Přírodovědecká
fakulta

Univerzita Palackého
v Olomouci

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z PRAVDĚPODOBNOSTI

Karel Hron, Eva Fišerová

Olomouc 2020

Univerzita Palackého v Olomouci

Karel Hron, Eva Fišerová

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z PRAVDĚPODOBNOSTI

Olomouc 2020

Oponenti: RNDr. Marie Budíková, Dr.
Mgr. Ondřej Vencálek, Ph.D.

1. vydání

ISBN 978-80-244-5805-2 (online: PDF)

Předmluva

Nebudeme si nalhávat, absolvování základního kurzu z pravděpodobnosti se pro nejednoho studenta stává nezáměrně noční můrou. Příčin může být samozřejmě více, ale tou hlavní je bezpochyby zcela nový pohled, jímž se teorie pravděpodobnosti dívá na svět kolem nás. S pojmy jako podmíněná pravděpodobnost, náhodná veličina či korelace se většina studentů předtím nesetkala, a pokud ano, tak především jako s intuitivními koncepty v rámci průzkumové statistické analýzy, bez hlubšího matematického (pravděpodobnostního) pozadí. *Žádný učený z nebe nespadl*, a v pravděpodobnosti to platí dvojnásob. Novou teorii je potřeba budovat krok po kroku a pečlivě skládat jednotlivé díly do základů stavby tak, aby se potom mohl začít budovat samotný dům. Tedy v tomto případě, aby bylo možné získané vědomosti následně efektivně využít v matematické statistice, pro kterou je dobrá znalost základů teorie pravděpodobnosti naprosto klíčová. Všichni víme, že znalost statistiky a jejích metod je v současné době zcela nezbytná pro porozumění světu kolem nás, ovšem i teorie pravděpodobnosti samotná je klíčem k mnoha významným aplikacím. Naše porozumění konceptům pravděpodobnosti by ovšem zůstalo pouze formální, pokud bychom si teoretické poznatky neověřili (a neutvrdili) na konkrétních příkladech.

A právě k tomuto účelu byla sestavena předkládaná sbírka. Ta zahrnuje příklady, které se oběma autorům osvědčily jako doplnění cvičení k základnímu kurzu z pravděpodobnosti v uplynulých více než deseti letech. Až na výjimky se nejedná o náročnější příklady; cílem stávajícího výběru je především získat rutinu při řešení standardních úloh teorie pravděpodobnosti, čímž se tato sbírka liší od jí tematicky podobných. Uvedený soubor příkladů byl nyní mírně rozšířen tak, aby byly rovnoměrněji pokryty všechny tematické celky, a některé metodicky významné příklady byly podrobně vyřešeny. Nadto byla u každé kapitoly ve zjednodušené formě shrnuta příslušná teorie, aby bylo možné pracovat se sbírkou bez nutnosti uchylovat se často k dalším zdrojům. Nové pojmy jsou přitom značeny tučnou kurzívou, jejich vlastnosti jsou pak zdůrazněny tučnou antikvou. Na druhou stranu, takto shrnutá teorie samozřejmě nemůže nahradit ucelený výklad, obsažený pro účely bakalářského studia aplikované matematiky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci především ve skriptu [6]. Pro účely cvičení potom doporučujeme též pořízení sbírky [1], z níž jsou zde některé příklady také uvedeny.

Rádi bychom poděkovali oběma recenzentům tohoto skripta, RNDr. Marii Budíkové, Dr. a Mgr. Ondřeji Vencálkovi, Ph.D., za podrobné pročtení rukopisu a za cenné odborné připomínky, a dále studentům, kteří pomohli s přepisováním textu. Poděkování náleží také projektu Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání *Univerzita Palackého jako komplexní vzdělávací instituce* (CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002337), s jehož podporou byla skripta vydána.

Je naším vroucím přáním, aby se studentům se sbírkou dobře pracovalo a dala jim svým dílem možnost nahlédnout do krás teorie pravděpodobnosti. A aby jim pravděpodobnost a z ní vycházející matematická statistika učarovala. Ostatně jako kdysi také autorům této sbírky.

Karel Hron a Eva Fišerová
Olomouc, říjen 2020

Obsah

1 Kombinatorika

Uvažujme množinu M, která obsahuje n prvků (objektů).

Permutace *bez opakování:* libovolné **uspořádání** množiny o n prvcích, kdy ve výsledném uspořádání (výsledné uspořádané n-tici) se prvky **nesmí opakovat**.

Počet všech různých permutací (počet všech různých uspořádaných n-tic) prvků množiny M je roven číslu

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Příklad: Uveďte dvě konkrétní uspořádání na množině $M = \{a, b, c, d\}$ a určete počet všech možných uspořádání (permutací).

Řešení: Například čtveřice (a, b, d, c) a (a, c, b, d). Počet všech možných permutací je roven číslu $P(4) = 4! = 24$.

Permutace *s opakováním:* libovolná **uspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **alespoň jednou** (ve výsledné k-tici se prvky **mohou opakovat**).

Počet všech různých k-členných permutací s opakováním sestavených z n-prvkové množiny tak, že prvek a_1 se v nich vyskytuje k_1-krát, prvek a_2 se opakuje k_2-krát, atd. až prvek a_n se opakuje k_n-krát, přičemž $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$, je roven

$$P'(k_1, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Příklad: Kolik různých čtyřmístných čísel je možné vytvořit z cifer čísla 1211?

Řešení: Čtyřmístné číslo je uspořádaná čtveřice ze čtyř cifer, máme tedy obecně 4! možností. Tři cifry jsou ovšem stejné (jedničky), tedy jejich prohazováním (3! možností) získáváme stejná čísla. Čísel je takto 3! krát méně než kdyby byly cifry různé, neboli

$$P'(3,1) = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Variace *bez opakování*: libovolná **uspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše jednou** (**záleží na pořadí** prvků v této k-tici a žádný z jejích prvků se **nesmí opakovat**).

Počet všech k-prvkových variací sestavených z n-prvkové množiny je roven číslu

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Příklad: Určete počet všech 2-prvkových variací na množině $M = \{a,b,c\}$.

Řešení: Jedná se o dvojice $(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)$, to znamená $V(2,3) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$.

Poznámka. Permutace je speciálním případem variace bez opakování, tj.

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

Variace *s opakováním:* libovolná **uspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích (prvky se **mohou opakovat** a **záleží na jejich pořadí**).

Počet všech k-prvkových variací s opakováním sestavených z n-prvkové množiny je roven číslu

$$V'(k,n) = n^k.$$

Příklad: Určete počet všech 2-prvkových variací s opakováním na množině $M = \{a,b,c\}$.

Řešení: Jedná se o dvojice $(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b)$ a (c,c), tedy $V'(2,3) = 3^2 = 9$.

Kombinace *bez opakování:* libovolná **neuspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše jednou** (prvky se **nesmí opakovat** a **nezáleží na jejich pořadí**).

Počet k-prvkových kombinací sestavených z n-prvkové množiny je roven kombinačnímu číslu

$$K(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Příklad: Určete počet všech a) 1-prvkových kombinací, b) 2-prvkových kombinací na množině $M = \{a, b, c\}$.

Řešení: Chceme-li z prvků množiny $M = \{a, b, c\}$ vybrat vždy

a) jen jeden prvek, můžeme to udělat třemi možnými způsoby, tzn. vybereme a nebo b nebo c, tj. $K(1, 3) = \binom{3}{1} = 3$.

b) dva prvky, přičemž nám nezáleží na pořadí a žádný prvek nemůžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující tři dvojice prvků: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ nebo $\{b, c\}$, tj. $K(2, 3) = \binom{3}{2} = 3$.

Kombinace *s opakováním:* libovolná **neuspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích (prvky se **mohou opakovat** a **nezáleží na jejich pořadí**).

Počet k-prvkových kombinací s opakováním sestavených z n-prvkové množiny je roven kombinačnímu číslu

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Příklad: Určete počet všech a) 1-prvkových kombinací, b) 2-prvkových kombinací s opakováním na množině $M = \{a, b\}$.

Řešení: Chceme-li z prvků množiny $M = \{a, b\}$ vybrat vždy

a) jen jeden prvek, můžeme to udělat dvěma možnými způsoby, tzn. vybereme a nebo b, tedy $K'(1,2) = \binom{2+1-1}{1} = 2$.

b) dva prvky, přičemž nám nezáleží na pořadí a každý prvek můžeme vybrat vícekrát, můžeme získat následující tři dvojice prvků: $\{a,a\}$, $\{a,b\}$ nebo $\{b,b\}$, tj. $K'(2,2) = \binom{2+2-1}{1} = 3$.

Kombinatorické pravidlo součtu:
Nechť množina A_i má n_i prvků pro $i = 1, \ldots, k$ a nechť jsou množiny A_i po dvou disjunktní. Pak pro počet prvků sjednocení těchto množin platí

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Příklad: Máme šest červených a osm modrých míčků. Tyto míčky dáme do jednoho klobouku. Kolik máme celkem možností, když budeme z klobouku losovat jeden míček?

Řešení: Označme symbolem A_1 množinu červených míčků, tj. $n_1 = 6$, a A_2 množinu modrých míčků, tj. $n_2 = 8$ (množiny nemají žádný společný prvek). Chceme-li vylosovat 1 míček, máme celkem $n_1 + n_2 = 6 + 8 = 14$ možností.

Princip inkluze a exkluze:
Nechť jsou dány množiny A_i pro $i = 1, \ldots, k$ a $|A_i|$ označuje počet prvků i-té množiny ($i = 1, \ldots, k$). Potom pro počet prvků sjednocení množin $A_1, \ldots, A_k$ platí

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum\sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \sum\sum\sum_{1 \le i < j < s \le k} |A_i \cap A_j \cap A_s| - \cdots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|.$$

Princip inkluze a exkluze popisuje vztah mezi počtem prvků sjednocení nějakých množin a počty prvků všech možných průniků těchto množin. Na rozdíl od předchozího kombinatorického pravidla součtu tedy nemusí být množiny po dvou disjunktní. Speciálně pro $k = 2, 3$ takto dostaneme vztahy

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,\\
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3|\\
&\qquad -|A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$

Příklad: Ve městě fungují dva sportovní kluby. Fotbalový klub má dvanáct členů, tenisový klub devět. Přitom tři fotbalisté hrají i tenis. Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?

Řešení: Pokud sečteme počty členů v jednotlivých klubech, dostaneme číslo $12+9 = 21$. Takto jsme ovšem každého, kdo je členem obou klubů, započítali dvakrát. Musíme tedy odečíst počet lidí, kteří jsou členy obou klubů současně. Hledaný počet osob tak je $21 - 3 = 18$.

Kombinatorické pravidlo součinu:
Nechť množina A_i má n_i prvků pro $i = 1, \ldots, k$. Pak počet všech uspořádaných k-tic $(a_1, \ldots, a_k)$, kde $a_1 \in A_1$, …, $a_k \in A_k$, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby až k-tý člen n_k způsoby, je roven součinu

$$\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdots n_k.$$

Příklad: Máme tři ženy a čtyři muže. Kolik různých párů muž – žena můžeme vytvořit?

Řešení: Chceme vždy k jedné ženě přiřadit nějakého muže. Počet všech párů určíme následovně: vezmeme jednu ženu, říkejme jí třeba Katka, a postupně k ní přiřadíme všechny muže. Dostaneme tak 4 různé páry, protože k ní můžeme přiřadit celkem 4 různé pány. Totéž uděláme pro dvě zbývající ženy, ty také vytvoří vždy další 4 páry. A to je vše, máme celkem $4 + 4 + 4 = 12$ párů, tj. $n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 4 = 12$.

Řešené příklady

Příklad 1. Ve výzkumném ústavu pracuje 67 lidí. Z nich 47 ovládá angličtinu, 35 němčinu, 20 francouzštinu, 23 němčinu a angličtinu, 12 angličtinu a francouzštinu, 11 němčinu a francouzštinu a 5 lidí všechny 3 jazyky. Kolik pracovníků ústavu neovládá žádný z těchto jazyků?

