \geq n_2.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Protože $\lim_{x\to c+} f_{n_0}(x) = b_{n_0}$, existuje $\delta_1 \in (0, \delta)$ tak, že

$$|f_{n_0}(x) - b_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro všechna } x \in (c, c+\delta_1).$$

Z posledních třech nerovností pro $n = n_0$ vyplývá

$$\begin{aligned}|f(x) - b| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - b_{n_0} + b_{n_0} - b| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - b_{n_0}| + |b_{n_0} - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

pro každé $x \in (c, c+\delta_1)$. □

Poznámka 6.16 Všimněte si, že vztah (6.2) vlastně říká, že u stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí lze zaměnit pořadí vyhodnocování limit pro $x \to c+$ a $n \to \infty$.

Poznámka 6.17 Podobné tvrzení jako je ve Větě 6.15 lze vyslovit pro $x \to c-$ a $x \to c$. Vyslovte taková tvrzení a dokažte!

Příklad 6.18 Ukažme si, že bodová konvergence by k rovnosti limit z Mooreovy–Osgoodovy věty (Věta 6.15) nestačila, tzn. bez předpokladu stejnoměrné konvergence tvrzení neplatí. Uvažujme posloupnost funkcí z Příkladu 6.4. Podle Příkladu 6.10 posloupnost nekonverguje stejnoměrně na $(-1,1)$ a nemůže tedy ani na intervalu $(-1,1]$. Podívejme se, jak je to se záměnou limit $\lim\limits_{x\to 1-}$ a $\lim\limits_{n\to\infty}$, tzn. porovnejme limity

$$\lim_{x\to 1-}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1-} f_n(x).$$

Pro všechna $x \in (-1,1)$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Následně

$$\lim_{x\to 1-}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Dále platí, že $\lim\limits_{x\to 1-} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x^n = 1^n = 1$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1-} f_n(x) = 1.$$

V tomto případě tedy není možná záměna limit. ○

Věta 6.19 (o spojitosti limity). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost na J, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

(i) $f_n \rightrightarrows f$ na J a

(ii) f_n jsou spojité na J pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pak f je spojitá na J.

Důkaz. Vezmeme libovolný bod c z intervalu J, který není jeho pravým hraničním bodem. Ze spojitosti funkcí f_n plyne, že $\lim_{x\to c+} f_n(x) = f_n(c)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. S využitím Věty 6.15 a konvergence posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v bodě c dostáváme

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \lim_{x\to c+}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c+} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c),$$

tzn. f je v bodě c spojitá zprava. Podobně můžeme vzít libovolný bod c z intervalu J takový, že není jeho levým hraničním bodem. S využitím Poznámky 6.17 dostáváme

$$\lim_{x\to c-} f(x) = f(c).$$

Z těchto úvah také plyne, že je-li c vnitřním bodem intervalu J, pak f je spojitá v c. □

Jak jsme viděli v příkladech na začátku kapitoly, pokud posloupnost spojitých funkcí konverguje k limitní funkci pouze bodově a nikoliv stejnoměrně, nemusí být limitní funkce spojitá.

Věta 6.20 (o záměně limity a derivace). *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$,*

(i) posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje alespoň v jednom bodě z J,

(ii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje spojitá f_n' na intervalu J a

(iii) posloupnost $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na J.

Pak

(a) posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na J,

(b) označíme-li $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, pak existuje derivace f' na J a platí

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n' \quad \text{na } J. \tag{6.4}$$

Důkaz. ad (a): Stačí ověřit splnění Bolzanovy–Cauchyovy podmínky z Věty 6.12 pro posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zvolme libovolně ale pevně $\varepsilon > 0$. Z (i) plyne existence $c \in [a, b]$ takového, že $\{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost, takže splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro posloupnosti čísel. Tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_1$ platí

$$|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Z předpokladu (iii) plyne zase existence $n_2 \in \mathbb{N}$ takového, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m, n \geq n_2$ platí

$$|f_m'(t) - f_n'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{pro každé } t \in [a, b]. \tag{6.6}$$

Položíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [a, b]$, $x \neq c$ existuje $\xi \in [a, b]$ ležící mezi body x a c takové, že

$$\frac{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(c) - f_n(c))}{x - c} = f_m'(\xi) - f_n'(\xi)$$

(větu o střední hodnotě diferenciálního počtu jsme použili na funkci $f_m - f_n$ na intervalu o hraničních bodech x a c). Úpravou dostáváme

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (f_m'(\xi) - f_n'(\xi))(x - c).$$

Jsou-li $m, n \geq n_0$ pak z (6.5) a (6.6) vyplývá

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(c) - f_n(c)| + |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)||x - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b - a) = \varepsilon.$$

Z Bolzanovy–Cauchyovy věty (Věta 6.12) plyne, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na $[a, b]$

ad (b): Označme limitu posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ symbolem f. Z předpokladu (iii) vyplývá existence funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f_n' \rightrightarrows g$ na $[a, b]$. Dokážeme, že $g = f'$ na $[a, b]$. Nejprve vezmeme $x \in [a, b)$ a dokážeme rovnost $g(x) = f_+'(x)$. Platí

$$\begin{aligned} f_+'(x) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0+} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0+} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} (f_n)_+'(x) = g(x), \end{aligned}$$

kde jsme ve třetí rovnosti použili Mooreovu–Osgoodovu větu (Věta 6.15) – oprávněnost jejího použití bude zdůvodněno dále. Podobně se dá dokázat rovnost $g(x) = f'_-(x)$ pro každé $x \in (a,b]$. Důkaz je tak hotov.
Ukažme ještě, že použití Věty 6.15 bylo vskutku oprávněné! Označíme

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \qquad \text{a} \qquad \varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (0,\delta)$, kde $\delta > 0$ a $x \in [a,b)$ jsou pevně daná čísla. Aplikujeme Mooreovu–Osgoodovu větu (Věta 6.15) na funkce $\varphi_n, \varphi : (0,\delta) \to \mathbb{R}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existují vlastní limity

$$\lim_{h\to 0+} \varphi_n(h) = \lim_{h\to 0+} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = (f_n)'_+(x).$$

Nyní ověřme, že $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $(0,\delta)$. K tomu opět použijeme Bolzanovu–Cauchyovu větu (Věta 6.12). Nejprve pozorujme, že pro každé $m,n \in \mathbb{N}$ a h lze najít $\xi_h \in (0,\delta)$ ležící mezi body 0 a h tak, že platí

$$\begin{aligned}
\varphi_m(h) - \varphi_n(h) &= \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left[(f_m(x+h) - f_n(x+h)) - (f_m(x) - f_n(x))\right] \\
&= \frac{1}{h} h(f'_m(\xi_h) - f'_n(\xi_h)) = f'_m(\xi_h) - f'_n(\xi_h)
\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Protože $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku na $[a,b]$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m,n \geq n_0$ a každé $y \in [a,b]$ platí $|f'_m(y) - f'_n(y)| < \varepsilon$. Tedy pro každé $m,n \geq n_0$ a každé $h \in (0,\delta)$ platí

$$|\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| = |f'_m(\xi_h) - f'_n(\xi_h)| < \varepsilon.$$

Podle Bolzanovy–Cauchyovy věty konečně platí $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $(0,\delta)$. □

Věta 6.21 (o změně pořadí limity a integrálu)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost funkcí na intervalu $[a,b]$, kde a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

- *$f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a,b]$ a*
- *f_n je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.7}$$

Důkaz. Provedeme ho ve dvou krocích: (a) dokážeme, že $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a poté (b) dokážeme platnost rovnosti (6.7).
ad (a): Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu stejnoměrné konvergence existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

pro každé $x \in [a, b]$. Protože $f_{n_0} \in \mathcal{R}([a, b])$, pak existuje dělení intervalu $[a, b]$

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

tak, že

$$S(f_{n_0}, D) - s(f_{n_0}, D) < \frac{\varepsilon}{2},$$

viz [13, Lemma 9.25]. Protože pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)},$$

pak pro každé $i = 1, \dots, n$ také

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_{n_0} - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_{n_0} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Celkově dostáváme

$$\begin{aligned}
S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_{n_0} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_{n_0} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_{n_0} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_{n_0} \right) (x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle [13, Lemma 9.25] je i funkce f riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.
ad (b): Z předpokladu $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ a každé $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

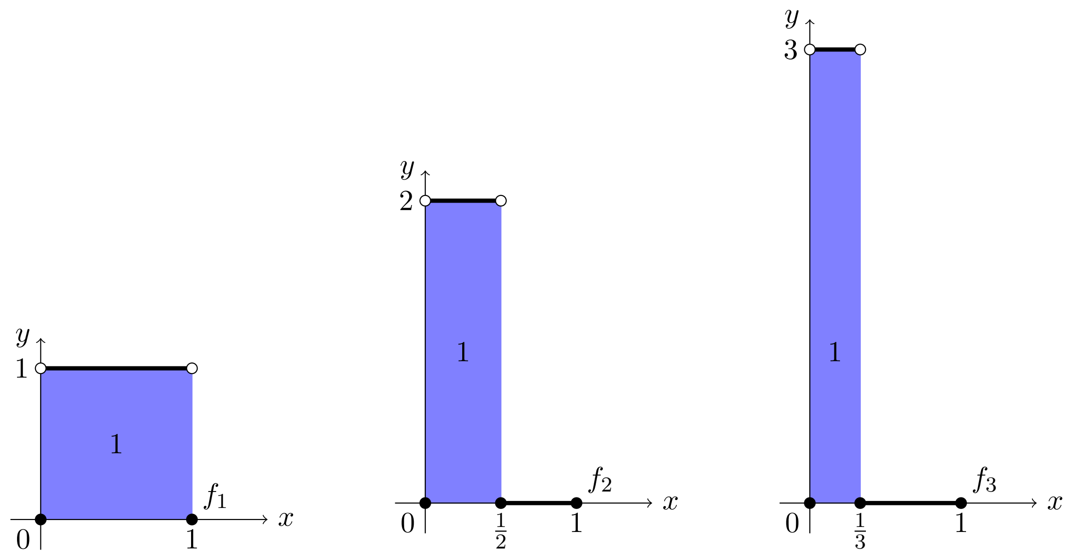
Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\mathrm{d}x = (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Pokud posloupnost funkcí nekonverguje stejnoměrně ke své limitní funkci na $[a, b]$, pak nemusí platit rovnost (6.7) – viz následující příklad.