Řešení. Označme A množinu lidí, kteří ovládají angličtinu, N množinu lidí, kteří umí německy, a F množinu lidí, kteří umí francouzsky. Počet pracovníků, kteří neovládají žádný z jazyků, je roven počtu pracovníků ústavu zmenšeného o počet pracovníků, kteří ovládají alespoň jeden z jazyků. Pro výpočet použijeme princip inkluze a exkluze a dostaneme

$$\begin{aligned}67 - |A \cup N \cup F| &= 67 - (|A| + |N| + |F|)\\ &\quad + (|A \cap N| + |A \cap F| + |N \cap F|) - |A \cap N \cap F|\\ &= 67 - (47 + 35 + 20) + (23 + 12 + 11) - 5 = 6.\end{aligned}$$

○

Příklad 2. Ze skupiny sedmi mužů a čtyř žen se má vybrat šestičlenná skupina, v níž budou alespoň dvě ženy. Kolika způsoby to lze provést?

Řešení. Jestliže má šestičlenná skupina obsahovat alespoň dvě ženy, obsahuje buď právě dvě ženy a čtyři muže, nebo právě tři ženy a tři muže, nebo právě čtyři ženy a dva muže. Podívejme se, kolika způsoby lze vybrat právě dvě ženy a čtyři muže. Dvě ženy vybíráme ze čtyř a při výběru nezáleží na pořadí. Počet způsobů, jak tyto dvě ženy vybrat, je roven počtu dvoučlenných kombinací ze čtyř prvků, tj. $\binom{4}{2}$. Analogicky, zbývající čtyři muže ze sedmi lze vybrat $\binom{7}{4}$ způsoby. Podle kombinatorického pravidla součinu můžeme vytvořit skupinu, v níž jsou dvě ženy a čtyři muži $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4}$ způsoby. Stejně postupujeme i pro další možné šestičlenné skupiny. Celkový počet možností, jak sestavit požadovanou šestičlennou skupinu, ve které jsou alespoň dvě ženy, je podle kombinatorického pravidla součtu roven

$$\begin{aligned}&\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{4} + \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{4} \cdot \binom{7}{2}\\ &\quad = \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{1} \cdot \binom{7}{3} + \binom{4}{0} \cdot \binom{7}{2}\\ &\quad = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{4}{1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + 1 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 371.\end{aligned}$$

○

Příklad 3. Sestavujeme vlajku ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.

a) Kolik vlajek lze sestavit?

b) Kolik jich má modrý pruh?

c) Kolik jich nemá červený pruh uprostřed?

Řešení.

a) Sestavujeme vlajku ze tří různých pruhů z pěti různých barev, přičemž záleží na pořadí pruhů. Počet všech možností takto sestavené vlajky je roven počtu tříčlenných variací z pěti prvků, tj. $V(3,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

b) Modrý pruh lze na vlajku umístit třemi způsoby (nahoru, doprostřed, dolů). Zbývající dva barevné pruhy vybereme jako uspořádanou dvojici z pruhů barvy bílé, červené, zelené a žluté. Počet možností, jak tuto dvojici vytvořit, je roven počtu dvoučlenných variací ze čtyř prvků, tj. $V(2,4) = 4 \cdot 3 = 12$. Dohromady dostaneme, že počet vlajek s modrým pruhem je roven $3 \cdot V(2,4) = 3 \cdot 12 = 36$.

c) Dle předchozích úvah má červený pruh uprostřed $V(2,4) = 12$ vlajek. Potom počet vlajek, které nemají červený pruh uprostřed, můžeme spočítat jako počet všech vlajek zmenšený o počet vlajek s červeným pruhem uprostřed, tj. $60 - 12 = 48$.

$\circ$

Příklad 4. V pětimístné lavici sedí pět studentů.

a) Kolika způsoby si mohou sednout?

b) Co když žák A chce sedět na kraji?

c) Co když žáci A a B chtějí sedět vedle sebe?

Řešení. Označme si studenty písmeny A, B, C, D a E.

a) Vzhledem k tomu, že záleží na pořadí, jak se studenti do lavice posadí, jedná se o permutace z pěti prvků. Počet všech možných způsobů rozmístění pěti studentů do lavice je tedy roven $P(5) = 5! = 120$.

b) Chce-li žák A sedět na kraji lavice, má dvě možnosti, kam si sednout (úplně vlevo nebo vpravo). Na zbývající čtyři místa v lavici se usadí studenti B, C, D a E. Počet všech možností rozmístění těchto čtyř studentů je roven permutaci ze čtyř prvků. Dohromady je tedy počet všech možností rozmístění pěti studentů do lavice, jestliže žák A sedí na kraji lavice, roven $2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4! = 48$.

c) Sedí-li žáci A a B vedle sebe, můžeme si tyto dva žáky představit jako jednoho hypotetického žáka AB. Počet všech možností usazení žáků do lavice, kde žáci A a B sedí vedle sebe je roven počtu všech permutací ze čtyř prvků AB, C, D, E. Žáci A a B si vedle sebe mohou sednout dvěma způsoby, a to v pořadí (A, B) nebo (B, A). Proto celkový počet možností rozmístění pěti studentů do lavice, jestliže žáci A a B chtějí sedět vedle sebe, je roven $2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4! = 48$.

○

Příklad 5. Kolik různých „slov" lze vytvořit přeházením písmen ve slově „KOMBINATORIKA"?

Řešení. K dipozici máme 9 různých písmen A, B, K, M, N, O, I, R, T, přičemž písmena A, K, O, I máme dvakrát. Dohromady máme celkem 13 písmen. Při tvorbě slov záleží na pořadí písmen, a proto je počet slov, které lze z těchto písmen sestavit, roven počtu 13-členných permutací s opakováním sestavených z 9 prvků, kde počet výskytů jednotlivých prvků je postupně $2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1$, tj.

$$\begin{aligned} P'(2,1,2,1,1,2,2,1,1) &= \frac{(2+1+2+1+1+2+2+1+1)!}{2!1!2!1!1!2!2!1!1!} \\ &= \frac{13!}{2!2!2!2!} = 778377600. \end{aligned}$$

○

Příklad 6. V košíčku je pět červených, sedm modrých a šest žlutých velikonočních vajíček. Kolika způsoby lze z košíčku vybrat pět vajíček tak, aby nebyla všechna stejné barvy?

Řešení. V košíčku jsou celkem tři druhy vajíček (červená, modrá a zelená vajíčka). Počet všech možných výsledků, jak z košíčku vybrat pět vajíček, je roven počtu 5-členných kombinací s opakováním sestavených ze tří prvků, tj. $K'(5,3)$. V tomto počtu jsou ale zahrnuté i tři výsledky, kdy všech pět vybraných vajíček je stejné barvy (červená, modrá nebo žlutá). Proto je počet možností, jak z košíčku vybrat pět vajíček tak, aby nebyla všechna stejné barvy, roven

$$K'(5,3) - 3 = \binom{5+3-1}{5} - 3 = \binom{7}{5} - 3 = \binom{7}{2} - 3 = \frac{7 \cdot 6}{2} - 3 = 18.$$

○

ПШП

1. Studenti si ve škole mohou vybrat ze tří cizích jazyků (angličtina, němčina a francouzština). Každý student ze třídy má alespoň jeden cizí jazyk. Anglický jazyk navštěvuje 18 studentů, německý 19 a francouzský 16 studentů. Do anglického i německého jazyku chodí 12 studentů, do anglického i francouzského 9, a do německého i francouzského jazyku chodí 8 studentů. Všechny tři jazyky současně se učí 5 studentů.

   (a) Kolik studentů je ve třídě?
   (b) Kolik studentů se učí pouze anglicky?
   (c) Kolik studentů se učí anglicky nebo německy?
   (d) Kolik studentů se učí anglicky i německy, ale nikoliv francouzsky?

   [a) 29, b) 2, c) 25, d) 7]

2. Kolik přirozených čísel do 1000 je dělitelných 2 nebo 3?

   [667]

3. Sečtěte a výsledek zapište jako kombinační číslo:

$$\binom{24}{9} + \binom{24}{8}.$$

   [$\binom{25}{9}$]

4. V binomickém rozvoji výrazu $\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)^{15}$ zjistěte třináctý člen rozvoje. Který člen rozvoje je roven konstantě (tj. neobsahuje x)?

   [$455x^{-21}$; $k = 6$]

5. Je dáno k předmětů, které se mají rozmístit do n rozlišitelných přihrádek. Kolika způsoby to lze provést, jsou-li předměty

   (a) rozlišitelné,

   (b) nerozlišitelné?

[a) n^k, b) $\binom{n+k-1}{k}$]

6. Nechť n je libovolné přirozené číslo. Dokažte, že platí výraz

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

7. Vědecká společnost má 25 členů. Z nich má být vybrán předseda, místopředseda, jednatel a pokladník. Kolika způsoby lze výběr provést, jestliže každý člen společnosti může zastávat pouze jednu funkci?

[303600]

8. Ve vlaku je kupé se čtyřmi místy v každém směru jízdy. Z osmi cestujících tři chtějí sedět ve směru jízdy, dva proti, ostatním je to jedno. Kolika způsoby si mohou sednout, aby byli všichni spokojeni?

[1728]

9. Kolika způsoby může nastoupit m chlapců a n dívek do zástupu tak, aby

   (a) nejdříve stály dívky a pak chlapci,

   (b) mezi žádnými dvěma chlapci nestála dívka?

[a) $n!m!$, b) $(n+1)!m!$]

10. Osm přátel si v restauraci sedá ke „svému" stolu o osmi místech.

    (a) Kolika způsoby se mohou posadit?

    (b) Co když je stůl kulatý a za jedno rozmístění považujeme ta, kdy má každý stejného levého i pravého souseda?

[a) 40320, b) 5040]

11. Test se skládá ze 2 dějepisných, 2 zeměpisných a 1 literární otázky. Připraveno je 30 dějepisných, 25 zeměpisných a 20 literárních otázek. Kolik variant testu lze vytvořit?

[2610000]

12. Na večírku je n lidí. Přiťukne-li si skleničkou každý s každým, kolik ťuknutí by mohlo být slyšet?

$[\frac{n(n-1)}{2}]$

13. Kolika způsoby může m chlapců a n dívek vytvořit taneční pár?

$[m \cdot n]$

14. Kolik SPZ existuje, jsou-li tvořeny 3 písmeny a 4 čísly (písmen je 28)?

[219520000]

15. Kolika způsoby lze umístit všechny bílé šachové figurky

    (a) do dvou pevně zvolených řad šachovnice,

    (b) do libovolných dvou řad?

[a) 64864800, b) 1816214400]

16. Kolik lze vytvořit různých značek Morseovy abecedy, tvoříme-li jedna až čtyřmístné posloupnosti teček a čárek?

[30]

17. Kolika způsoby můžeme ze sedmi kuliček (4 modré, 1 bílá, 1 červená, 1 zelená) vybrat a položit do řady pět kuliček?

[135]

18. Klenotník má 3 rubíny, 2 smaragdy a 5 safírů. Kolika způsoby může sestavit prsten se 3 kameny (mohou se opakovat)?

[9]

19. Kolik je kvádrů s velikostmi hran rovnými přirozeným číslům rovným nejvýše 10? Kolik z nich jsou krychle?

[220, 10]

2 Náhodný jev a jeho pravděpodobnost

Označíme Ω množinu všech možných výsledků **náhodného pokusu**.

- Náhodným pokusem rozumíme pokus, kdy za daných podmínek může jeho realizací dojít k různým výsledkům.
- Jeden konkrétní výsledek náhodného pokusu značíme ω, tj. $\omega \in \Omega$.
- Každou jednoprvkovou podmnožinu množiny Ω nazýváme **elementární jev**, tj. $\{\omega\} \subset \Omega$.
- Symbolem Ω označujeme **jev jistý**, symbolem $\emptyset$ pak **jev nemožný**.
- Symbolem A^c označujeme **jev opačný k jevu** A, neboli jev, který nastane právě tehdy, když nenastane A.