Příklad 6.22 Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovaných na intervalu $[0, 1]$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ n & x \in (0, 1/n), \\ 0 & x \in [1/n, 0], \end{cases}$$



(a) Graf f_1. (b) Graf f_2. (c) Graf f_3.

Obrázek 6.7: Grafy prvních třech členů posloupnosti z Příkladu 6.22.

viz Obrázek 6.7. Pak

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Sice $f_n \to 0$ na $[0,1]$, ale přitom $f_n \not\rightrightarrows 0$ na $[0,1]$ (pro $\varepsilon = 1$ žádný člen posloupnosti neleží v ε-pásu nulové funkce). Protože

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \not\to 0 = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x,$$

tedy neplatí (6.7). Důvodem je právě fakt, že konvergence není stejnoměrná. ○

6.4 Lokálně stejnoměrná konvergence

Seznamme se ještě s jedním typem konvergence posloupností. Jde o něco slabší typ konvergence než je stejnoměrná. Přesto bude v mnoha ohledech stačit k přenesení některých vlastností z členů posloupnosti na její limitu, podobně jako tomu je u stejnoměrné konvergence.

Definice 6.23 Nechť $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce definované na množině $D \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně k funkci* f *na intervalu* $J \subset D$, jestliže stejnoměrně konverguje na každém jeho kompaktním podintervalu. Značíme

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } J.$$

Tak například posloupnost z Příkladů 6.10 a 6.11 nekonverguje stejnoměrně na $(-1,1)$, ale konverguje na tomto intervalu alespoň lokálně stejnoměrně.

Poznámka 6.24 Lokálně stejnoměrná konvergence na uzavřeném a ohraničeném (tj. kompaktním) intervalu splývá se stejnoměrnou konvergencí na tomto intervalu. Proto je tento pojem zajímavý jen pro otevřené, polootevřené či neohraničené intervaly J.

Věta 6.25 (o spojitosti limity)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost na J, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

(i) $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na* J *a*

(ii) f_n *jsou spojité na* J *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Pak f je spojitá na J.

Důkaz. Nechť $c \in J$ není pravým koncovým bodem intervalu J. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $[c, c + \varepsilon] \subset J$. Podle předpokladu $f \rightrightarrows f$ na $[c, c + \varepsilon]$ a podle Věty 6.19 je f spojitá na intervalu $[c, c + \varepsilon]$. Odtud plyne, že f je spojitá v bodě c zprava. Podobně se dokáže, že f je spojitá zleva v bodě $c \in J$, který není pravým koncovým bodem intervalu J. $\square$

Důkaz následující věty se vede podobně jako u věty předchozí, přitom se využije Věty 6.20.

Věta 6.26 (o záměně limity a derivace)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $J \subset \mathbb{R}$,*

(i) posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje alespoň v jednom bodě z J,

(ii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje spojitá f_n' na intervalu J a

(iii) posloupnost $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně na J.

Pak

(a) posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně na J,

(b) označíme-li $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, pak existuje derivace f' na J a platí

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n' \quad \text{na } J.$$

Dále bychom potřebovali pracovat se záměnou integrace a limity posloupnosti, která lokálně stejnoměrně konverguje. Následující věta je vlastně téměř důsledkem Věty 6.21.

Věta 6.27. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnosti funkcí na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

- $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na intervalu J a*
- f_n *je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném a ohraničeném podintervalu intervalu J pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Pak f je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném a ohraničeném podintervalu intervalu J a pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_c^x f(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad x \in J.$$

Právě uvedené věty využijeme pro vyslovení analogických tvrzeních o lokálně stejnoměrně konvergentních řadách funkcí, viz dále.

Kapitola 7

Řady funkcí

Nyní se konečně dostáváme k řadám funkcí. Ty mají široké využití. Při hledání primitivních funkcí, při řešení diferenciálních rovnic, atd. My se budeme zabývat zejména Taylorovými a Fourierovými řadami. K tomu je ale třeba uvést některé obecné výsledky z teorie funkčních řad. Jak hned uvidíme, spousta věcí nám již bude známá z předchozích dvou kapitol.

7.1 Základní definice a značení

Začněme klasicky definicí.

Definice 7.1 Mějme dánu posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ na neprázdné množině $D \subset \mathbb{R}$. *Řadou funkcí na množině* D (neboli *funkční řadou*) chápeme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{nebo} \quad f_1 + f_2 + f_3 + \cdots .$$

Posloupnost funkcí $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ na D definovanou předpisem

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1, \\ s_2 &= f_1 + f_2, \\ s_3 &= f_1 + f_2 + f_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

nazýváme *posloupností částečných součtů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a její členy *částečné součty této řady.*

Jak asi tušíme, konvergence řady funkcí bude definována pomocí posloupnosti částečných součtů, tedy s výhodou využijeme pojmy a výsledky z předchozí kapitoly.

7.2 Bodová konvergence

Protože jsme již následující pojmy definovali pro posloupnosti funkcí, nebudeme se příliš zdržovat motivačními příklady a shrneme všechny důležité definice do jedné.

Definice 7.2 Nechť je dána řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $D \subset \mathbb{R}$ a její posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(1) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje v bodě* $\bar{x} \in D$, jestliže je posloupnost (čísel) $\{s_n(\bar{x})\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

(2) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *bodově konverguje na množině* $M \subset D$, jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodově konverguje na M.

(3) Jestliže $M \subset D$ je množina všech bodů, ve kterých řada konverguje, pak ji nazýváme *oborem konvergence* a funkci $s : M \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \quad x \in M$$

nazýváme *součtem řady* a označujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = s.$$

(4) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje absolutně na* $A \subset D$, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje absolutně pro každé $x \in A$.

(5) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje relativně (neabsolutně) na* $R \subset D$, jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje relativně (neabsolutně) pro všechna $x \in R$.

Poznámka 7.3

(a) Z předchozí definice tedy vyplývá, že symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rozumíme také limitu posloupnosti (pokud nějaká existuje!) částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ (tedy stejně jako u řad reálných čísel).

(b) Podobně jako u číselných řad je někdy praktické indexovat členy řady od jiného celého čísla než od 1 – zejména od nuly. Například řadu

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

budeme místo $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ psát jako $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, nebo i $\sum_{n=-1}^{\infty} x^{n+1}$, a podobně.

Příklad 7.4 Uvažujme řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n.$$

Pak

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= (1-x)x = x - x^2, \\
s_2(x) &= (1-x)x + (1-x)x^2 = x - x^2 + x^2 - x^3 = x - x^3, \\
&\dots \\
s_n(x) &= x - x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Je jasné, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje pouze pro $x \in (-1, 1]$, a to k funkci s mající hodnoty $s(x) = x$ pro $x \in (-1, 1)$, $s(1) = 0$. Podle definice pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{pro} \quad x = 1. \end{cases}$$

○

Poznámka 7.5 V Příkladu 7.4 jsme vyšetřili konvergenci řady pomocí posloupnosti částečných součtů. Ve většině případů tento postup nelze použít, protože částečné součty nejsme schopni vhodně vyjádřit. Ovšem často nás nezajímá součet řady, ale pouze to, ve kterých bodech řada konverguje (absolutně, relativně) a kde nekonverguje (= diverguje). Pak můžeme zvolit následující postup:

1. Určíme definiční obory všech funkcí f_n a provedeme průnik těchto množin

   $$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(f_n).$$

   Na této množině má smysl vyšetřovat konvergenci řady.

2. Určíme množinu

   $$M_1 = \{x \in D \; ; \; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\}$$

   (viz nutnou podmínku konvergence číselné řady z Věty 5.7). Je jasné, že řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ diverguje pro $x \in D \setminus M_1$, takže se stačí zaměřit *pouze* na množinu M_1.

3. Zvolíme $x \in M_1$ a vyšetřujeme konvergenci číselné řady

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

   pomocí vhodného kritéria z kapitoly 5 (srovnávací, d'Alembertovo, Cauchyho, Raabeho, jejich limitní verze, atd.). Určíme tak množinu

   $$M_2 = \{x \in M_1 \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty\},$$

   což je množina bodů, na které řada konverguje absolutně (u skutečného výpočtu v tomto kroku najdeme pouze část bodů z této množiny a zcela ji určíme až v následujícím kroku).

4. Jestliže $M_2 = M_1$, pak máme úplnou informaci o konvergenci naší řady. Pokud tomu tak není, pak je ještě třeba vyšetřit chování řady na doplňku $M_1 \setminus M_2$, což bývá jen *konečná množina*. Vezmeme postupně všechna $x \in M_1 \setminus M_2$ a vyšetříme konvergenci číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (opět použijeme příslušné kritérium – Leibnizovo, Abelovo, Dirichletovo). Dostaneme množinu

   $$M_3 = \{x \in M_1 \setminus M_2 : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ relativně konverguje}\}.$$

5. Závěr: Na množině $M_2 \cup M_3$ řada konverguje. Na množině $D \setminus (M_2 \cup M_3)$ řada diverguje.

Příklad 7.6 Vyšetřujeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Budeme postupovat podle bodů z Poznámky 7.5.

1. Zřejmě $\mathcal{D}(f_n) = \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tedy $D = \mathbb{R}$.

2. Vztah
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$$
je splněn pouze pro $|x| \leq 1$. Tedy $M_1 = [-1, 1]$.

3. Nyní pro libovolné $x \in M_1$ zjistíme absolutní konvergenci řady, tedy vyšetřujeme řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}.$$
Vyšetřeme limitu
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |x|.$$
Podle d'Alembertova kritéria je řada absolutně konvergentní pro $|x| < 1$. Pro $x = \pm 1$ jde o harmonickou řadu, která je divergentní – viz Příklad 5.4. V těchto bodech řada nekonverguje absolutně. Tedy $M_2 = (-1, 1)$.

4. Protože $M_1 \setminus M_2 = \{-1, 1\}$ je neprázdná množina, musíme ještě na ní vyšetřit relativní konvergenci. Pro $x = -1$ dostáváme řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$
o které je známo, že je relativně konvergentní (viz Příklad 5.52). Pro $x = 1$ dostáváme harmonickou řadu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
o které je zase známo, že je divergentní.

5. *Závěr:* Řada absolutně konverguje pro $x \in (-1, 1)$, relativně konverguje pro $x = -1$ a diverguje pro $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$. ◯

7.3 Stejnoměrná konvergence

Stejně, jako jsme definovali bodovou konvergenci řad pomocí bodové konvergence posloupnosti, budeme definovat stejnoměrnou konvergenci řad pomocí stejnoměrné konvergence posloupnosti.

Definice 7.7 Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na množině* M, jestliže posloupnost jejích částečných součtů konverguje stejnoměrně na množině M.

Opět existuje varianta Bolzanovy–Cauchyovy věty pro tento typ konvergence.

Věta 7.8 (Bolzanova–Cauchyova). *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n,m \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq n < m$ a všechna $x \in M$ platí*

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Tvrzení plyne téměř okamžitě z Bolzanovy–Cauchyovy věty o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí (Věta 6.12) uvědomíme-li si, že stejnoměrná konvergence řady je ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí posloupnosti jejích částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a rovnosti

$$s_m(x) - s_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)$$

pro každé m, $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ a $x \in M$. □

Ještě uvedeme tři kritéria pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

Definice 7.9 Nechť je dána řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na $M \subset \mathbb{R}$ a číselná řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže

$$|f_n(x)| \leq a_n \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a všechna } x \in M, \tag{7.1}$$

říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *majorantní k funkční řadě* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Věta 7.10 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní číselná řada majorantní k funkční řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně konvergentní na M.*

Důkaz. Z konvergence číselné řady $\sum a_n$ plyne, že splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku (viz Větu 5.9), tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna n, $m \in \mathbb{N}$ taková, že $m > n \geq n_0$ platí

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Z předpokladu (7.1) a faktu, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, plyne

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \\ &\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon \end{aligned}$$

pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_0$ a všechna $x \in M$. Podle Věty 7.8 je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na M. □

Příklad 7.11 Dokažte, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$$
je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Protože platí
$$\left|\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$
pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$, a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, podle Weierstrassova kritéria konverguje stejnoměrně zkoumaná řada. ◯

Tvrzení následující věty připomíná stejnojmennou větu z kapitoly o číselných řadách (Věta 5.44). Není to náhoda, jde o jejím zobecnění. Její důkaz je přenechán čtenáři.

Věta 7.12 (Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť posloupnost funkcí $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ a řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definované na množině $M \subset \mathbb{R}$ mají následující vlastnosti:*

- *pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{\varepsilon_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní.*
- *$\varepsilon_n \rightrightarrows 0$ na M,*
- *posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je stejnoměrně ohraničená na M, tzn. existuje $K > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí*
$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right| \leq K.$$

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n$ stejnoměrně konverguje na M.

Stejně lze zobecnit i Abelovo kritérium (Věta 5.46). Zde uvádíme kritérium i pro stejnoměrnou konvergenci řad funkcí. Lze ji dokázat podobně jako Větu 5.46.

Věta 7.13 (Abelovo kritérium)**.** *Nechť funkční posloupnost $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ a řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definované na množině $M \subset \mathbb{R}$ mají následující vlastnosti:*

- *pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{\varepsilon_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní.*
- *$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně ohraničená na M, tzn. existuje $K > 0$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in M$ platí*
$$|\varepsilon_n(x)| \leq K,$$
- *řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na M.*

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n$ stejnoměrně konverguje na M.

Vlastnosti stejnoměrně konvergentních řad funkcí

V této části nás bude zajímat, kdy lze zaměnit pořadí symbolu $\sum_{n=1}^{\infty}$ se symboly $\lim\limits_{x\to c+}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ nebo $\int_a^b$. Přitom využijeme znalosti o stejnoměrně konvergentních posloupnostech z minulé kapitoly a linearitu limit, derivací a integrálu.

Věta 7.14. *Nechť řada funkcí* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *stejnoměrně konverguje k funkci* f *na intervalu* $(c, c+\delta)$*, kde* $c \in \mathbb{R}$*,* $\delta > 0$*, a existují vlastní limity*

$$\lim_{x \to c+} f_n(x) =: B_n \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Pak existuje vlastní limita $\lim_{x \to c+} f(x)$*, řada* $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ *konverguje a platí rovnost*

$$\lim_{x \to c+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to c+} f_n(x). \tag{7.2}$$

Důkaz. Uvažujme posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Z našich předpokladů plyne, že $s_n \rightrightarrows f$ na intervalu $(c, c+\delta)$. Dále platí

$$\lim_{x \to c+} s_n(x) = \lim_{x \to c+} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to c+} f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} B_i,$$

tedy existuje vlastní limita $\lim\limits_{x \to c+} s_n(x)$ (označíme ji b_n) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Aplikujeme nyní Mooreovu–Osgoodovu větu (Věta 6.15) na posloupnost $\{s_n\}$. Pak existují limity $\lim_{x \to c+} f(x)$ a

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

a jsou si rovny, z čehož vyplývá

$$\lim_{x \to c+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x \to c+} \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \lim_{x \to c+} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to c+} f_n(x). \qquad \square$$

Další věty nám umožní přenášet vlastnosti členů řady na její součet.

Věta 7.15 (o spojitosti součtu řady)**.** *Nechť* $J \subset \mathbb{R}$ *je neprázdný interval,* $f_n : J \to \mathbb{R}$ *jsou spojité funkce na* J *a* $f : J \to \mathbb{R}$*. Jestliže* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ *na* J*, pak* f *je spojitá na* J*.*

Důkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pak podle předpokladu

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \rightrightarrows \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{na } J \text{ pro } n \to \infty. \tag{7.3}$$

Protože f_n jsou spojité funkce na J, pak zřejmě jsou na J spojité i všechny funkce s_n (protože s_n je součtem funkcí $f_1, \ldots, f_n$). Z (7.3) a Věty 6.19 plyne, že také f je spojitá na J. $\square$

Důkaz následující věty je přenechán čtenáři. Využije se linearita derivování a Věta 6.20.

Věta 7.16 (o derivování člen po členu). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí na intervalu* $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$,

(i) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje alespoň v jednom bodě,*

(ii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ *existuje spojitá* f_n' *na intervalu* J *a*

(iii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konverguje stejnoměrně na* J.

Pak

(a) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* J,

(b) označíme-li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, *pak existuje derivace* f' *na* J *a platí*

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \quad \text{na } J. \tag{7.4}$$

Poznámka 7.17 Poznamenejme, že vztah (7.4) se dá napsat jako

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

a chápat tak, že derivace součtu řady je rovna součtu řady vzniklé z původní řady zderivováním jejích členů – proto říkáme, že řadu můžeme „derivovat člen po členu“.

Věta 7.18 (o integraci člen po členu). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí na intervalu* $[a, b]$, *kde* a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ *na intervalu* $[a, b]$ *a*

(ii) f_n *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

Pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.5}$$

Důkaz. Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Pak podle předpokladu

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \rightrightarrows f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{na } [a, b] \text{ pro } n \to \infty.$$

Podle věty o záměně limity a integrálu (Věta 6.21) platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Poznámka 7.19 Poznamenejme, že vztah (7.5) se dá napsat jako

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

a chápat tak, že integrál součtu řady přes interval $[a,b]$ je roven součtu řady vzniklé z původní řady zintegrováním jejích členů přes interval $[a,b]$ – proto říkáme, že řadu můžeme „integrovat člen po členu“.

Příklad 7.20 Vypočtěte $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je definovaná jako součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}.$$

Řešení. Z Příkladu 7.11 již víme, že funkce f je dobře definovaná, dokonce řada k ní konverguje stejnoměrně. Přímo tento integrál spočítat nemůžeme, protože ani neznáme funkční předpis funkce f. Z věty o integraci (Věta 7.18) ovšem vyplývá, že

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots\right) = \pi.\end{aligned}$$

Ujasněte si, kterých faktů jsme u každé rovnosti využili. ○

7.4 Lokálně stejnoměrná konvergence

Se stejnojmennou konvergencí jsme se setkali již u posloupností funkcí – právě proto, abychom ji zde použili k definici lokálně stejnoměrné konvergence řad funkcí.

Definice 7.21 Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje lokálně stejnoměrně k funkci f na intervalu $J \subset \mathbb{R}$*, jestliže její posloupnost částečných součtů lokálně stejnoměrně konverguje k f na J; píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } J.$$

Nyní již můžeme s pomocí Vět 6.25, 6.26 a 6.27 formulovat jejich analogie pro řady. Důkazy jsou přenechány čtenáři jako jednoduché cvičení.

Věta 7.22 (o spojitosti součtu řady)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $f_n : J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce na J a $f : J \to \mathbb{R}$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na J, pak f je spojitá na J.*

Věta 7.23 (o derivování člen po členu)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí na intervalu* $J \subset \mathbb{R}$*,*

(i) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje alespoň v jednom bodě,*

(ii) pro každé $n \in \mathbb{N}$ *existuje spojitá* f_n' *na intervalu* J *a*

(iii) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konverguje lokálně stejnoměrně na* J*.*

Pak

(a) řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje lokálně stejnoměrně na* J*,*

(b) označíme-li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$*, pak existuje derivace* f' *na* J *a platí*

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \quad \text{na } J.$$

Věta 7.24 (o integraci člen po členu)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí na intervalu* $J \subset \mathbb{R}$*,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ *na intervalu* J *a*

(ii) f_n *je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném a ohraničeném podintervalu intervalu* J *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*.*

Pak f *je riemannovsky integrovatelná na každém uzavřeném a ohraničeném podintervalu intervalu* J *a pro každé* $c \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_c^x f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad x \in J.$$

Právě uvedené věty zhodnotíme v kapitolách o Taylorových a Fourierových řadách.

Kapitola 8

Taylorovy řady

V předchozí kapitole jsme si uvedli základy obecných funkčních řad. Nyní se podíváme na speciální typ řady – mocninnou a ještě speciálněji Taylorovu.

8.1 Mocninné řady

Mocninnou řadou budeme rozumět řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots,$$

kde $c_n \in \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \in \mathbb{R}$. Tyto řady mají velký význam při aproximaci funkcí – např. při určování přibližných hodnot funkcí, přibližném řešení diferenciálních rovnic (viz [4]), atd... Pokud nebude uvedeno jinak, ve větách této kapitoly se na ni budeme odkazovat jako na „mocninnou řadu“.