Jev: Obecně podmnožiny A množiny Ω nazýváme **jevy**, tj. $\mathsf{A} \subset \Omega$. Platí, že $\{\omega\} \subset \mathsf{A} \subset \Omega$.
Operace s jevy $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$: sjednocení (konečné $\bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{A}_i$, nekonečné $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n$), průnik ($\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{A}_i$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n$), doplněk ($\mathsf{A}_1^c$), rozdíl ($\mathsf{A} \backslash \mathsf{B}$), atd.
Jevy A a B nazýváme **neslučitelné** (disjunktní), jestliže $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$.
Systém jevů $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ nazveme **disjunktní**, jestliže jsou jevy tohoto systému po dvou disjunktní, tj. $\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j = \emptyset$ pro $\forall i \neq j$.

Náhodný jev: Jev A nazveme **náhodným jevem**, jestliže $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$, kde $\mathcal{A}$ je tzv. **jevové pole**, tedy neprázdný systém podmnožin Ω, kde

a) $\mathsf{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathsf{A}^c \in \mathcal{A}$,

b) $\mathsf{A}_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n \in \mathcal{A}$.

Pokud provádíme s náhodnými jevy množinové operace, jaké byly zavedené u jevů, výsledek je opět náhodným jevem. Stejně tak jsou náhodnými jevy také jev jistý a jev nemožný. Jevové pole je tedy vskutku „rozumným“ systémem podmnožin Ω (definice výše vede obecně na tzv. σ-algebru množin).

Příklad: Při hodu kostkou může za daných podmínek padnout jedno, dvě až šest ok. V takovém případě je množina všech možných výsledků tohoto pokusu šestiprvková, tj. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, kde např. výsledek ω_2 značí počet ok na kostce rovný dvěma. Příkladem jevů může být elementární jev $\{\omega_2\}$ – „padl počet ok rovný dvěma“ nebo $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – „padl sudý počet ok“.

Pravděpodobnost *(očekávatelnost) jevu:* Každá reálná funkce definovaná na jevovém poli, tj. $\mathsf{P}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, která má následující vlastnosti

1. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,
2. $\mathsf{P}(\mathsf{A}) \geq 0$ pro všechna $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$,
3. pro libovolnou posloupnost $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$ neslučitelných náhodných jevů platí: $\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\mathsf{A}_n)$.

Trojici $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ nazýváme **pravděpodobnostní prostor**.

Ze základních vlastností pravděpodobnosti zde připomeňme alespoň tyto

- $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathsf{P}(\mathsf{A}^c) = 1 - \mathsf{P}(\mathsf{A})$.
- Pro neslučitelné jevy A, B platí $\mathsf{P}(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = \mathsf{P}(\mathsf{A}) + \mathsf{P}(\mathsf{B})$.

Klasická definice pravděpodobnosti:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{n_A}{n},$$

kde n_A je počet výsledků náhodného pokusu příznivých jevu A a n značí počet všech možných výsledků náhodného pokusu. Předpokládáme, že

1. Ω je konečná, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$,
2. všechny výsledky náhodného pokusu jsou tzv. „stejně možné“.

Řešené příklady

Příklad 1. Do výtahu osmipatrového domu nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí nezávisle na ostatních v libovolném poschodí. Jaká je pravděpodobnost, že všechny osoby vystoupí

a) v šestém poschodí,

b) v témže poschodí,

c) každá v jiném poschodí.

Řešení. Každá osoba může vystoupit v jednom z osmi poschodí. Pravděpodobnost vystoupení jedné osoby v jednom libovolném poschodí je tedy $\frac{1}{8}$.

a) Pravděpodobnost vystoupení jedné osoby právě v šestém poschodí je $\frac{1}{8}$. Pravděpodobnost, že všech pět osob vystoupí společně právě v šestém poschodí je proto rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8^5} \doteq 0{,}0000305.$$

b) $\mathsf{P}(\mathsf{B}) = 8 \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}) = 8 \cdot \frac{1}{8^5} = \frac{1}{8^4} \doteq 0{,}000244$, neboť všech pět osob může společně vystoupit v kterémkoliv z osmi poschodí.

c) První osoba může vystoupit v kterémkoliv z osmi poschodí. Protože druhá osoba musí vystoupit v jiném poschodí, má k dispozici už jen sedm možných pater, ve kterých může vystoupit. Takto postupujeme pro další osoby. Pro poslední, pátou osobu zbývají už jen čtyři různá poschodí, v nichž může vystoupit. Proto

$$\mathsf{P}(\mathsf{C}) = \frac{8}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{8} \doteq 0{,}205078.$$

○

Příklad 2. Vojenskou kolonu tvoří dva terénní vozy Land Rover Defender, tři obrněná vozidla Iveco LMV a čtyři Tatry 810. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení kolony pojedou stejná vozidla za sebou?

Řešení. Počet možných seřazení vozidel je roven počtu permutací s opakováním, protože při řazení nerozlišujeme mezi sebou vozidla stejného typu.

Pokus „náhodné seřazení vozidel“ má tedy celkem $\frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ výsledků. Příznivých výsledků je celkem 3!, tolika způsoby můžeme za sebou zařadit 3 typy vozidel. Proto $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{6}{1260} = \frac{1}{210} \doteq 0{,}00476$. ○

Příklad 3. Jaká je pravděpodobnost, že slovem náhodně sestaveným z písmen A, A, A, E, I, K, M, M, T, T bude MATEMATIKA?

Řešení. K dispozici máme celkem 10 písmen, z toho 3 písmena A, 2 písmena M, 2 písmena T, a písmena E, I a K. Počet možných desetipísmenných slov sestavených z těchto písmen je roven počtu permutací s opakováním, protože při tvorbě slov nerozlišujeme mezi sebou stejná písmena. Můžeme tedy vytvořit celkem $\frac{10!}{3!2!2!} = 151200$ různých slov. Proto $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{1}{151200} \doteq 0{,}000006614$. ○

Příklad 4. Ve třídě je 28 žáků, z toho 12 dívek. Náhodně vybereme 4 žáky. S jakou pravděpodobností budou ve vybrané skupině

a) samí chlapci,

b) 3 chlapci a 1 dívka,

c) nejvýše jeden chlapec,

d) nejvýše dvě dívky?

Řešení. Ve vybrané skupině čtyř žáků uvažujeme pouze počty chlapců nebo dívek a nezajímá nás pořadí, ve kterém byli vybíráni. Počet všech možných výsledků tohoto náhodného pokusu je proto roven počtu 4-prvkových kombinací bez opakování sestavených z 28 prvků (výběr se děje bez vracení), tj. $\binom{28}{4} = 20475$. Počet výsledků příznivých příslušným jevům určíme tak, že spočteme počet možností, jak vybrat uvedenou skupinu chlapců, resp. uvedenou skupinu dívek a tyto možnosti vynásobíme, protože každou vybranou skupinu chlapců je možno doplnit libovolnou vybranou skupinou dívek.

a) Jsou-li ve vybrané skupině jen samí chlapci, počet příznivých výsledků je roven $\binom{16}{4} = 1820$, neboť vybíráme 4 chlapce ze skupiny 16 chlapců. Odtud dostaneme

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{\binom{16}{4}\binom{12}{0}}{\binom{28}{4}} \doteq 0{,}0889.$$

b) Jsou-li ve vybrané skupině 3 chlapci a 1 dívka, počet příznivých výsledků je roven $\binom{16}{3}\binom{12}{1} = 6720$, neboť vybíráme 3 chlapce ze skupiny 16 chlapců a 1 dívku ze skupiny 12 dívek. Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{\binom{16}{3}\binom{12}{1}}{\binom{28}{4}} \doteq 0{,}3282.$$

c) Má-li být ve vybrané skupině nejvýše jeden chlapec, potom je ve skupině buď právě jeden nebo žádný chlapec. Odtud

$$\mathsf{P}(\mathsf{C}) = \frac{\binom{16}{0}\binom{12}{4} + \binom{16}{1}\binom{12}{3}}{\binom{28}{4}} \doteq 0{,}1960.$$

d) Jsou-li ve vybrané skupině nejvýše dvě dívky, příznivým výsledků odpovídají čtveřice, ve kterých buď není žádná dívka, nebo v ní je právě jedna nebo právě dvě dívky. Opačným jevem je situace, kdy ve čtveřici budou buď právě tři nebo právě čtyři dívky, a k nim buď právě jeden nebo žádný chlapec. Tato situace ovšem představuje jev C. Dohromady jsme tedy dostali

$$\mathsf{P}(\mathsf{D}) = 1 - \mathsf{P}(\mathsf{C}) \doteq 0{,}8040.$$

○

Příklad 5. V osudí je 15 lístků označených čísly 1 až 15. Vypočítejte pravděpodobnost, že mezi třemi náhodně vybranými lístky bude

a) nejvýše jeden označen sudým číslem,

b) alespoň jeden označen číslem větším než 10.

Řešení. V osudí je celkem 15 lístků, z toho 7 se sudým číslem, 8 s lichým číslem. Z osudí losujeme tři lístky. Protože nás nezajímá pořadí, ve kterém byly lístky vybrány a lístky do osudí nevracíme, je počet všech možných výsledků tohoto náhodného pokusu roven počtu 3-prvkových kombinací bez opakování sestavených z 15 prvků, tj. $\binom{15}{3} = 455$.

a) Je-li mezi vybranými lístky nejvýše jeden označen sudým číslem, znamená to, že mezi třemi vybranými lístky jsou buď všechny tři lístky s lichým číslem nebo právě dva lístky s lichým a jeden se sudým číslem.

V první situaci vybíráme tři lístky z osmi lichých, v druhé situaci vybíráme dva lístky z osmi lichých a jeden lístek ze sedmi sudých lístků. Odtud

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{\binom{8}{3}\binom{7}{0} + \binom{8}{2}\binom{7}{1}}{\binom{15}{3}} \doteq 0{,}554.$$

b) Opačný jev k jevu „alespoň jeden lístek je označen číslem větším než 10“ je jev, že všechny lístky jsou označeny čísly v rozmezí jedna až deset. V této situaci vybíráme tři lístky z deseti různých lístků. Odtud dostaneme

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} \doteq 0{,}736.$$

○

ПШП

1. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Vypište všechna možná jevová pole na této množině možných výsledků, která obsahují jev $\{\omega_1, \omega_3\}$.

   [$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}$;
   $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \Omega\}$]

2. Pro zkoušku provozní spolehlivosti určitého zařízení je předepsán tento postup: zařízení je uvedeno v činnost pětkrát při maximálním zatížení. Jakmile při některém z těchto pěti pokusů zařízení selže, nesplnilo podmínky zkoušky. Označme A_i jev: „při i-tém pokusu zařízení selhalo“ pro $i = 1, \ldots, 5$. Pomocí jevů A_i vyjádřete jevy:

   (a) Zařízení neprošlo úspěšně zkouškou.

   (b) První tři pokusy byly úspěšné, ve 4. a 5. pokusu zařízení selhalo.

   (c) 1. a 5. pokus byly úspěšné, ale zkouška byla neúspěšná.

   [a) $\mathsf{A}_1 \cup \cdots \cup \mathsf{A}_5$; b) $\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c \cap \mathsf{A}_4 \cap \mathsf{A}_5$; c) $\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_5^c \cap (\mathsf{A}_2 \cup \mathsf{A}_3 \cup \mathsf{A}_4)$]

3. Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne sudé číslo a jev B znamená, že padne číslo větší než 4. Pomocí operací s jevy vyjádřete následující jevy:

   (a) padne liché číslo,

(b) nepadne číslo 1 ani 3,

(c) padne číslo 6.

[a) A^c, b) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$]

4. Dělník vyrobil čtyři výrobky. Nechť jev A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, nastane tehdy, jestliže má i-tý výrobek chybu. Zapište pomocí operací průnik, sjednocení, rozdíl a opačných jevů jevy

   (a) všechny výrobky jsou bez chyb,

   (b) alespoň jeden výrobek má chybu.

[a) $\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c \cap \mathsf{A}_4^c = (\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \mathsf{A}_3 \cup \mathsf{A}_4)^c$, b) $\mathsf{A}_1 \cup \mathsf{A}_2 \cup \mathsf{A}_3 \cup \mathsf{A}_4$]

5. Jev A znamená, že alespoň jeden ze čtyř výrobků je zmetek, jev B znamená, že alespoň dva ze čtyř výrobků jsou zmetky. Co znamenají jevy A^c, B^c?

[žádný výrobek není zmetek, žádný nebo jeden výrobek je zmetek]

6. Jev A nastane, je-li dané číslo dělitelné 2, jev B, je-li dělitelné 3. Popište jevy $\mathsf{C} = \mathsf{A} \cap \mathsf{B}$, $\mathsf{A}^c \cap \mathsf{C}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{C}^c$ a $\mathsf{A}^c \cup \mathsf{B}^c$.

[číslo dělitelné 6, $\emptyset$, všechna celá čísla, číslo nedělitelné 6]

7. Dítě dostalo sáček, v němž bylo pět červených a pět žlutých bonbónů. Dítě náhodně vybralo ze sáčku šest bonbónů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bonbóny budou právě dva červené?

[0,238]

8. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne:

   (a) na každé kostce jiné číslo,

   (b) samé šestky,

   (c) právě pět šestek,

   (d) právě čtyři šestky,

   (e) alespoň čtyři šestky,

   (f) samá sudá čísla,

   (g) všechna čísla stejná.

[a) 0,01543; b) 0,0000214; c) 0,000643; d) 0,008037; e) 0,00870; f) 0,015625; g) 0,0001286]

9. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 2 kostkami bude součet 8?

[$0{,}13\bar{8}$]

10. 40 studentů má být rozděleno na 4 stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že studenti Aleš a Břetislav budou ve stejné skupině?

[0,231]

11. Z kompletní sady 32 mariášových karet vytáhneme náhodně 4 karty. Určete pravděpodobnost, že

   a) všechny karty budou esa,
   b) všechny karty budou kule,
   c) všechny karty budou stejné „barvy“,
   d) mezi nimi bude právě jedno eso,
   e) mezi nimi bude alespoň jedno eso.

[a) 0,0000278; b) 0,00195; c) 0,00779; d) 0,364; e) 0,431]

12. Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že

   a) v prvním hodu padne šestka a v druhém šestka nepadne,
   b) padne právě jedna šestka,
   c) padne nejvýše jedna šestka,
   d) v druhém hodu padne číslo o 1 větší než v prvním hodu,
   e) padnou čísla lišící se o 1,
   f) v prvním hodu padne menší číslo než v druhém,
   g) v prvním hodu padne číslo větší než 2 a v druhém menší než 4?

[a) $\frac{5}{36}$; b) $\frac{5}{18}$; c) $1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$; d) $\frac{5}{36}$; e) $\frac{5}{18}$; f) $\frac{5}{12}$; g) $\frac{1}{3}$]

13. Dodávka obsahuje 50 matic a 150 šroubů. Polovina matic a polovina šroubů je rezavá. Jestliže náhodně vybereme jednu součástku, jaká je pravděpodobnost, že to bude matice nebo že to bude součást rezavá?

[0,625]

3 Podmíněná pravděpodobnost

Nechť je dán **pravděpodobnostní prostor** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Nechť A, B jsou náhodné jevy, tj. $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{A}$. ***Podmíněná pravděpodobnost*** jevu A za podmínky, že nastal jev B, je dána jako

$$\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{B})}, \quad \mathsf{P}(\mathsf{B}) > 0.$$

Věta o násobení pravděpodobností:
Nechť $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n \in \mathcal{A}$ a $\mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_{n-1}) > 0$, potom platí

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{A}_i\right) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2 \mid \mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3 \mid \mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2) \cdots \mathsf{P}\left(\mathsf{A}_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathsf{A}_i\right).$$

Věta o úplné pravděpodobnosti:
Je dána posloupnost $\{\mathsf{B}_n\}$ (konečná nebo nekonečná) disjunktních náhodných jevů, kde $\mathsf{P}(\mathsf{B}_n) > 0$, $\mathsf{P}(\bigcup_n \mathsf{B}_n) = 1$ (tzv. úplný systém hypotéz). Potom pro libovolný jev $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$ platí

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \sum_n \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_n) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}_n).$$

Bayesova věta:
Nechť platí předpoklady předchozí věty a navíc mějme $\mathsf{A} \in \mathcal{A}$, pro který $\mathsf{P}(\mathsf{A}) > 0$. Potom

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}_n \mid \mathsf{A}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_n) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}_n)}{\sum_j \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_j) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}_j)}.$$

Poznámka. V kontextu Bayesovy věty se $\mathsf{P}(\mathsf{B}_n)$ nazývá apriorní pravděpodobnost a $\mathsf{P}(\mathsf{B}_n \mid \mathsf{A})$ aposteriorní pravděpodobnost.

Řešené příklady

Příklad 1. V populaci je 5 % diabetiků, 2 % populace jsou diabetici kuřáci. Ukázalo se, že náhodně zvolená osoba je kuřák. Jaká je pravděpodobnost, že má diabetes?

Řešení. Symbolem A označme jev, že náhodně vybraná osoba je diabetik a symbolem B jev, že náhodně vybraná osoba je kuřák. V populaci je 5 % diabetiků, proto $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = 0{,}05$. Dále víme, že 2 % populace jsou diabetici kuřáci, neboli $\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = 0{,}02$. K výpočtu pravděpodobnosti, že náhodně zvolený diabetik je kuřák, použijeme podmíněnou pravděpodobnost. Jinak řečeno hledáme pravděpodobnost, že náhodně zvolená osoba je kuřák, víme-li, že je diabetik. Proto

$$\mathsf{P}(\mathsf{B} \mid \mathsf{A}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{A})} = \frac{0{,}02}{0{,}05} = 0{,}4.$$

○

Příklad 2. Ve studijní skupině je 23 posluchačů. Pravděpodobnost složení zkoušky z teorie pravděpodobnosti a statistiky je pro 8 posluchačů 0,9; pro 12 posluchačů 0,6 a pro 3 posluchače 0,4. Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolený posluchač tuto zkoušku složí.

Řešení. Označme symbolem A jev, že náhodně zvolený posluchač složí zkoušku. Studijní skupinu můžeme rozdělit do tří disjunktních množin, a to na výborné, dobré a slabé studenty. Symboly B_1, B_2 a B_3 postupně označme jevy, že náhodně vybraný student je výborný, dobrý a slabý. Pravděpodobnosti vybrání studentů z jednotlivých skupin jsou rovny

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}_1) = \frac{8}{23}; \quad \mathsf{P}(\mathsf{B}_2) = \frac{12}{23}; \quad \mathsf{P}(\mathsf{B}_3) = \frac{3}{23}.$$

Náhodné jevy B_1, B_2 a B_3 tvoří úplný systém jevů (neslučitelné jevy a pravděpodobnost sjednocení těchto jevů je rovna 1). Dále známe pravděpodobnosti úspěšného složení zkoušky pro jednotlivé skupiny studentů. Jinými slovy známe podmíněné pravděpodobnosti úspěšného složení zkoušky, víme-li, do které skupiny náhodně zvolený student patří

$$\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_1) = 0{,}9; \quad \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_2) = 0{,}6; \quad \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_3) = 0{,}4.$$

Hledanou pravděpodobnost, že náhodně zvolený student složí zkoušku bez ohledu na to, do které skupiny patří, spočteme pomocí věty o úplné pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\mathsf{A}) &= \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}_1) + \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_2) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}_2) + \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}_3) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}_3) \\ &= 0{,}9 \cdot \frac{8}{23} + 0{,}6 \cdot \frac{12}{23} + 0{,}4 \cdot \frac{3}{23} \doteq 0{,}6783. \end{aligned}$$

○

Příklad 3. U jistého druhu elektrického spotřebiče se s pravděpodobností 0,1 vyskytuje výrobní vada. U spotřebiče s touto výrobní vadou dochází v záruční době k poruše s pravděpodobností 0,5. Výrobky, které tuto vadu nemají, se v záruční době porouchají s pravděpodobností 0,01. S jakou pravděpodobností

a) u náhodně vybraného výrobku nastane v záruční době porucha?

b) výrobek, který se v záruční době porouchá, bude mít dotyčnou výrobní vadu?

Řešení. Označme symbolem A jev, že u náhodně vybraného výrobku z produkce nastane v záruční době porucha a symbolem B jev, že náhodně vybraný výrobek má výrobní vadu. Potom ze zadání příkladu známe tyto pravděpodobnosti

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}) = 0{,}1;\ \mathsf{P}(\mathsf{B}^c) = 0{,}9;\ \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) = 0{,}5;\ \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}^c) = 0{,}01.$$

a) Pravděpodobnost $\mathsf{P}(\mathsf{A})$, že u náhodně vybraného výrobku nastane v záruční době porucha, spočteme pomocí věty o úplné pravděpodobnosti, neboť můžeme vybrat buď výrobek s výrobní vadou nebo výrobek bez vady. Proto

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\mathsf{A}) &= \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}) + \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}^c) \\ &= 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}01 \cdot 0{,}9 = 0{,}059. \end{aligned}$$

b) Pro výpočet pravděpodobnosti, že výrobek, který se v záruční době porouchá, bude mít dotyčnou výrobní vadu, využijeme Bayesovu větu. Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{B} \mid \mathsf{A}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{A})} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}059} \doteq 0{,}8475.$$

○

Příklad 4. Mezi šesti puškami jsou pouze dvě zastřílené. Pravděpodobnost zásahu je u zastřílené 0,9, u nezastřílené 0,4. Náhodně vybranou puškou se podařilo cíl zasáhnout. Jaká je pravděpodobnost, že šlo o zastřílenou (nezastřílenou) pušku?

Řešení. Označme symbolem A náhodný jev, který značí zasažení terče. Symbolem B označme jev, že náhodně vybraná puška je zastřílená. Mezi šesti puškami jsou právě dvě pušky zastřílené, proto $\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{1}{3}$. Dále známe podmíněné pravděpodobnosti zásahu do terče v závislosti na typu pušky. Pravděpodobnost zásahu u zastřílené pušky je 0,9, tj. $\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) = 0{,}9$; u nezastřílené pušky je pravděpodobnost zásahu jen 0,4, tj. $\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}^c) = 0{,}4$. Pro výpočet hledané pravděpodobnosti, že se střílelo ze zastřílené pušky, víme-li, že byl zasažen cíl, použijeme Bayesův vzorec dohromady s větou o úplné pravděpodobnosti a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\mathsf{B} \mid \mathsf{A}) &= \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{A})} = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B})}{\mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}) + \mathsf{P}(\mathsf{A} \mid \mathsf{B}^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{B}^c)} \\ &= \frac{0{,}9 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}9 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}4 \cdot \frac{2}{3}} \doteq 0{,}6923. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že se střílelo z nezastřílené pušky, byl-li zasažen cíl, je rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}^c \mid \mathsf{A}) = 1 - \mathsf{P}(\mathsf{B} \mid \mathsf{A}) \doteq 1 - 0{,}6923 = 0{,}3077.$$

○

ПШП

1. Z pěti výrobků, mezi nimiž jsou tři zmetky, vybíráme třikrát bez vracení po jednom výrobku. Vypočtěte pravděpodobnost, že první vybraný výrobek je kvalitní a další dva jsou zmetky.

[0,2]

2. Dvakrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet přesáhne 10, víme-li, že padla (alespoň jedna) šestka?

[$\frac{3}{11}$]

3. V první zásuvce jsou dvě zlaté mince, ve druhé jedna zlatá a jedna stříbrná, ve třetí dvě stříbrné. Zvolíme náhodně zásuvku a vytáhneme minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, jestliže jsme vytáhli stříbrnou?