Poznámka 8.1 Všimněte si, že n-tý člen i částečný součet mocninné řady je polynom. Tedy je to funkce spojitá, kterou můžeme libovolně derivovat a na libovolném uzavřeném a omezeném intervalu má Riemannův integrál. Výborně se tedy hodí k aproximaci funkcí. Jak dále uvidíme, budeme schopni i leccos říct o (lokálně) stejnoměrné konvergenci – bez které by nám řady funkcí k ničemu moc nebyly.

Definice 8.2 *Mocninnou řadou o středu a* rozumíme funkční řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots .$$

Číslo a nazýváme *střed mocninné řady*, čísla c_n pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nazýváme *koeficienty řady*, číslo c_0 nazýváme *absolutní člen.*

8.1.1 Obor konvergence mocninné řady

Nejprve se podívejme na množinu, na které mocninná řada konverguje.

Poznámka 8.3 Mocninná řada konverguje vždy pro $x = a$ (součet je roven c_0).

Věta 8.4. *Nechť mocninná řada konverguje pro $x = \bar{x}$. Pak řada absolutně konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, pro který platí*

$$|x - a| < |\bar{x} - a|,$$

tzn. $x \in (a - |\bar{x} - a|, a + |\bar{x} - a|)$.

Důkaz. Předpokládejme, že mocninná řada konverguje v bodě $x = \bar{x}$, přičemž $\bar{x} \neq a$. Z nutné podmínky konvergence číselné řady (Věta 5.7) plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} c_n(\bar{x} - a)^n = 0,$$

to znamená, že (číselná) posloupnost $\{c_n(\bar{x} - a)^n\}$ je ohraničená, tedy existuje $K > 0$ tak, že

$$|c_n(\bar{x} - a)^n| \le K$$

pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vezmeme $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - a| < |\bar{x} - a|$ a dokážeme, že v něm mocninná řada konverguje absolutně. Pro takové x zřejmě platí

$$\left|\frac{x - a}{\bar{x} - a}\right| < 1,$$

a geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} K|\frac{x-a}{\bar{x}-a}|^n$ konverguje. Protože

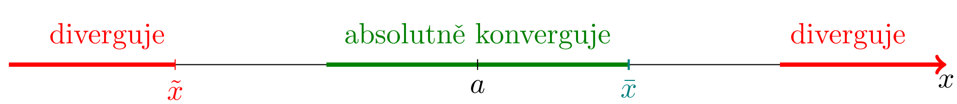
$$|c_n(x - a)^n| = |c_n(\bar{x} - a)^n|\left|\frac{x - a}{\bar{x} - a}\right|^n \le K\left|\frac{x - a}{\bar{x} - a}\right|^n,$$

i řada $\sum |c_n(x - a)^n|$ podle srovnávacího kritéria (Věta 5.18) konverguje. Tedy mocninná řada absolutně konverguje v bodě x. □

Důsledek 8.5. *Jestliže existuje bod $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ takový, že mocninná řada v $\tilde{x}$ diverguje, pak tato řada diverguje ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ takových, že $|x - a| > |\tilde{x} - a|$ (tedy na intervalu $(-\infty, a - |\tilde{x} - a|)$ a $(a + |\tilde{x} - a|, \infty)$).*

Důkaz. Kdyby mocninná řada konvergovala v některém bodě $x \in \mathbb{R}$ takovém, že $|x - a| > |\tilde{x} - a|$, pak z Věty 8.4 vyplývá, že by musela konvergovat i v bodě $\tilde{x}$, což je ve sporu s předpokladem. □

Tvrzení z Věty 8.4 a Důsledku 8.5 je schematicky ukázáno na Obrázku 8.1.



Obrázek 8.1: Tvrzení z Věty 8.4 a Důsledku 8.5.

Věta 8.6. *Mocninné řadě lze přiřadit jednoznačně číslo $\rho \in [0, \infty)$ nebo $\rho = \infty$ tak, že řada ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ splňujících $|x - a| < \rho$ absolutně konverguje a ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ splňujících $|x - a| > \rho$ diverguje.*

Důkaz. Jestliže a je jediný bod, ve kterém mocninná řada konverguje, pak položíme-li $\rho = 0$, tvrzení věty platí. Nechť existuje bod $\bar{x} \neq a$ takový, že v něm mocninná řada konverguje. Definujeme množinu

$$M = \{r > 0 \;\; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konverguje pro všechna } x \in \mathbb{R} \text{ taková, že } |x-a| < r\}.$$

Z našeho předpokladu (existence bodu $\bar{x}$, ve kterém mocninná řada konverguje) a Věty 8.4 plyne, že $M \neq \emptyset$. Položme $\rho = \sup M$. Zřejmě $\rho > 0$ (tedy je možný i případ $\rho = \infty$). Nyní ověříme, že takto definované ρ má vlastnosti uvedené v tvrzení věty. Nechť tedy $x \in \mathbb{R}$ je takové, že $|x-a| < \rho$. Z definice suprema plyne, že existuje $r \in M$ tak, že $|x-a| < r \leq \rho$, a tedy z definice množiny M vyplývá, že mocninná řada v bodě x konverguje (dokonce absolutně – viz Větu 8.4). Vezmeme nyní číslo $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x-a| > \rho$. Pak existuje číslo $R > 0$ tak, že $|x-a| > R > \rho$. Z definice ρ plyne, že řada diverguje například v bodě $\tilde{x} = a + R$ (samozřejmě diverguje i v bodě $a - R$). Pak platí

$$|x-a| > R = |a + R - a| = |\tilde{x} - a|.$$

Z Důsledku 8.5 tedy plyne, že mocninná řada diverguje i v bodě x. □

Poznámka 8.7 Věta 8.6 tedy říká, že pro každou mocninnou řadu může nastat pouze jeden z následujících tří případů:

1. Absolutně konverguje pro $x = a$ a diverguje na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ (případ $\rho = 0$).

2. Absolutně konverguje na celém $\mathbb{R}$ (případ $\rho = \infty$).

3. Absolutně konverguje na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$, diverguje na intervalech $(-\infty, a-\rho)$ a $(a+\rho, \infty)$, přičemž o konvergenci řady v bodech $x = a - \rho$ a $x = a + \rho$ Věta 8.6 nic neříká – viz dále Příklady 8.11–8.14 (případ $0 < \rho < \infty$).

Definice 8.8 Číslo ρ z Věty 8.6 nazýváme *poloměr konvergence mocninné řady.*

Označení „poloměr“ asi nepřekvapí, protože v případě, že je ρ kladné konečné číslo, jde vlastně o poloměr okolí, na němž mocninná řada konverguje.

Poznámka 8.9 Při vyšetřování oboru konvergence mocninné řady stačí pouze určit poloměr konvergence a vyšetřit body na hranici oboru konvergence $a \pm \rho$ (v případě, že $0 < \rho < \infty$).

Následující věta nám dá návod, jak poloměr konvergence efektivně vypočítat.

Věta 8.10. *Pro poloměr konvergence ρ mocninné řady platí*

$$\rho = \frac{1}{\lambda},$$

kde

(a) $\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ *nebo*

(b) $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, *pokud tato limita existuje, nebo*

(c) $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, *pokud tato limita existuje,*

přitom zde pokládáme $\frac{1}{0} = \infty$.

Důkaz. Část (a) je poněkud techničtější a její důkaz vynecháme (viz např. [4]). Naopak důkaz případu (b) je o dost jednodušší a přitom velmi poučný. Předpokládejme, že existuje

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Použijme na vyšetření absolutní konvergence mocninné řady limitní odmocninové kritérium (Věta 5.28). Pak mocninná řada absolutně konverguje v bodě $x \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x-a|^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}|x-a| = \lambda|x-a| < 1.$$

Je-li $\lambda = 0$, pak tato podmínka je splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$, tzn. $\rho = \infty$. Je-li $\lambda = \infty$, tato podmínka je splněna pouze pro $x = a$, tzn. $\rho = 0$. Nechť $\lambda \in (0, \infty)$. Pak v bodech $x \in \mathbb{R}$ splňujících nerovnost $|x-a| < \frac{1}{\lambda}$ řada absolutně konverguje a v bodech $x \in \mathbb{R}$ splňujících nerovnost $|x-a| > \frac{1}{\lambda}$ řada nekonverguje absolutně, tedy vzhledem k Větě 8.6 v těchto bodech řada diverguje. Proto číslo $\frac{1}{\lambda}$ je poloměr konvergence mocninné řady. Případ (c) plyne z faktu, že pokud zde uvedená limita existuje, je rovna limitě z (b) – viz Poznámku 5.32. □

Příklad 8.11 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n.$$

Řešení. Konvergenci řady můžeme vyšetřovat postupy z předchozích kapitol, nebo můžeme využít speciálních vlastností mocninných řad. V našem případě jde o mocninnou řadu o středu $a = 0$ s koeficienty

$$c_n = \frac{1}{2^n} \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jak bylo řečeno, pro vyšetřování oboru konvergence mocninné řady bude pro nás mít význam poloměr konvergence. Ten vypočítáme podle Věty 8.10. Použijeme třeba druhý zásadní vztah ve zmíněné větě, to znamená spočítáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Podle Věty 8.10 dostáváme $\rho = 2$ a z Poznámky 8.7 vyplývá, že uvedená mocninná řada konverguje absolutně pro všechna $x \in (-2, 2)$, diverguje pro všechna $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Zbývá vyšetřit konvergenci v bodech $x = -2$ a $x = 2$. Pro $x = -2$ dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

což je divergentní řada. Pro $x = 2$ dostáváme řadu, jejíž členy jsou rovny 1, tedy rovněž divergentní číselnou řadu.
Závěr: Řada absolutně konverguje na intervalu $(-2, 2)$ a diverguje na $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
◯

Příklad 8.12 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n.$$

Řešení. Střed řady je roven $a = 2$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je $\rho = 1$. Řada tedy absolutně konverguje na $(2-1, 2+1)$ a diverguje na $(-\infty, 2-1) \cup (2+1, \infty)$. Pro $x = 1$ a $x = 3$ jde o absolutně konvergentní řady.
Závěr: Řada absolutně konverguje na intervalu $[1, 3]$ a diverguje na $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$. ◯

Příklad 8.13 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}(x+1)^n.$$

Řešení. Střed řady je roven $a = -1$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je roven $\rho = 1$. Řada tedy absolutně konverguje na $(-1-1, -1+1)$ a diverguje na

$$(-\infty, -1-1) \cup (-1+1, \infty).$$

Pro $x = -2$ řada relativně (neabsolutně) konverguje a pro $x = 0$ řada diverguje.
Závěr: Řada absolutně konverguje na intervalu $(-2, 0)$, relativně konverguje pro $x = -2$ a diverguje na $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$. ◯

Příklad 8.14 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+3)^n.$$

Řešení. Střed řady je roven $a = -3$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je roven $\rho = \infty$.
Závěr: Řada absolutně konverguje na $\mathbb{R}$. ◯

Příklad 8.15 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n.$$

Řešení. Střed řady je roven $a = 1$ a snadno se dá spočítat, že poloměr této řady je roven $\rho = 0$.
Závěr: Řada absolutně konverguje pro $x = 1$ a diverguje na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. ◯

8.1.2 Operace s mocninnými řadami

Mocninné řady mají tu pěknou vlastnost, že jejich součet, rozdíl, součin dvou řad (o stejném středu) a součin s konstantou a součin (o stejném středu) jsou opět mocninné řady.

Přitom součinem budeme chápat Cauchyův součin, tzn. pro dvě mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

je jejich součinem řada $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x-a)^n$, kde

$$\gamma_n = b_0c_n + b_1c_{n-1} + \cdots + b_nc_0$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 8.16. *Mějme dány řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Pak jejich součet a rozdíl jsou mocninné řady s poloměrem konvergence $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$ a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n \pm c_n)(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$. Je-li $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, pak k–násobek řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ má stejný poloměr konvergence jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} kb_n(x-a)^n = k\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

pro každé $x \in (a-\rho_1, a+\rho_1)$. (Cauchyův) součin řad $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ má poloměr konvergence roven $\rho \geq \min\{\rho_1, \rho_2\}$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x-a)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)$$

pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$.

Příklad 8.17 Určete mocninnou řadu o středu $a = -1$, jejímž součtem je funkce

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2x-3}.$$

Určete poloměr konvergence.

Řešení. K tomu, abychom ji mohli určit, provedeme nejprve rozklad funkce f na parciální zlomky. Jednoduše se dá vypočítat, že

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}$$

pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$. Platí

$$\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2-(x+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x+1)^n$$

pro $|(x+1)/2| < 1$ a

$$\frac{1}{x+3} = -\frac{1}{-2-(x+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x+1}{-2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{-2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x+1)^n$$

pro $|(x+1)/(-2)| < 1$. Z předchozí věty vyplývá, že

$$f(x) = -\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x+1)^n + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{8\cdot 2^n}(x+1)^n$$

pro všechna $|x+1| < 2$, tzn. $x \in (-3,1)$. Nyní spočítáme její poloměr konvergence. Označme koeficient u n-tého členu poslední mocninné řady jako c_n. Protože

$$c_{2m} = 0 \qquad \text{a} \qquad c_{2m+1} = -\frac{1}{4\cdot 2^{2m+1}} \qquad \text{pro každé } m \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

pak $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ sice neexistuje, ale

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{m\to\infty}\sqrt[2m+1]{|c_{2m+1}|} = \frac{1}{2},$$

tzn. $\rho = 2$. Odtud také vidíme, že oborem konvergence je interval $(-3,1)$.
Závěr: Platí

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n}{8\cdot 2^n}(x+1)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^{2n+1}}(x+1)^{2n+1}$$

pro každé $x \in (-3,1)$. ○

8.1.3 Lokálně stejnoměrná konvergence a její důsledky

Nyní využijeme věty ze sekce o lokálně stejnoměrné konvergenci. A to k tomu, abychom dokázali spojitost součtu mocninné řady a možnost derivování a integrování mocninné řady člen po členu.

Věta 8.18. *Nechť má mocninná řada nenulový poloměr konvergence ρ. Pak tato řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[a-r, a+r]$ pro všechna $0 < r < \rho$.*

Důkaz. Vezmeme $r \in \mathbb{R}$ takové, že $0 < r < \rho$. Zřejmě

$$|c_n(x-a)^n| \le |c_n|r^n \qquad \text{pro všechna } x \in [a-r, a+r] \text{ a všechna } n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Podle předpokladu mocninná řada absolutně konverguje v bodě $x = r$, tzn.

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n < \infty.$$

Podle Weierstrassova kritéria (Věta 7.10) pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na množině $[a-r, a+r]$. □

Věta 8.19. *Má-li mocninná řada nenulový poloměr konvergence ρ, pak řada lokálně stejnoměrně konverguje na $(a-\rho, a+\rho)$.*

Důkaz. Uvažujme libovolný kompaktní podinterval $[\alpha, \beta]$ intervalu $(a-\rho, a+\rho)$. Pak existuje $r \in (0, \rho)$ tak, že

$$[\alpha, \beta] \subset [a-r, a+r] \subset (a-\rho, a+\rho).$$

Podle Věty 8.18 řada konverguje stejnoměrně na $[a-r, a+r]$ a tedy i na jeho podintervalu $[\alpha, \beta]$. □

Je-li poloměr konvergence kladný, pak lze zřejmě definovat součet mocninné řady na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$. Dále se budeme zabývat vlastnostmi této funkce (součtu řady).

Z Věty 7.22 okamžitě dostáváme spojitost součtu mocninné řady.

Důsledek 8.20. *Součet mocninné řady je spojitá funkce na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$.*

V následující větě se dozvíme, že pokud řada konverguje i v $x = a+\rho$ (je-li $\rho \in (0, \infty)$), pak je součet mocninné řady v tomto bodě funkce spojitá zleva.

Věta 8.21 (Abelova)**.** *Nechť mocninná řada má poloměr konvergence $\rho \in (0, \infty)$ a řada (reálných čísel) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n$ konverguje. Pak její součet je spojitá funkce na intervalu $(a-\rho, a+\rho]$.*

Důkaz. Stačí dokázat, že mocninná řada stejnoměrně konverguje na intervalu $[a, a+\rho]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a, a+\rho]$ můžeme psát

$$c_n(x-a)^n = c_n \rho^n \left(\frac{x-a}{\rho} \right)^n .$$

Označíme

$$\varepsilon_n(x) = \left(\frac{x-a}{\rho} \right)^n \quad \text{a} \quad f_n(x) = c_n \rho^n$$

pro $x \in [a, a+\rho]$ a $n \in \mathbb{N}$. Lehce se ověří, že $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ splňují předpoklady Abelova kritéria (Věta 7.13). Z této věty pak plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[a, a+\rho]$, tedy její součet je spojitá funkce na tomto intervalu – zejména v bodě $a+\rho$ zleva. □

Dále z Vět 7.23 a 7.24 dostáváme následující praktická tvrzení.

Věta 8.22 (o derivování a integrování mocninné řady). *Nechť má mocninná řada nenulový poloměr konvergence ρ a funkce $f : (a-\rho, a+\rho) \to \mathbb{R}$ je její součet. Pak funkce f má na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$ derivaci a primitivní funkci a platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1} \tag{8.1}$$

a

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} \tag{8.2}$$

pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$. Uvedené mocninné řady mají poloměr konvergence roven ρ.

S pomocí této věty můžeme efektivně počítat přesné hodnoty součtů některých řad.

Příklad 8.23 Vypočtěte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Řešení. Jde o řadu s kladnými členy a pomocí limitního podílového kritéria (Věta 5.31) se lze přesvědčit, že konverguje. Vypočtěme nyní její součet. Uvažujme nejprve mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \cdots,$$

která konverguje na intervalu $(-1, 1)$, označme f její součet. Vytknutím x dostaneme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots,$$

což je opět mocninná řada s oborem konvergence $(-1, 1)$. Označíme-li její součet písmenem g, pak platí $f(x) = xg(x)$ pro každé $x \in (-1, 1)$. Podle Věty 8.22 platí pro každé $x \in (-1, 1)$

$$\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$

kde jsme v poslední rovnosti využili výsledků z Příkladu 5.3. Následně

$$g(x) = \left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

V poslední rovnosti stačí dosadit $x = \frac{1}{3}$. Výsledek je $\frac{3}{4}$. ○

Větu o derivaci člen po členu lze snadno zobecnit pro vyšší derivace.

Důsledek 8.24. *Součet f mocninné řady s kladným poloměrem konvergence ρ má spojité derivace všech řádů na intervalu $(a-\rho, a+\rho)$ a platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$$

pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$, $k \in \mathbb{N}$.

8.2 Taylorovy řady

Zabývejme se následujícími otázkami:

- Je daná funkce součtem nějaké mocninné řady o daném středu?
- Jak tuto řadu najít, resp. jak najít koeficienty této mocninné řady?
- Jaké očekávat vlastnosti této funkce?
- A k čemu je to dobré?

Začněme užitečnou zkratkou.

Definice 8.25 Řekneme, že *funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze rozvinout na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, v mocninnou řadu se středem $a \in I$*, jestliže existuje mocninná řada o tomto středu, jejímž součtem je funkce f na intervalu I.

Poznámka 8.26 Z Důsledku 8.24 plyne, že lze-li funkci na nějakém intervalu rozvinout v mocninou řadu, pak má na tomto intervalu funkce spojité derivace všech řádů. Je tedy jasné, že nemá smysl pokoušet se rozvíjet v mocninnou řadu funkci bez této vlastnosti.

Jak za chvíli uvidíme, na první dvě zde položené otázky vlastně už známe odpověď z [13] – konkrétně z povídání o Taylorových polynomech. Tam jsme se soustředili pouze na výpočet přibližné hodnoty funkce (vlastně součtu řady) v nějakém bodě. Zde budeme schopni díky našim znalostem mocninných řad říct daleko více.

Inspirováni větou o koeficientech Taylorova polynomu (viz [13, Věta 7.7]) můžeme snadno zformulovat a dokázat následující větu.

Věta 8.27. *Jestliže lze funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozvinout v mocninnou řadu se středem v bodě a, pak pro její koeficienty platí*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{8.3}$$

kde pokládáme $f^{(0)}(a) = f(a)$, $0! = 1$.

Důkaz. Předpokládejme, že taková řada existuje, tzn. že existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots$$

pro každé $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Speciálně dosazením $x = a$ dostáváme $f(a) = c_0$. Z Důsledku 8.24 plyne

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots$$

pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ a tedy $f'(a) = c_1$. Opět použitím Důsledku 8.24 dostáváme

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots$$

pro $x \in (a-\delta, a+\delta)$ a tedy $f''(a) = 2c_2$. Z Důsledku 8.24 tedy vyplývá (8.3). Tedy platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

pro všechna $x \in (a-\delta, a+\delta)$. □

Důsledek 8.28. *Existuje nejvýše jedna mocninná řada se středem v bodě a, která na nějakém okolí tohoto bodu konverguje k funkci f.*

Této řadě hned dáme jméno.