[$\frac{1}{3}$]

4. Pravděpodobnosti závodníků A, B, C na vítězství jsou 0,4; 0,3 a 0,2. Jestliže závodník A odstoupil ze závodu, jaká je pravděpodobnost na vítězství závodníků B a C?

[0,5; $\frac{1}{3}$]

5. V první urně je šest bílých a dvě černé koule, ve druhé jsou čtyři bílé a dvě černé koule. Náhodně zvolíme urnu a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

[0,708]

6. Elektronka s pravděpodobnostmi 0,4, 0,3 a 0,3 náleží k jedné ze tří možných partií. Pravděpodobnosti, že elektronka odpracuje stanovený počet hodin, jsou u jednotlivých partií 0,8, 0,9 a 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná elektronka odpracuje stanovený počet hodin?

[0,83]

7. K výstupní kontrole přicházejí výrobky, z nichž je 13 % zmetků. Výstupní kontrola propustí 1 % ze všech zmetků a vyřadí 2 % dobrých výrobků. Kolik procent výrobků kontrola vyřadí?

[14,61 %]

8. V osudí je b bílých a c černých koulí. Táhneme dvakrát bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že

   a) v prvním tahu bude tažena bílá koule?

   b) ve druhém tahu bude tažena bílá koule?

[a) $\frac{b}{b+c}$; b) $\frac{b}{b+c}$]

9. Jeden ze tří střelců s pravděpodobnostmi zásahu 0,3, 0,5 a 0,8 vystřelil a zasáhl. Jaká je pravděpodobnost, že střílel druhý střelec?

[0,3125]

10. Závod produkuje 5 % zmetků se závadou typu A. Mezi nimi je 6 % výrobků, které mají i závadu typu B. Mezi výrobky bez vady typu A jsou 2 % výrobků se závadou typu B. Jaký je podíl závad typu B mezi všemi výrobky?

[0,022]

11. Mezi 20 střelci jsou 4 výborní, 10 dobrých a 6 průměrných s pravděpodobnostmi zásahu 0,9, 0,7 a 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně vybraní střelci oba zasáhnou cíl?

[0,46]

12. Detekční přístroj vadu materiálu odhalí s pravděpodobností 0,95, bezvadný materiál označí jako vadný s pravděpodobností 0,01. Pravděpodobnost výskytu vady je 0,005. Přístroj ukazuje vadu. S jakou pravděpodobností je testovaný materiál skutečně vadný?

[0,323]

13. Víme-li, že pravděpodobnost odhalení AIDS při testu je 0,999, že pravděpodobnost správného otestování zdravého jedince je 0,99, a že AIDS se vyskytuje u 6 lidí z 10 000, jaká je pravděpodobnost, že člověk, u kterého byl test pozitivní, AIDS skutečně má?

[0,3762]

14. Manžel nepřišel včas ze zaměstnání. Manželka ze zkušenosti ví, že s pravděpodobností 0,3 (resp. 0,6, 0,1) pracuje přesčas (resp. odpočívá v hospodě, zdržel se z jiné příčiny). Pravděpodobnosti, že manžel bude ve 20 hodin doma, jsou podle toho, kde se zdržel, 0,9, 0,2 a 0,9. Manžel nakonec ve 20 hodin doma byl. Jaká je pravděpodobnost, že pracoval přesčas (resp. byl v hospodě, byl jinde)?

[0,5625; 0,25; 0,1875]

15. Je vyslána zpráva složená z nul a jedniček. Vlivem rušení může dojít k chybě. Pravděpodobnost přijetí 0 (resp. 1), byla-li skutečně vyslána, je 0,97 (resp. 0,8). Ve vyslané zprávě je 45 % nul. Jaká je pravděpodobnost, že přijatá 1 byla skutečně vyslána? Jaká je pravděpodobnost špatně přijaté hodnoty?

[0,97; 0,1235]

16. Nevytáhne-li se letadlu podvozek, kontrolka se rozbliká s pravděpodobností 0,999; s pravděpodobností 0,005 však signalizuje závadu, i když vše proběhlo v pořádku. K selhání podvozku dochází s pravděpodobností 0,003. Jaká je pravděpodobnost, že blikající kontrolka představuje planý poplach?

[0,6245]

17. V osudí je devět červených a sedm bílých koulí. Postupně vytáhneme tři koule. Jaká je pravděpodobnost, že první dvě budou červené a třetí bude bílá?

[0,15]

18. Máme čtyři krabice. V první jsou tři bílé a dvě černé koule, ve druhé jsou dvě bílé a dvě černé koule, ve třetí je jedna bílá a čtyři černé koule, ve čtvrté pět bílých a jedna černá koule. Náhodně vybereme jednu krabici a vytáhneme jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že kulička je bílá?

[0,53]

19. Hardware může být od tří výrobců s pravděpodobnostmi $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}5$ a $p_3 = 0{,}2$. Pravděpodobnost toho, že nevydrží bez poruchy normou předepsaný počet hodin, je u hardware jednotlivých výrobců postupně rovna 0,2; 0,4 a 0,3. Určete pravděpodobnost, že hardware nevydrží normou předepsaný počet hodin.

[0,32]

20. Ve společnosti je 45 % mužů a 55 % žen. Vysokých nad 190 cm je 5 % mužů a 1 % žen. Náhodně vybraná osoba je vyšší než 190 cm. Jaká je pravděpodobnost, že je to žena?

[0,196]

21. V první přepravce je 20 a v druhé 25 lahví bílého vína. Na lahvích nejsou etikety. V každé z přepravek je 12 lahví tramínu. Nejdříve náhodně vybereme jednu z přepravek a z ní pak vybereme jednu láhev. Určete pravděpodobnost, že ve vybrané láhvi bude tramín.

[0,54]

22. Je známo, že 90 % výrobků odpovídá standardu. Byla vypracována zjednodušená kontrolní zkouška, která u standardního výrobku dá kladný výsledek s pravděpodobností 0,95, zatímco u výrobku nestandardního s pravděpodobností 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, u něhož zkouška dopadla kladně, je standardní?

[0,98]

23. Potřebu smrkových sazenic kryje lesní podnik produkcí dvou školek. První školka kryje 75 % výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25 %, přičemž na 100 sazenic připadá 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná sazenice první jakosti je z produkce první školky?

[0,80]

4 Geometrická pravděpodobnost

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, je taková množina, že její (Lebesqueovu) míru $\mu(\Omega)$ umíme určit, tj. v $\mathbb{R}^1$ délku, v $\mathbb{R}^2$ obsah, v $\mathbb{R}^3$ objem. Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin množiny Ω se stejnou vlastností. Je-li $0 < \mu(\Omega) < \infty$, ***geometrickou pravděpodobnost*** (funkci P na $\mathcal{A}$) definujeme jako

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{\mu(\mathsf{A})}{\mu(\Omega)}, \qquad \mathsf{A} \in \mathcal{A}.$$

Řešené příklady

Příklad 1. Tyč délky deset metrů je náhodně rozlomena na dvě části. Jaká je pravděpodobnost, že kratší část bude delší než čtyři metry?

Řešení. Náhodné rozdělení tyče na dvě části je dáno zlomem ve vzdálenosti x (v metrech) od počátku. Všechny možné výsledky rozlomení tyče tvoří body intervalu $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 10\}$. Délka první ulomené části je x, druhá část je délky $10 - x$. Kratší část má délku více než čtyři metry, jestliže platí $\min\{x, 10 - x\} > 4$. Označíme-li symbolem A náhodný jev, že kratší část tyče je delší než čtyři metry, potom výsledky příznivé jevu A tvoří interval $\mathsf{A} = \{x \in \Omega : 4 < x < 6\}$. Míra množin Ω a A odpovídá délce příslušných intervalů. Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{\mu(\mathsf{A})}{\mu(\Omega)} = \frac{2}{10} = 0{,}2.$$

○

Příklad 2. Každý ze dvou parníků může doplout do přístaviště vždy jednou za den, a to se stejnou šancí v kterýkoliv okamžik a nezávisle na druhém parníku. První parník se v přístavišti zdrží jednu hodinu, druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden parník bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?

Řešení. Oba parníky mohou přijet do přístaviště kdykoliv v době 0:00 až 24:00 hodin. Jednotlivé parníky si označme symboly P_1 a P_2. Označme x, resp. y, časový okamžik (v hodinách) příjezdu parníku P_1, resp. P_2, do přístaviště. Všechny možné výsledky příjezdu obou parníků tvoří body čtverce

$$\Omega = \{(x,y)' \in \mathbb{R}^2 :\, 0 \leq x \leq 24,\, 0 \leq y \leq 24\}.$$

Parník P_1 se v přístavišti zdrží jednu hodinu, parník P_2 dvě hodiny. Příznivé situace pro to, aby jedna z lodí čekala na přistání (jev A) jsou následující: jestliže první do přístavu přijede parník P_1, tj. $x < y$, parník P_2 musí čekat, jestliže přijede v čase $y - x \leq 1$. Přijede-li do přístavu nejprve parník P_2, tj. $y < x$, čeká parník P_1 v situaci, kdy $x - y \leq 2$. Výsledky příznivé jevu A tedy tvoří množinu

$$\mathsf{A} = \{(x,y)' \in \Omega :\, x - 2 \leq y \leq x + 1\}.$$

Míra množin Ω a A odpovídá plošnému obsahu příslušných množin. Hledaná pravděpodobnost je proto rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{\mu(\mathsf{A})}{\mu(\Omega)} = \frac{24^2 - \frac{23^2}{2} - \frac{22^2}{2}}{24^2} \doteq 0{,}1207.$$

○

ПШП

1. Pacient se léčí doma a od 7 do 20 hodin je možné jej kontrolovat. Vycházky má od 13 do 15 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 7 a 20 hodinou bude doma k zastižení?

   [0,8462]

2. Natahovací hodiny, které nebyly ve stanovenou dobu nataženy, se po určitém čase zastaví. Jaká je pravděpodobnost, že se velká ručička zastaví

   a) mezi 6. a 9. hodinou?

   b) mezi 35. a 45. minutou?

   [a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{6}$]

3. Na zastávku místní dopravy přijíždí každých 7 minut nějaký autobus a zdrží se půl minuty. Jaká je pravděpodobnost, že přijdeme a zastihneme autobus na zastávce?

   [0,0714]

4. Autobus přijíždí na zastávku každé čtyři minuty, tramvaj každých šest minut. Cestující přichází na zastávku zcela náhodně. Určete pravděpodobnost, že se cestující dočká:

   a) autobusu před tramvají,

   b) autobusu nebo tramvaje v průběhu dvou minut.

   [a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$]

5. Dva lidé si dali schůzku mezi 17. a 18. hodinou. Jaká je pravděpodobnost jejich setkání, přicházejí-li nezávisle a náhodně během domluvené doby a čekají-li na druhého 15 minut?

   [0,4375]

6. Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden díl bude nejvýše 20 cm dlouhý.

   [0,51]

7. Nechť je zcela náhodně rozlomena tyč na tři části. Stanovte pravděpodobnost, že délka druhé (prostřední) části bude větší než dvě třetiny délky tyče před jejím rozlomením.

   [$\frac{1}{9}$]

5 Nezávislé náhodné jevy

Mějme dán **pravděpodobnostní prostor** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Nezávislost náhodných jevů: Náhodné jevy $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n \in \mathcal{A}$ jsou **nezávislé**, jestliže platí

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j) &= \mathsf{P}(\mathsf{A}_i) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_j) \;\; \forall i < j, \\
\mathsf{P}(\mathsf{A}_i \cap \mathsf{A}_j \cap \mathsf{A}_k) &= \mathsf{P}(\mathsf{A}_i) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_j) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_k) \;\; \forall i < j < k, \\
&\vdots \\
\mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \ldots \cap \mathsf{A}_n) &= \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2) \cdots \mathsf{P}(\mathsf{A}_n).
\end{aligned}
$$

Jevy $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \ldots$ jsou nezávislé, jestliže jsou pro $\forall n \in \mathbb{N}$ nezávislé náhodné jevy $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$.