Definice 8.29 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a má v bodě a derivace všech řádů. Pak řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou funkce f se středem a*, její koeficienty nazýváme *Taylorovými koeficienty*. Pro $a = 0$ tuto řadu nazýváme Maclaurinovou řadou.

Poznámka 8.30 Všimněme si, že částečný součet Taylorovy řady není nic jiného než Taylorův polynom!

Příklad 8.31 Uvažujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{pro každé } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Z Příkladu 5.3 již víme, že pro každé $q \in (-1, 1)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Odtud dostáváme

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{pro každé } x \in (-1, 1).$$

Tedy funkci f lze na intervalu $(-1, 1)$ rozvinout v mocninnou řadu se středem v bodě 0. Jak se dá snadno spočítat i přímo vidět, je poloměr konvergence této řady roven $\rho = 1$. Z Důsledku 8.28 vyplývá, že tato řada je Taylorova řada funkce f se středem v bodě 0, tedy Maclaurinova řada funkce f. V tomto případě tedy nebylo nutné počítat všechny derivace funkce f v bodě 0. Tento postup s výhodou využijeme i u jiných rozvojů, u kterých je výpočet hodnoty $f^{(n)}(a)$ obtížnější. ○

Jak uvidíme v následujícím příkladě, součtem Taylorovy řady nemusí být vždy daná funkce!

Příklad 8.32 Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dá se vypočítat (ověřte!), že platí

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{pro každé } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Z předchozí věty plyne, že jestli by se dala funkce f rozvinout v mocninnou řadu o středu 0 na nějakém okolí tohoto bodu, pak jsou všechny její koeficienty c_n nulové. Součet této řady je ale nulová funkce, tedy řada konverguje k funkci f pouze v bodě 0. A to přesto, že její poloměr konvergence je ∞. Z tohoto příkladu lze vidět, že i když má funkce spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$, neznamená to ještě, že ji lze rozvinout v mocninnou řadu v libovolném bodě jejího definičního oboru. ◯

Poznámka 8.33 Úloha rozvinout funkci v mocninnou řadu je tedy úlohou aproximace funkce f polynomem stupně nejvýše n v nějakém okolí bodu a. Jak je vidět z Příkladu 8.32, není vždy zaručeno, že Taylorova řada konverguje na nějakém okolí k ní příslušné funkci f – a to přesto, že má funkce f spojité derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. Jak už víme z povídání o Taylorových polynomech (viz [13, Věta 7.16]), postačující podmínkou pro konvergenci je „stejnoměrná ohraničenost“ všech derivací funkce f na příslušném intervalu. Tento výsledek přeformulujeme v řeči mocninných řad v následující větě.

Věta 8.34. *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na otevřeném intervalu $\mathcal{U}_\delta(a) = (a+\delta, a+\delta)$ derivace všech řádů takové, že existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, pro které platí*

$$\forall x \in \mathcal{U}_\delta(a)\ \forall n \in \mathbb{N} : \ |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Pak Taylorova řada příslušná k funkci f o středu v bodě a konverguje na $\mathcal{U}_\delta(a)$ k funkci f.

Příklad 8.35 Rozvineme funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ do Maclaurinovy řady. Protože platí

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

pak po dosazení $x = 0$ dostáváme Taylorovy koeficienty ve tvaru $c_n = 1/n!$ a Maclaurinovu řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nyní nás bude zajímat, zda Taylorova řada konverguje k funkci f. Zvolme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ libovolně. Protože exponenciální funkce je spojitá na intervalu $[-\delta, \delta]$, je na něm ohraničená, tzn. existuje $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tak, že

$$\forall x \in [-\delta, \delta] : \ |\mathrm{e}^x| \leq M.$$

Pak také pro každé $x \in \mathcal{U}_\delta(0)$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|(\mathrm{e}^x)^{(n)}\right| = |\mathrm{e}^x| \leq M,$$

je tedy splněn předpoklad z Věty 8.34. Podle ní pak Taylorova řada konverguje k exponenciální funkci na celém okolí $\mathcal{U}_\delta(0)$. A protože δ bylo libovolné, konvergence je na celém $\mathbb{R}$.
○

Poznámka 8.36 Kromě exponenciální funkce si můžeme rozložit do Maclaurinovy řady i další elementární funkce – stejně jako např. v [13]. Platí:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad x \in (-1,1),$$

atd.

Podívejme se nyní jak lze s výhodou počítat Taylorovy řady pomocí Věty 8.22.

Příklad 8.37 Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce arctg.

Řešení. Označme $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Nejprve pozorujeme, že

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

pro každé $|-x^2| < 1$, tzn. $|x| < 1$, tzn. $x \in (-1,1)$. Poslední řada je mocninná řada s poloměrem konvergence $\rho = 1$. Podle Věty 8.22 pak pro každé $x \in (-1,1)$ platí

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}. \qquad ○$$

Pomocí Taylorových řad je možné vyjádřit funkci

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

o níž víme, že sice existuje, ale její předpis nelze zapsat pomocí elementárních funkcí.

Příklad 8.38 Nalezněte Maclaurinovu řadu tzv. *Gaussovy chybové funkce*, tzn. funkce

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Protože

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pak

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Pak podle Věty 8.22 platí

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \cdots \right) \end{aligned}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. ○

Příklad 8.39 Vypočtěte součet Leibnizovy řady.

Řešení. Nejprve se podíváme na vzorec z Poznámky 8.36 pro funkci $\ln(1+x)$, o kterém víme, že platí pro $x \in (-1,1)$. Dokažme, že platí i pro $x = 1$. Podle Příkladu 5.42 již víme, že řada konverguje v $x = 1$. Pak podle Abelovy věty (Věta 8.21) platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2,$$

kde druhá rovnost plyne ze spojitosti funkce logaritmus v bodě 2. ○

Kapitola 9

Fourierovy řady

V minulé kapitole jsme se bavili o mocninných řadách, tj. o řadách ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

kde $\varphi_n(x) = (x-a)^n$ pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. A to proto, že právě tyto řady mají mnohé pěkné vlastnosti (lokálně stejnoměrná konvergence a z ní vyplývající vlastnosti) a dají se do nich rozvíjet funkce na okolí bodu a.

Dalším velmi používaným typem funkčních řad, jsou *trigonometrické řady*. Budeme je používat k rozvíjení periodických funkcí.

Definice 9.1 Řadu ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*, čísla $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_i \in \mathbb{N}$ nazýváme její *koeficienty*.

Trigonometrickými řadami se nebudeme zabývat tak podrobně jako mocninnými řadami – zmiňme pár základních faktů.

Poznámka 9.2

- Protože členy trigonometrické řady jsou 2π-periodické funkce, pak pokud řada někde konverguje, jejím součtem je 2π-periodická funkce.

- Členy trigonometrické řady jsou spojité funkce (dokonce mající spojité derivace všech řádů). Dokážeme-li na nějakém intervalu (lokálně) stejnoměrnou konvergenci, součet řady je na takovém intervalu spojitá funkce. Podobně to platí pro derivace – viz obecné Věty 7.15 a 7.16.

- Řady z Definice 9.1 budeme používat pro rozvinutí 2π-periodických funkcí. Máme-li 2ℓ-periodickou funkci, kde $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, kterou chceme rozvinout do trigonometrické řady, zvolíme obecnější tvar:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x + b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x \right).$$

  Teorii pro jednoduchost vyložíme pro případ $\ell = \pi$.

- Někomu možná vrtá hlavou, proč absolutní člen je ve tvaru jedné poloviny koeficientu a_0. Důvodem je jednotnost vzorců pro tzv. Fourierovy koeficienty – viz dále Větu 9.5.

Podívejme se nyní jak vypadají koeficienty trigonometrické řady, jejíž součet je zadaná 2π-periodická funkce. K tomu se nám budou hodit následující dvě tvrzení zde uvedená jako cvičení.

Cvičení 9.3 Nechť f je 2π-periodická funkce integrovatelná na intervalu $[0, 2\pi]$. Dokažte, že pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ je f integrovatelná i na intervalu $[a, a + 2\pi]$ a platí

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 9.4 Ověřte, že pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi,$
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,\mathrm{d}x = 0,$
3. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x = 0,$
4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = 0$, pro $m \neq n$,
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \pi$, pro $m = n$,
6. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$, pro $m \neq n$,
7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \pi$, pro $m = n$,
8. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$

Následující věta je analogií Věty 8.27. Porovnejte předpoklady obou vět.

Věta 9.5. *Jestliže lze funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozvinout na $[-\pi, \pi]$ ve stejnoměrně konvergentní trigonometrickou řadu, pak pro koeficienty této řady platí*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková funkce, že

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{9.1}$$

přičemž řada konverguje stejnoměrně na $[-\pi, \pi]$. K určení hodnoty koeficientu a_0 si nejprve uvědomíme, že řadu můžeme integrovat na intervalu $[-\pi, \pi]$ člen po členu, tzn. dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) = \pi a_0,$$

kde jsme využili rovností ze Cvičení 9.4. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ libovolně. Rovnost (9.1) vynásobíme funkcí $\sin kx$, integrujeme přes interval $[-\pi, \pi]$. Vzniklou řadu (vzhledem ke stejnoměrné konvergenci) můžeme integrovat člen po členu a dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,\mathrm{d}x\right) = \pi b_k.\end{aligned}$$

Podobně, vynásobením funkcí $\cos kx$ a zintegrováním přes interval $[-\pi, \pi]$ dostáváme vzorec i pro koeficient a_k. □

Všimněte si předpokladu stejnoměrné konvergence trigonometrické řady v tvrzení Věty 9.5, který se nevyskytuje v odpovídající větě pro mocninné řady (Věta 8.27).

Definice 9.6 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak trigonometrickou řadu s koeficienty ve tvaru

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f na intervalu* $[-\pi, \pi]$. Její koeficienty nazýváme *Fourierovými koeficienty*.

Konvergují vždy Fourierovy řady k nim příslušným funkcím? Pokud je jejich konvergence stejnoměrná, pak podle Věty 9.5 je odpověď kladná. Ovšem obecně – podobně jako u Taylorova polynomu – tomu tak není.