Za předpokladu nezávislosti jevů $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ platí:

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathsf{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - \mathsf{P}(\mathsf{A}_i)\big).$$

Opakované nezávislé jevy (Bernoulliho schéma): Mějme n nezávislých náhodných pokusů, kde v každém pokusu může nastat jev A („úspěch“) se stejnou pravděpodobností $p \in (0,1)$. Potom pravděpodobnost jevu B_k, že jev A nastane právě k-krát z n pokusů, je rovna

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Řešené příklady

Příklad 1. Dvakrát hodíme mincí. Označme jevy A_1, že v 1. hodu padne líc, A_2, že ve 2. hodu padne líc a A_3, že v obou hodech padne totéž. Jsou jevy

A_1, A_2 a A_3 nezávislé? Jsou tyto jevy nezávislé po dvou?

Řešení. Pravděpodobnost padnutí líce na minci při jednom hodu je 0,5, proto $\mathsf{P}(\mathsf{A}_1) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_2) = 0{,}5$. Při dvou hodech mincí máme celkem 4 možné výsledky, co na minci padne. Z nich dva výsledky jsou příznivé A_3, že na obou mincích padne totéž (padne dvakrát líc nebo dvakrát rub), tj. $\mathsf{P}(\mathsf{A}_3) = \frac{2}{4} = 0{,}5$. Jevy $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2$, $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_3$ i $\mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3$ značí, že v obou hodech padl líc, tj.

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3) = \frac{1}{4}.$$

Jelikož platí

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2), \quad \mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3),$$
$$\mathsf{P}(\mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_2) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3),$$

jsou jevy A_1, A_2 a A_3 po dvou nezávislé. Jev $\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3$ znamená, že v obou hodech padl líc. Jevy A_1, A_2 a A_3 nejsou nezávislé (skupinově), protože platí

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3) = \frac{1}{4} \neq \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

○

Příklad 2. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu při prvním, druhém a třetím výstřelu jsou postupně 0,4; 0,5 a 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že střelec zasáhne cíl

a) právě jedenkrát,

b) alespoň jedenkrát.

Řešení. Označme symbolem A_i jev, že střelec při i-tém výstřelu zasáhne terč, $i = 1, 2, 3$. Pravděpodobnosti zásahu terče v jednotlivých výstřelech jsou $\mathsf{P}(\mathsf{A}_1) = 0{,}4$; $\mathsf{P}(\mathsf{A}_2) = 0{,}5$ a $\mathsf{P}(\mathsf{A}_3) = 0{,}7$. Tyto jevy jsou nezávislé.

a) Symbolem A označme jev, že při třech výstřelech střelec zasáhne terč právě jedenkrát. To znamená, že střelec terč zasáhne buď pouze při prvním výstřelu, nebo pouze při druhém výstřelu, nebo jen při třetím výstřelu. Hledanou pravděpodobnost proto spočteme následovně

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\mathsf{A}) &= \mathsf{P}(\mathsf{A}_1 \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c) + \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2 \cap \mathsf{A}_3^c) + \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3) \\ &= \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3^c) + \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3^c) \\ &+ \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3) \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36. \end{aligned}$$

b) Symbolem B označme jev, že střelec při třech výstřelech trefí terč alespoň jedenkrát. Jev B^c značí, že střelec při třech výstřelech terč netrefil ani jednou. Odtud

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\mathsf{B}) &= 1 - \mathsf{P}(\mathsf{B}^c) = 1 - \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c) \\ &= 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}91. \end{aligned}$$

○

Příklad 3. Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodu padnou tři líce?

Řešení. Jedná se o opakované nezávislé pokusy (hod třemi mincemi). Úspěchem v jednom pokusu rozumíme, že při hodu třemi mincemi padnou na všech třech mincích líce. Pravděpodobnost padnutí líce na jedné minci je $\frac{1}{2}$, pravděpodobnost padnutí líce na třech mincích je $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Označme symbolem B náhodný jev, že při dvaceti nezávislých hodech třemi mincemi padnou alespoň jednou tři líce. Jev B^c potom znamená, že při dvaceti nezávislých hodech třemi mincemi nepadnou ani jednou tři líce. Odtud dostaneme

$$\mathsf{P}(\mathsf{B}) = 1 - \mathsf{P}(\mathsf{B}^c) = 1 - \big(1 - \mathsf{P}(\mathsf{A})\big)^{20} = 1 - \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{20} \doteq 0{,}931.$$

○

ΠШΠ

1. Uvažujme dva náhodné jevy A a B, pro které platí

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = 0{,}3; \quad \mathsf{P}(\mathsf{B}) = 0{,}5; \quad \mathsf{P}(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = 0{,}2.$$

Jsou jevy A a B nezávislé? Jsou jevy A a B neslučitelné?

[nejsou nezávislé; nejsou neslučitelné]

2. Nechť množina všech výsledků pokusu je $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$. Jsou jevy $\mathsf{A}_1 = \{4, 5, 6, 7, 8, 12\}$, $\mathsf{A}_2 = \{1, 5, 6, 9, 10, 11\}$ a $\mathsf{A}_3 = \{1, 2, 3, 5\}$ nezávislé? Jsou tyto jevy nezávislé po dvou?

[nejsou nezávislé; nejsou po dvou nezávislé]

3. Z balíčku 32 mariášových karet náhodně vytáhneme jednu kartu. Jev A spočívá ve vytažení žaludové karty, jev B ve vytažení esa. Určete pravděpodobnosti jevů A, B a rozhodněte, zda jsou jevy nezávislé.

[$\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \frac{1}{4}$; $\mathsf{P}(\mathsf{B}) = \frac{1}{8}$; jsou nezávislé]

4. V účtech je chyba. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z nezávislých kontrolorů nacházejících chybu s pravděpodobností 0,9 a 0,95 ji najde?

[0,995]

5. V rodině je 10 dětí. Za předpokladu, že chlapci a dívky se rodí s pravděpodobností 0,5 a pohlaví se formuje nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že v této rodině je

   a) právě 5 chlapců,
   b) nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců.

[a) 0,246; b) 0,93457]

6. Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

[pravděpodobnější je vyhrát 3 partie ze 4 (pravděpodobnost výhry 3 partií ze 4 je 0,25; pravděpodobnost výhry 5 partií z 8 je 0,219)]

7. Pětkrát nezávisle na sobě házíme třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že právě dvakrát padnou tři jedničky?

[0,0002]

8. Jev A nastoupí alespoň v jednom z pěti nezávislých pokusů s pravděpodobností 0,9. Jaká je pravděpodobnost nastoupení jevu A v jednom pokusu, je-li pro všechny pokusy stejná?

[0,369]

9. Jaká je pravděpodobnost, že rodina se čtyřmi dětmi má alespoň tři chlapce, je-li pravděpodobnost narození chlapce i dívky stejná?

[0,3125]

10. Test obsahuje deset otázek. Každá otázka má čtyři možné odpovědi, přičemž právě jedna odpověď je správná. Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví správně alespoň na pět otázek, jestliže odpovědi volí zcela náhodně?

[0,0781]

11. U nemocného člověka odhalí test onemocnění s pravděpodobností 0,99. Podrobí-li se testu 30 nemocných, jaká je pravděpodobnost, že nám žádné onemocnění neunikne?

[0,740]

12. Firma dodává výrobky v sadách po deseti kusech. Je-li v sadě více než jeden vadný výrobek, sada se neúčtuje. Jestliže asi 2 % výrobků jsou vadná, kolik asi procent sad nebude moci firma účtovat?

[1,618 %]

13. Pravděpodobnost zásahu terče při jednom výstřelu je 0,3. Kolikrát je třeba střelbu opakovat, aby pravděpodobnost alespoň jednoho zásahu byla alespoň 0,9?

[7 výstřelů]

14. Fotbalista promění penaltu s pravděpodobností 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že z pěti penalt promění aspoň čtyři?

[0,9185]

15. Dvanácti pacientům je podáván lék, který úspěšně léčí jejich onemocnění v 95 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň deset z nich bude vyléčeno?

[0,9804]

6 Náhodná veličina

Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Potom zobrazení $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá ***náhodná veličina*** (vzhledem k jevovému poli $\mathcal{A}$), jestliže platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Označme $\mathcal{B}$ **borelovskou σ-algebru,** tedy nejmenší σ-algebru nad systémem podmnožin $\mathbb{R}$ obsahujícím všechny intervaly typu $(a, b\rangle$, $-\infty < a \leq b < \infty$. V praxi pak $\mathcal{B}$ obsahuje všechny „rozumné“ podmnožiny $\mathbb{R}$, označované jako tzv. **borelovské množiny**. Z definice náhodné veličiny vyplývá, že je možné určit následující pravděpodobnosti:

- pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje na libovolné borelovské množině z borelovské σ-algebry

$$\forall \mathsf{B} \in \mathcal{B} \quad \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathsf{B}\}) = \mathsf{P}(X \in \mathsf{B}),$$

- speciálně pak pravděpodobnost, že se náhodná veličina X realizuje hodnotami z intervalu $(-\infty, x\rangle$, neboli hodnotu tzv. *distribuční funkce* v bodě x

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \mathsf{P}(X \leq x).$$

Množinová funkce P_X, která borelovské množině $\mathsf{B} \in \mathcal{B}$ přiřazuje pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \in \mathsf{B})$, se nazývá ***rozdělení pravděpodobností*** náhodné veličiny X.

Funkce $F_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované jako $F_X(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, se nazývá ***distribuční funkce*** náhodné veličiny X.

Aby byla nějaká reálná funkce reálného argumentu F distribuční funkcí, musí platit, že

- funkce F je neklesající,
- funkce F je zprava spojitá,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Pro ***diskrétní náhodnou veličinu***, mající konečně či spočetně mnoho realizací, lze distribuční funkci vyjádřit jako

$$F_X(x) = \sum_{n:x_n\le x} \mathsf{P}(X = x_n) = \sum_{n:x_n\le x} p_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkce $p(x_n) = p_n$ se nazývá ***pravděpodobnostní funkce***.

Posloupnosti $\{x_n\}, \{p_n\}$ určují rozdělení pravděpodobností této veličiny.

Pro ***spojitou náhodnou veličinu***, mající nespočetně mnoho realizací (typicky z nějakého intervalu), lze distribuční funkci vyjádřit jako

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nezáporná borelovsky měřitelná funkce f_X se nazývá ***hustota***.

V případě spojité náhodné veličiny lze taktéž hustotu využít k určení rozdělení pravděpodobností.

Pro diskrétní, resp. spojité, veličiny platí následující:

- $\sum_n p_n = 1$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$,
- hustota je derivací distribuční funkce.

Výpočet pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X \in \mathsf{B})$, je-li $\mathsf{B} = (a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$ (v případě spojité veličiny X s libovolnými mezemi intervalu) lze provést pomocí

- distribuční funkce: $\mathsf{P}(X \in \mathsf{B}) = F_X(b) - F_X(a)$,

- pravděpodobnostní funkce: $\mathsf{P}(X \in \mathsf{B}) = \sum_{n: x_n \in \mathsf{B}} p_n$,
- hustoty: $\mathsf{P}(X \in \mathsf{B}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

V případě diskrétní náhodné veličiny, kdy $\mathsf{B} = (a, b)$, postupujeme při výpočtu pravděpodobnosti pomocí distribuční funkce následovně

$$\mathsf{P}(X \in \mathsf{B}) = \lim_{x \to b^-} F_X(b) - F_X(a).$$

Řešené příklady

Příklad 1. Může být funkce

$$p(x) = \begin{cases} c(1-\vartheta)^x & \text{pro } x = 0{,}1, 2, \dots \text{ a } \vartheta \in (0, 1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

při vhodné konstantě c pravděpodobnostní funkcí?