Ukažme si nyní předpoklady, za kterých Fourierovy řady konvergují, k jaké funkci a jakým způsobem. Důkazy k těmto větám pro jejich pracnost nebudeme uvádět (zklamaného čtenáře lze odkázat na [4, 11]). K tomu účelu si nejprve představme pomocné pojmy.

Definice 9.7 Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Řekneme, že funkce f je

- *po částech spojitá* na $[a, b]$, existuje-li dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že funkce f je na všech intervalech (x_{k-1}, x_k) spojitá a má v krajních bodech těchto intervalů vlastní derivaci,
- *po částech derivovatelná* na $[a, b]$, existuje-li dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že funkce f má na všech intervalech (x_{k-1}, x_k) spojitou derivaci f' a obě funkce f i f' mají v krajních bodech intervalu (x_{k-1}, x_k) vlastní jednostranné limity,
- *po částech monotónní na* $[a, b]$, existuje-li dělení $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že funkce f je na všech intervalech (x_{k-1}, x_k) monotonní.

Věta 9.8. *Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce taková, že*

- *je po částech spojitá a po částech monotónní na intervalu $[-\pi, \pi]$, nebo*
- *je po částech derivovatelná na intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Pak její Fourierova řada konverguje na $\mathbb{R}$ k funkci $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mající funkční hodnoty

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} f(t) + \lim_{t\to x+} f(t)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Navíc, na každém intervalu (a, b), na kterém je funkce f spojitá, k ní její Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Z Věty 9.8 tedy vidíme, že je-li funkce splňující předpoklady této věty navíc v daném bodě spojitá, konverguje v tomto bodě Fourierova řada k její funkční hodnotě a v bodech nespojitosti k aritmetickému průměru jednostranných limit funkce.

Důsledek 9.9. *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce, spojitá a po částech derivovatelná na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak k ní její Fourierova řada konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$.*

Příklad 9.10 Nalezněte Fourierovu řadu funkce 2π-periodické funkce pro niž platí

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [-\pi, 0), \\ \sin x & \text{pro } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Řešení. Je třeba vypočítat Fourierovy koeficienty. Platí

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\big(-\cos \pi - (-\cos 0)\big) = \frac{2}{\pi},$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x + \sin(1-n)x)\ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi(n^2-1)}, \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{1}{2}$$

a pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \big(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\big)\,\mathrm{d}x = \cdots = 0.$$

Při výpočtech koeficientů a_n a b_n jsme použili goniometrické vzorce $\sin\alpha\cos\beta = \cdots$ a $\sin\alpha\sin\beta = \cdots$. Tedy Fourierova řada funkce f má tvar

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi(n^2-1)} \cos nx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{3\pi}\cos 2x - \frac{2}{15\pi}\cos 4x - \cdots.$$

Prvních pár částečných součtů řady je zobrazeno na Obrázku 9.1. ○

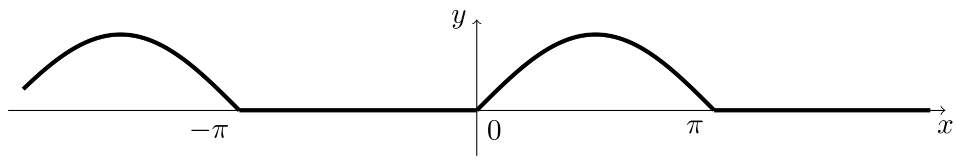
Příklad 9.11 Rozviňte 2π-periodickou funkci f nabývající hodnot

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

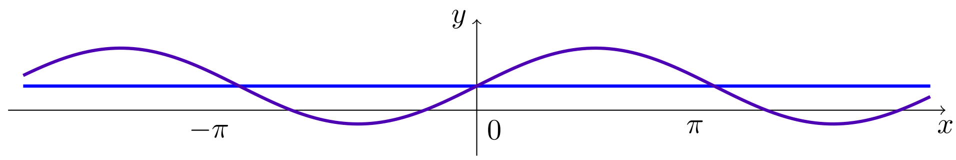
ve Fourierovu řadu na $[-\pi, \pi]$.

Řešení. Podle vzorce snadno spočítáme

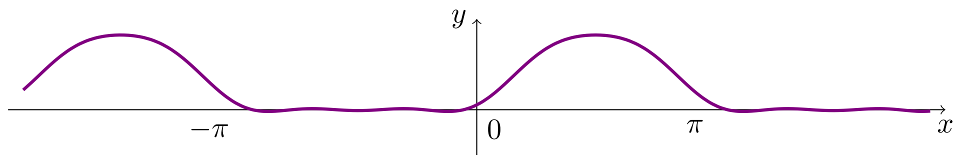
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\,\mathrm{d}x = 0,$$



(a) Graf funkce f.



(b) První dva částečné součty Fourierovy řady.



(c) Čtvrtý částečný součet Fourierovy řady.

Obrázek 9.1: Grafy funkce f z Příkladu 9.10 a několika částečných součtů její Fourierovy řady.

protože $x \cos nx$ jsou liché funkce a integrujeme na intervalu se středem 0. Dále

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x = \cdots = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Fourierova řada je tedy ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Graf funkce f spolu s několika prvními částečnými součty nalezené Fourierovy řady je na Obrázku 9.2. ○

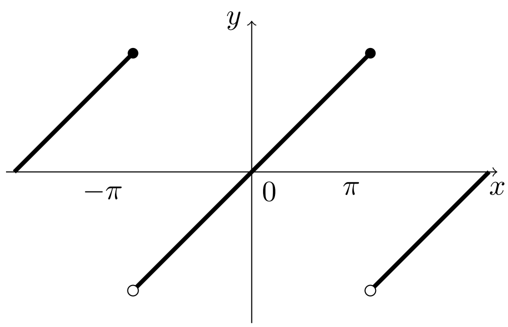
9.1 Rozvoj funkcí s jinou periodou

Pochopitelně nás budou zajímat rozvoje funkcí s libovolnou periodou. Hledejme tedy rozvoj obecně 2ℓ-periodických funkcí, kde $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$.

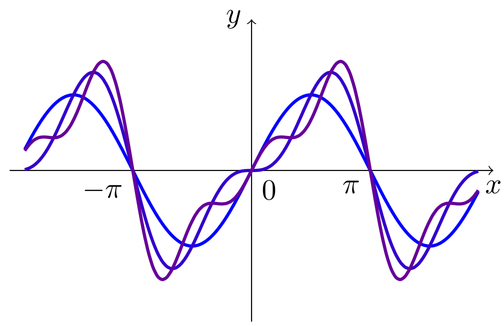
Jak jsme již zmínili v Poznámce 9.2, má smysl zkoumat trigonometrickou řadu ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x + b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x \right).$$

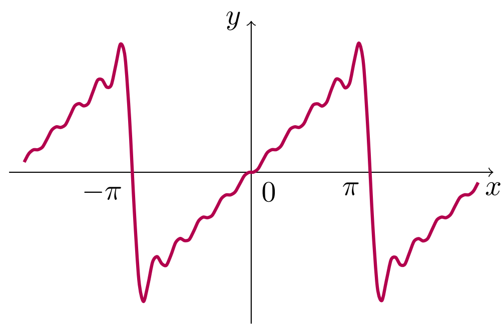
Platí podobné věty – s tím rozdílem, že všude stačí psát místo π obecnější ℓ. Např. pro Fourierovy koeficienty platí následující věta. Důkaz je víceméně výpočetního charakteru a je přenechán čtenáři.



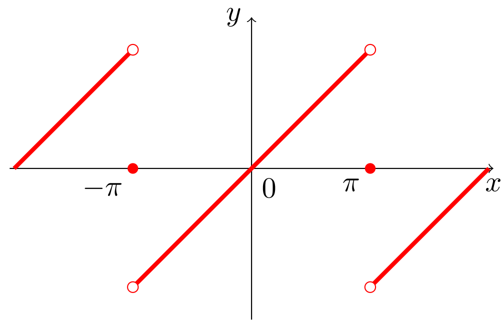
(a) Funkce f.



(b) První tři částečné součty Fourierovy řady funkce f.



(c) Desátý částečný součet Fourierovy řady funkce f.



(d) Součet Fourierovy řady funkce f.

Obrázek 9.2: Grafy některých funkcí z Příkladu 9.11.

Věta 9.12. *Jestliže lze funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozvinout na intervalu $[-\ell, \ell]$ ve stejnoměrně konvergentní trigonometrickou řadu, pak pro její koeficienty platí*

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tvrzení o konvergenci těchto řad jsou téměř stejná jako pro řady s periodou 2π – stačí všude zaměnit π za obecnější ℓ.

9.2 Rozvoj funkcí na ohraničeném intervalu

Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrovatelnou (a definovanou) na intervalu $[a, a + 2\pi]$. Pak 2π-periodická funkce $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující

$$\bar{f}(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in (a, a + 2\pi)$$

je definovaná jednoznačně na $\mathbb{R}$ až na hodnoty v bodech $a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Fourierovy koeficienty této funkce pak zřejmě *nezávisí* na těchto hodnotách (vzpomeneme-li si na vlastnosti Riemannova integrálu).

Fourierovy koeficienty funkce f pak definujeme jako Fourierovy koeficienty funkce $\bar{f}$, tedy

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z Věty 9.8 pak můžeme vyvodit následující důsledek.

Důsledek 9.13. *Nechť funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- *je po částech spojitá a po částech monotónní na intervalu* $[a, a + 2\pi]$*, nebo*
- *je po částech derivovatelná na intervalu* $[a, a + 2\pi]$.

Pak její Fourierova řada konverguje na $\mathbb{R}$ *k* 2π*-periodické funkci* $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mající tyto funkční hodnoty*

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x-} f(t) + \lim_{t \to x+} f(t)\right)$$

pro $x \in (a, a + 2\pi)$ *a*

$$\tilde{f}(a) = \tilde{f}(a + 2\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to a+} f(x) + \lim_{x \to (a+2\pi)-} f(x)\right).$$

Navíc, na každém intervalu, na kterém je funkce f *spojitá, k ní její Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně.*

A ještě důsledek Důsledku 9.9.

Důsledek 9.14. *Nechť* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je na intervalu* $[a, a+2\pi]$ *spojitá a má po částech spojitou derivaci a platí*

$$f(a) = f(a + 2\pi).$$

Pak její Fourierova řada konverguje k funkci f *stejnoměrně na* $[a, a + 2\pi]$.