Řešení. Aby funkce $p(x)$ byla pravděpodobnostní funkcí nějaké diskrétní náhodné veličiny, musí být součet všech hodnot pravděpodobnostní funkce roven jedné, proto

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} c(1-\vartheta)^x = 1.$$

Uvedený součet představuje součet geometrické řady, jejíž první člen je roven $a_1 = c(1-\vartheta)^0 = c$ a kvocient $q = 1 - \vartheta$. Za předpokladu $\vartheta \in (0, 1)$ splňuje kvocient nerovnost $0 < q < 1$, a proto uvažovaná geometrická řada konverguje. Součet geometrické řady je dán vztahem

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{c}{1-(1-\vartheta)} = \frac{c}{\vartheta}.$$

Jelikož tento součet musí být roven jedné, konstantu c získáme řešením rovnice $\frac{c}{\vartheta} = 1$, neboli $c = \vartheta$.

○

Příklad 2. Střelec střílí do terče až do prvního zásahu. Má v zásobě čtyři náboje. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu 0,6. Náhodná veličina X udává počet nespotřebovaných nábojů. Stanovte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X, její distribuční funkci a určete pravděpodobnost, že střelci zbudou alespoň dva náboje.

Řešení. Pravděpodobnost zásahu terče je při každém výstřelu rovna 0,6. Označíme-li symboly A_i jevy, že při i-tém výstřelu střelec zasáhl terč, potom $\mathsf{P}(\mathsf{A}_i) = 0{,}6$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Střelec přestane střílet ve chvíli, kdy trefí terč nebo po čtvrtém výstřelu nezávisle na tom, zda terč trefil nebo netrefil. Náhodná veličina X, udávající počet nespotřebovaných nábojů, tak nabývá hodnot $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Nejprve určíme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X. Trefí-li střelec terč hned při prvním výstřelu, zbudou mu tři náboje. Proto

$$p(3) = \mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1) = 0{,}6.$$

Trefí-li střelec terč až při druhém výstřelu, zbudou mu dva náboje. Odtud

$$p(2) = \mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24.$$

Trefí-li střelec terč až při třetím výstřelu, zbude mu pouze jeden náboj. Pravděpodobnost tohoto výsledku je

$$\begin{aligned} p(1) &= \mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_2^c) \cdot \mathsf{P}(\mathsf{A}_3) \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096. \end{aligned}$$

Jestliže se střelec při třetím pokuse netrefil, nezbude mu žádný náboj. Tento výsledek nezávisí na tom, zda ve čtvrtém pokuse terč zasáhne nebo ne. Proto

$$p(0) = \mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064.$$

Stejný výsledek samozřejmě dostaneme i v případě, že budeme uvažovat výsledek střelby ve čtvrtém pokuse (střelec terč buď trefil nebo netrefil). V tomto případě můžeme psát

$$\begin{aligned} p(0) &= \mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c \cap \mathsf{A}_4) + \mathsf{P}(\mathsf{A}_1^c \cap \mathsf{A}_2^c \cap \mathsf{A}_3^c \cap \mathsf{A}_4^c) \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064. \end{aligned}$$

Pro libovolné $x \notin \{0,1, 2, 3\}$ je $p(x) = \mathsf{P}(X = x) = 0$.

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny X je zprava spojitá, po částech konstantní funkce se skoky o velikosti $p(x)$ v bodech $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. Hodnoty distribuční funkce získáme ze vztahu

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \sum_{n: x_n \leq x} \mathsf{P}(X = x_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Například, hodnota distribuční funkce v bodě $x = 0$ je rovna

$$F(0) = \mathsf{P}(X \leq 0) = \mathsf{P}(X = 0) = 0{,}064.$$

Hodnota distribuční funkce v bodě $x = 1$ je

$$F(1) = \mathsf{P}(X \leq 1) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) = 0{,}064 + 0{,}096 = 0{,}16.$$

Je-li $x \in \langle 0, 1)$, potom

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \mathsf{P}(X = 0) = 0{,}064.$$

Podobně postupujeme dále a získáme předpis distribuční funkce ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 0{,}064 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}16 & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}40 & \text{pro } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pro } x \geq 3. \end{cases}$$

Na závěr spočteme pravděpodobnost, že střelci zbudou alespoň dva náboje. Mají-li střelci zbýt alespoň dva náboje, znamená to, že mu zbudou buď právě dva nebo právě tři náboje. Pravděpodobnost tohoto jevu je proto rovna

$$\mathsf{P}(X \geq 2) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = 0{,}24 + 0{,}6 = 0{,}84.$$

Tuto pravděpodobnost lze spočítat i pomocí distribuční funkce následovně

$$\mathsf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathsf{P}(X < 2) = 1 - \lim_{x \to 2^-} F(x) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84.$$

○

Příklad 3. Najděte konstantu c tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(1 - x) & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

byla hustotou pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny X. Najděte její distribuční funkci a vypočtěte pravděpodobnost, že se veličina X bude realizovat v intervalu $\langle 0{,}2; 0{,}8)$.

Řešení. K určení konstanty v hustotě užijeme tvrzení, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. V našem případě je hustota nenulová pouze na intervalu $\langle 0, 1)$, proto

$$\int_0^1 cx^2(1-x)\,\mathrm{d}x = c\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{c}{12}.$$

Konstantu c získáme z podmínky, že tento integrál má být roven jedné, tj.

$$\frac{c}{12} = 1 \;\Rightarrow\; c = 12.$$

Při hledání distribuční funkce využijeme definici, která udává vztah mezi distribuční funkcí a hustotou ve tvaru

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x < 0$ je $f(x) = 0$, a proto i $F(x) = 0$. Pro $x \in \langle 0, 1)$ dostaneme

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 12t^2(1-t)\,\mathrm{d}t = 12\int_0^x \left(t^2 - t^3\right)\mathrm{d}t \\ &= 12\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^x = 12\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = x^3(4-3x). \end{aligned}$$

Pro $x \geq 1$ je hustota $f(x)$ nulová, proto stačí spočítat hodnotu distribuční funkce v bodě $x = 1$, tj.

$$F(1) = 1^3 \cdot (4 - 3\cdot 1) = 1.$$

Dohromady jsme získali distribuční funkci ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x^3(4-3x) & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že se veličina X bude realizovat v intervalu $\langle 0{,}2; 0{,}8)$ můžeme spočítat pomocí distribuční funkce nebo hustoty. Pomocí distribuční funkce je výpočet následující

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(0{,}2 \leq X < 0{,}8) &= F(0{,}8) - F(0{,}2) \\ &= 0{,}8^3 \cdot (4 - 3\cdot 0{,}8) - 0{,}2^3 \cdot (4 - 3\cdot 0{,}2) = 0{,}792. \end{aligned}$$

Výpočet pomocí hustoty provedeme takto

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(0{,}2 \leq X < 0{,}8) &= \int_{0{,}2}^{0{,}8} 12x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = 12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0{,}2}^{0{,}8} \\
&= \left[4x^3 - 3x^4\right]_{0{,}2}^{0{,}8} = 4\cdot 0{,}8^3 - 3\cdot 0{,}8^4 - \left(4\cdot 0{,}2^3 - 3\cdot 0{,}2^4\right) \\
&= 0{,}792.
\end{aligned}
$$

○

ΠШΠ

1. Nechť

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ a + b\sin(x) & \text{pro } 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \text{pro } x \geq \pi/2. \end{cases}
$$

Určete konstanty a, b tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí spojité náhodné veličiny X. Nakreslete graf distribuční funkce $F(x)$.

[$a = 0$, $b = 1$]

2. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -a \\ k_1 + k_2 \arcsin(x/a) & \text{pro } -a \leq x < a \\ 1 & \text{pro } x \geq a. \end{cases}
$$

Určete konstanty k_1 a k_2, hustotu $f(x)$ a její graf.

[$k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{\pi}$, $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ pro $-a \leq x \leq a$, $f(x) = 0$ jinak]

3. Auto musí projet čtyři křižovatky řízené nezávislými semafory. Na každém ze semaforů svítí zelená nebo červená s touž pravděpodobností 0,5 (oranžovou neuvažujeme). Náhodná veličina X udává počet projetých křižovatek do první křižovatky, kdy auto musí zastavit. Stanovte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

[$p(0) = 0{,}5$, $p(1) = 0{,}25$, $p(2) = 0{,}125$, $p(3) = 0{,}0625$, $p(4) = 0{,}0625$, $p(x) = 0$ jinak]

4. Pětkrát hodíme mincí. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že alespoň dvakrát padl líc.

[$X \sim \mathrm{Bi}(5; 0{,}5)$; $\mathsf{P}(X \geq 2) = 13/16$]

5. V klobouku jsou tři černé a čtyři bílé koule. Pomocí distribuční funkce některého rozdělení vyjádřete pravděpodobnost, že při vytažení tří koulí budou alespoň dvě černé.

[$X \sim \mathrm{Hg}(7; 3; 3)$; $\mathsf{P}(X \geq 2) = 13/35$]

6. Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X, která má hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

[$F(x) = 0$ pro $x < 0$; $F(x) = \frac{x^2}{4}$ pro $0 \leq x < 1$; $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-1)$ pro $1 \leq x < 2$; $F(x) = 1 - \frac{(3-x)^2}{4}$ pro $2 \leq x < 3$; $F(x) = 1$ pro $x \geq 3$]

7. Náhodná veličina X má spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobností na intervalu $(0, 2)$. Určete její hustotu a distribuční funkci a vypočítejte $\mathsf{P}(0 < X \leq 0{,}5)$.

[$f(x) = 0{,}5$ pro $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ jinak; $F(x) = 0$ pro $x \leq 0$, $F(x) = \frac{1}{2}x$ pro $0 < x < 2$, $F(x) = 1$ pro $x \geq 2$; $\mathsf{P}(0 < X \leq 0{,}5) = 0{,}25$]

8. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0; \\ cx(1-x), & \text{pro } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Určete koeficient c, distribuční funkci $F(x)$ a $\mathsf{P}(X > 0{,}2)$.

[$c = 6$; $F(x) = 0$ pro $x < 0$, $F(x) = 3x^2 - 2x^3$ pro $0 \leq x < 1$, $F(x) = 1$ pro $x \geq 1$; $\mathsf{P}(X > 0{,}2) = 0{,}896$]

9. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} a\sin(x) & \text{pro } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte konstantu a, distribuční funkci a určete $\mathsf{P}(0 < X < \frac{\pi}{4})$.

[$a = 0{,}5$; $F(x) = 0$ pro $x < 0$, $F(x) = [1 - \cos(x)]/2$ pro $0 \leq x \leq \pi$, $F(x) = 1$ pro $x > \pi$; $\mathsf{P}(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$]

7 Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Má-li náhodná veličina X diskrétní rozdělení, které je určeno posloupnostmi $\{x_n\}$, $\{p_n\}$, pak

- ***střední hodnota*** *veličiny* X*:*

$$\mathsf{E}(X) = \sum_n x_n p_n = \sum_n x_n \mathsf{P}(X = x_n);$$

- ***střední hodnota*** *borelovsky měřitelné* ***funkce*** $\varphi(X)$ *veličiny* X*:*

$$\mathsf{E}\left[\varphi(X)\right] = \sum_n \varphi(x_n) p_n = \sum_n \varphi(x_n) \mathsf{P}(X = x_n);$$

- speciálně pro $\varphi(X) = [X - \mathsf{E}(X)]^2$ obdržíme ***rozptyl*** *veličiny* X*:*

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}[X - \mathsf{E}(X)]^2 = \sum_n (x_n - \mathsf{E}(X))^2 p_n.$$

Má-li náhodná veličina X spojité rozdělení s hustotou $f_X(x)$, pak

- ***střední hodnota*** *veličiny* X*:*

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x;$$

- ***střední hodnota*** *borelovsky měřitelné* ***funkce*** $\varphi(X)$ *veličiny* X*:*

$$\mathsf{E}\left[\varphi(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x) \mathrm{d}x;$$

- speciálně pro $\varphi(X) = [X - \mathsf{E}(X)]^2$ obdržíme ***rozptyl*** *veličiny* X*:*

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}[X - \mathsf{E}(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}(X))^2 f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Předpokladem pro existenci střední hodnoty a rozptylu je vždy absolutní konvergence příslušné nekonečné řady, resp. integrálu. Obecně pro střední hodnotu platí $\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$; pro rozptyl pak platí následující vztah: $\mathsf{E}[X - \mathsf{E}(X)]^2 = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2$, který je užitečný při výpočtech. Poznamenejme, že rozptyl je z definice *nezáporné* číslo.