Příklad 9.15 Rozviňte funkci

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

ve Fourierovu řadu na $[-\pi, \pi]$.

Řešení. Dostáváme stejnou Fourierovu řadu jako v Příkladu 9.11. Samozřejmě, stejná je i funkce, ke které tato řada (bodově) konverguje – viz Obrázek 9.2d. ◯

Příklad 9.16 Rozviňte funkci

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - x^2\right), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

ve Fourierovu řadu na $[-\pi, \pi]$.

Řešení. Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ (viz dále Větu 9.17). Dále platí

$$a_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\pi^2}{3}$$

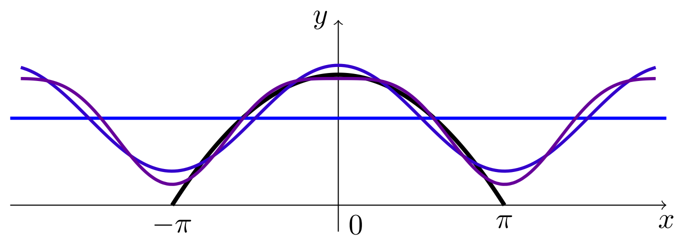
a pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$a_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - x^2\right)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\pi^2 - x^2\right)\cos nx\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

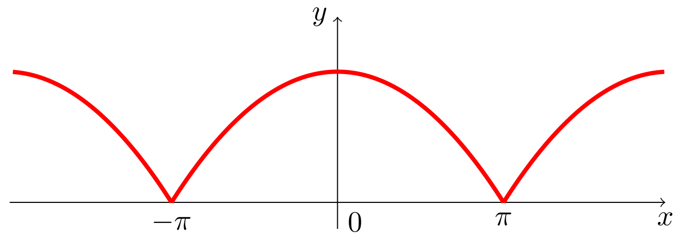
Fourierova řada je pak ve tvaru

$$\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx.$$

Prvních pár částečných součtů je ukázáno na Obrázku 9.3. ◯



(a) Funkce f (černě) a první tři částečné součty Fourieovy řady.



(b) Součet Fourierovy řady.

Obrázek 9.3: Grafy funkcí z Příkladu 9.16.

9.3 Sinové a kosinové řady

Podívejme se na nyní na Fourierovy řady lichých a sudých funkcí.

Věta 9.17. *Nechť f je integrovatelná na intervalu $[-\pi, \pi]$. Je-li f sudá funkce, pak*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x, \ \textit{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_n = 0, \ \textit{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Je-li f lichá funkce, pak

$$a_n = 0, \ \textit{pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \ \textit{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že součin sudé funkce a liché funkce je lichá funkce (součin dvou lichých funkcí je sudá funkce; součin dvou sudých funkcí je sudá funkce) a fakt, že integrál z liché funkce přes interval $[-\pi, \pi]$ je nulový a integrál ze sudé funkce přes interval $[-\pi, \pi]$ je roven dvojnásobku integrálu stejné funkce přes interval $[0, \pi]$. □

A asi není překvapivé, že sudou funkci rozvineme v řadu se sudými členy (kosiny) a lichou funkci v řadu s lichými členy (siny).

Poznámka 9.18 Uvažujme libovolnou integrovatelnou funkci f na intervalu $[0,\pi]$. Tuto funkci vhodně rozšiřme na interval $[-\pi,\pi]$ (na funkční hodnotě v bodě 0 nezáleží) následujícími dvěma způsoby:

(a) Funkci f rozšíříme na interval $[-\pi,\pi]$ *sudě*, tzn. dodefinujeme

$$f(x) = f(-x) \quad \text{pro každé } x \in [-\pi, 0).$$

Fourierovu řadu této dodefinované funkce nazýváme *rozvoj funkce f (tzn. té původní funkce f) v kosinovou řadu na* $[0,\pi]$. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Funkci f rozšíříme na interval $[-\pi,\pi]$ *liše*, tzn. předefinujeme $f(0) = 0$ a dodefinujeme

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{pro každé } x \in [-\pi, 0).$$

Fourierovu řadu této funkce nazýváme *rozvoj funkce f v sinovou řadu na* $[0,\pi]$. Pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 9.19 Nalezněte sinovou řadu k funkci

$$f(x) = 1, \quad x \in [0,\pi].$$

Řešení. Podle Poznámky 9.18 vypočítáme

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi = -\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big).$$

Sinová řada k funkci f je tedy ve tvaru

$$\sum_{n=1}^\infty \left(-\frac{2}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big)\right)\sin nx = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \cdots.$$

Několik prvních částečných součtů řady je možno vidět na Obrázku 9.4. ○

Příklad 9.20 Nalezněte kosinovou řadu k funkci

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0,\pi].$$

Řešení. Podle Poznámky 9.18 platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \cdots = 0$$

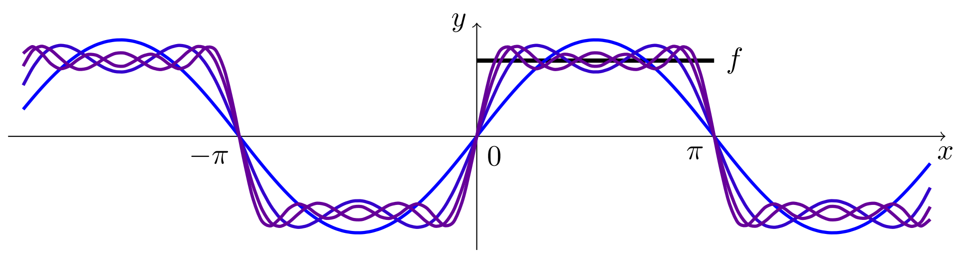
a pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ spočítáme

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n+1)x + \sin(1-n)x\,\mathrm{d}x = \cdots = 2\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n^2-1)\pi}.$$

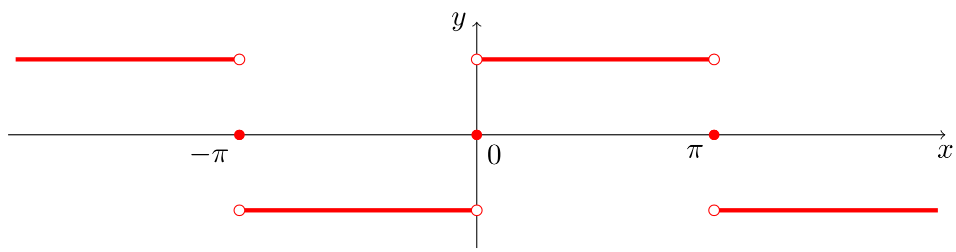
Kosinová řada je pak ve tvaru

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^\infty 2\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n^2-1)\pi}\cos nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos 2x - \frac{4}{15\pi}\cos 4x - \cdots.$$

Několik prvních částečných součtů řady je možno vidět na Obrázku 9.5. ○

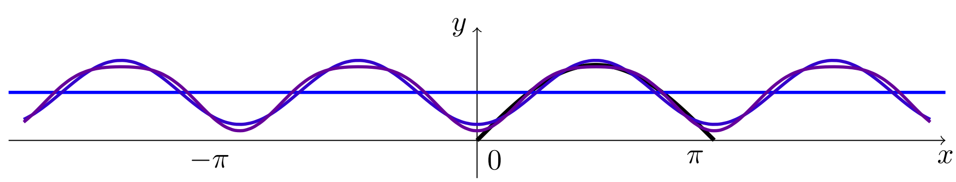


(a) Funkce f (černě) a první čtyři částečné součty sinové řady.

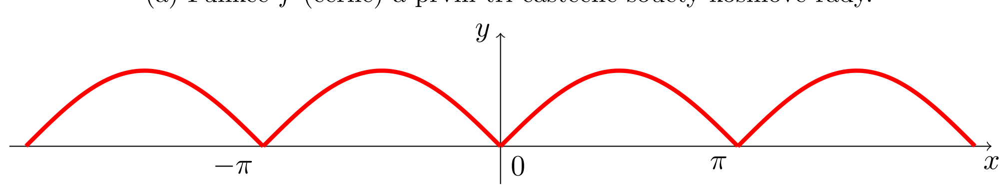


(b) Součet sinové řady.

Obrázek 9.4: Grafy funkcí z Příkladu 9.19.



(a) Funkce f (černě) a první tři částečné součty kosinové řady.



(b) Součet kosinové řady.

Obrázek 9.5: Grafy funkcí z Příkladu 9.20.

Literatura

[1] Černý, I.: *Úvod do inteligentního kalkulu:* 1000 *příkladů z elementární analýzy*. Praha: Academia, 2002.

[2] Černý, I.: *Úvod do inteligentního kalkulu* 2*:* 1000 *příkladů z pokročilejší analýzy*. Praha: Academia, 2005.

[3] Došlá, Z.; Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Brno: Masarykova Univerzita, 2003.

[4] Došlá, Z.; Novák, V.: *Nekonečné řady*. Brno: Masarykova Univerzita, 2002.

[5] Děmidovič, B.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.

[6] Holický, P.; Kalenda, O.: *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy: pro 2. až 4. semestr*. Praha: MatfyzPress, 2006.

[7] Kojecká, J.; Rachůnková, I.: *Řešené příklady z matematické analýzy III.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1998.

[8] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky I.* Praha: MatfyzPress, 2004.

[9] Kopáček, J.: *Příklady z matematiky nejen pro fyziky III.* Praha: MatfyzPress, 2006.

[10] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* Praha: MatfyzPress, 2007.

[11] Kopáček, J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky IV.* Praha: MatfyzPress, 2010.

[12] Rachůnková, I.; Rachůnek, L.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 2004.

[13] Tomeček, J.: *Matematická analýza 1*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 2020.
URL `https://kma.upol.cz/studijni-materialy/`

[14] Zajíček, L.: *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*. Praha: MatfyzPress, 2013.

Rejstřík

doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Matematická analýza 2

Výkonný redaktor Bc. Barbora Krudencová
Odpovědný redaktor Mgr. Tereza Vintrová
Technická redakce doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Návrh a grafické zpracování obálky Bc. Karina Pavlíková

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
vydavatelstvi.upol.cz

Publikace neprošla jazykovou a technickou redakcí ve vydavatelství.

Neprodejná publikace

1. vydání
Olomouc 2020

ISBN 978-80-244-5853-3
VUP 2020/0451