Číselné charakteristiky shrnují podstatnou informaci o rozdělení náhodné veličiny. Kromě těch výše uvedených se v praxi setkáváme též s následujícími:

- ***kvantil:*** $x_\alpha \in \mathbb{R}$, pro které platí

  $$\mathsf{P}(X \leq x_\alpha) \geq \alpha \text{ a současně } \mathsf{P}(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

  Pro spojité veličiny přejdou nerovnosti za pravděpodobnostmi v rovnosti. Kvantil $x_{0,5}$ se nazývá medián, $x_{0,25}$ dolní kvartil, $x_{0,75}$ horní kvartil a $x_{0,k}$, kde $k = 1, \ldots, 9$ pak k-tý decil.

- ***modus:*** $\hat{x} \in \mathbb{R}$, pro diskrétní náhodnou veličinu X se jedná o nejpravděpodobnější hodnotu, pro spojitou náhodnou veličinu X o lokální maximum její hustoty f_X;

- ***šikmost:*** $\alpha_3(X) = \frac{\mathsf{E}[X - \mathsf{E}(X)]^3}{(\sqrt{\mathrm{var}(X)})^3}$, $\alpha_3(X) \in \mathbb{R}$;

- ***špičatost:*** $\alpha_4(X) = \frac{\mathsf{E}[X - \mathsf{E}(X)]^4}{(\sqrt{\mathrm{var}(X)})^4} - 3$, $\alpha_4(X) \in \langle [\alpha_3(X)]^2 - 2, \infty)$.

Střední hodnota, rozptyl, šikmost a špičatost se používají jen u veličin, které jsou intervalového či poměrového typu.

Řešené příklady

Příklad 1. Pro náhodnou veličinu X s pravděpodobnostní funkcí $p(1) = 1/3$, $p(2) = 1/4$, $p(4) = 1/6$ a $p(5) = 1/4$ spočtěte její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl. Dále určete modus, medián a horní kvartil.

Řešení. Náhodná veličina X nabývá hodnot $x \in \{1, 2, 4, 5\}$ s pravděpodobnostmi $p(1) = 1/3$, $p(2) = 1/4$, $p(4) = 1/6$ a $p(5) = 1/4$. Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny X je zprava spojitá, po částech konstantní funkce se skoky o velikosti $p(x)$ v bodech $x \in \{1, 2, 4, 5\}$. Předpis distribuční funkce je ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ \frac{1}{3} \doteq 0{,}33 & \text{pro } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{12} \doteq 0{,}58 & \text{pro } 2 \leq x < 4 \\ \frac{3}{4} = 0{,}75 & \text{pro } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{pro } x \geq 5. \end{cases}$$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X je rovna

$$\mathsf{E}(X) = \sum_n x_n p(x_n) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2,75.$$

Pro výpočet rozptylu potřebujeme nejprve spočítat $\mathsf{E}(X^2)$

$$\mathsf{E}(X^2) = \sum_n x_n^2 p(x_n) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25.$$

Nyní můžeme vypočítat rozptyl náhodné veličiny X

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2 = \frac{41}{4} - \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{43}{16} = 2{,}6875.$$

Modus diskrétní náhodné veličiny je její nejpravděpodobnější hodnota. V našem případě je proto modus $\hat{x} = 1$.

Medián $x_{0,5}$ je 0,5 kvantil a určíme ho řešením soustavy nerovnic

$$\mathsf{P}(X \leq x_{0,5}) \geq 0{,}5 \ \text{ a současně } \ \mathsf{P}(X \geq x_{0,5}) \geq 0{,}5.$$

Z první nerovnice dostaneme $x_{0,5} \in \langle 2, \infty)$, protože

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X < 2) &= \lim_{x \to 2^-} F(x) = \frac{1}{3} < 0{,}5, \\ \mathsf{P}(X \leq 2) &= F(2) = \frac{7}{12} \geq 0{,}5. \end{aligned}$$

Druhou nerovnici upravíme využitím pravděpodobnosti opačného jevu

$$1 - \mathsf{P}(X < x_{0,5}) \geq 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{P}(X < x_{0,5}) \leq 0{,}5.$$

Z předchozích úvah víme, že poslední nerovnost splňuje $x_{0,5} \in (-\infty, 2\rangle$. Dohromady jsme získali medián roven

$$x_{0,5} \in (-\infty, 2\rangle \cap \langle 2, \infty) \quad \Rightarrow \quad x_{0,5} = 2.$$

Horní kvartil je 0,75 kvantil. Výpočet provedeme analogicky jako v případě výpočtu mediánu řešením soustavy nerovnic

$$\mathsf{P}(X \leq x_{0{,}75}) \geq 0{,}75 \ \text{ a současně } \ \mathsf{P}(X \geq x_{0{,}75}) \geq 0{,}25,$$

nebo, ekvivalentně, po úpravě druhé nerovnice, řešením soustavy

$$\mathsf{P}(X \leq x_{0{,}75}) \geq 0{,}75 \ \text{ a současně } \ \mathsf{P}(X < x_{0{,}75}) \leq 0{,}75.$$

Z první nerovnice dostaneme $x_{0,75} \in \langle 4, \infty)$, z druhé $x_{0,75} \in (-\infty, 5\rangle$. Dohromady

$$x_{0,75} \in (-\infty, 5\rangle \cap \langle 4, \infty) = \langle 4, 5\rangle \,.$$

Vidíme, že horní kvartil, na rozdíl od mediánu, není určen jednoznačně. $\circ$

Příklad 2. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c a najděte distribuční funkci, modus, střední hodnotu, směrodatnou odchylku, medián a 0,7 kvantil náhodné veličiny X.

Řešení. Nejprve určíme konstantu c tak, aby platilo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. V našem případě

$$c\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Dle definice, distribuční funkce $F(x)$ je dána vztahem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $0 \leq x < 1$ dostaneme

$$F(x) = \int_0^x 3t^2\,\mathrm{d}t = \left[t^3\right]_0^x = x^3.$$

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ je proto distribuční funkce ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x^3 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Podle definice, střední hodnota spojité náhodné veličiny X je rovna

$$\mathsf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Pro výpočet směrodatné odchylky náhodné veličiny X musíme nejprve spočítat $\mathsf{E}(X^2)$

$$\mathsf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Odtud, rozptyl náhodné veličiny X je

$$\mathrm{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80},$$

a tedy směrodatná odchylka náhodné veličiny X je rovna

$$\sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{\frac{3}{80}} \doteq 0{,}19.$$

Modus určíme jako bod, ve kterém má hustota $f(x)$ lokální maximum. Funkce $f(x) = 3x^2$ je na intervalu $0 \leq x \leq 1$ rostoucí, a proto nabývá svého maxima v bodě $x = 1$. Modus náhodné veličiny X je tedy $\hat{x} = 1$.

Medián náhodné veličiny X je 0,5 kvantil. Protože náhodná veličina X je spojitá, získáme medián řešením rovnice $F(x_{0,5}) = 0{,}5$. Dosazením dostaneme $x_{0,5}^3 = 0{,}5$, a tedy $x_{0,5} = \sqrt[3]{0{,}5} \doteq 0{,}79$. Analogicky vypočítáme 0,7 kvantil jako řešení rovnice $x_{0,7}^3 = 0{,}7$. Odtud $x_{0,7} = \sqrt[3]{0{,}7} \doteq 0{,}89$. ○

Příklad 3. Délka výrobku (v mm) má normální rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou 68,2 mm a směrodatnou odchylkou 0,2 mm. Jaká je pravděpodobnost, že délka náhodně odebraného výrobku bude v rozmezí od 68 do 69 mm?

Řešení. Náhodná veličina X, označující délku výrobku, má normální rozdělení pravděpodobností $\mathrm{N}(68{,}2; 0{,}2^2)$. Normovaná náhodná veličina má rozdělení

$$U = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} = \frac{X - 68,2}{0{,}2} \sim \mathrm{N}(0{,}1).$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(68 \le X \le 69) &= \mathsf{P}\left(\frac{68 - 68{,}2}{0{,}2} \le X \le \frac{69 - 68{,}2}{0{,}2}\right) = \mathsf{P}(-1 \le U \le 4)\\ &= \Phi(4) - \Phi(-1) = \Phi(4) - [1 - \Phi(1)] \doteq 0{,}9999683 + 0{,}8413447 - 1\\ &= 0{,}8413131,\end{aligned}$$

kde jsme při výpočtu využili platnosti vztahu $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$, který platí pro distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. Tato úprava je nezbytná, hledáme-li hodnoty distribuční funkce v tabulkách ($\Phi(u)$ je tabelovaná pouze pro $u \ge 0$). ○

Příklad 4. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{pro } 2 \le x < 2{,}5 \\ 1 & \text{pro } x \ge 2{,}5. \end{cases}$$

Určete hustotu a první tři decily. Určete zároveň, o které známé rozdělení pravděpodobností se jedná.

Řešení. Hustotu $f(x)$ spojité náhodné veličiny vypočteme derivováním distribuční funkce. V bodech $x = 2$ a $x = 2{,}5$, kde $F'(x)$ neexistuje, definujeme $f(2) = f(2{,}5) = 0$. Pro $x \in (2; 2{,}5)$ je derivace $F(x)$ rovna $F'(x) = 2$. Proto

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro } x \in (2; 2{,}5) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Náhodná veličina X má tedy rovnoměrné rozdělení na intervalu $(2; 2{,}5)$, tj. $X \sim \mathrm{Ro}(2; 2{,}5)$.

Decily vypočteme řešením rovnice $F(x_\alpha) = \alpha$. Odtud dostaneme následující výsledky:

$$\begin{aligned}
2x_{0,1} - 4 = 0{,}1 \quad &\Rightarrow \quad x_{0,1} = \frac{4{,}1}{2} = 2{,}05,\\
2x_{0,2} - 4 = 0{,}2 \quad &\Rightarrow \quad x_{0,2} = \frac{4{,}2}{2} = 2{,}1,\\
2x_{0,3} - 4 = 0{,}3 \quad &\Rightarrow \quad x_{0,3} = \frac{4{,}3}{2} = 2{,}15.
\end{aligned}$$

○

ΠШΠ

1. Lovec má pět patron a pravděpodobnost zásahu (v každém pokusu) 0,4. Střílí, dokud netrefí (a dokud má čím). Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl počtu výstřelů.

   [$p(1) = 0{,}4$; $p(2) = 0{,}24$; $p(3) = 0{,}144$; $p(4) = 0{,}0864$; $p(5) = 0{,}1296$; $p(x) = 0$ jinak; $\mathsf{E}(X) = 2{,}3056$; $\operatorname{var}(X) = 1{,}9626$]

2. Z urny se třemi bílými a pěti černými koulemi jsou vytaženy tři koule. Najděte rozdělení a střední hodnotu počtu černých koulí mezi vytaženými koulemi.

   [$X \sim \mathrm{Hg}(8, 5, 3)$, $\mathsf{E}(X) = 1{,}875$]

3. Náhodná veličina X nabývá hodnot $-2, -1, 0, 1, 2$ s pravděpodobnostmi (po řadě) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$. Určete její střední hodnotu, rozptyl a šikmost.

   [$\mathsf{E}(X) = 0, \operatorname{var}(X) = \frac{7}{3}$, $\alpha_3(X) = 0$]

4. V zásilce 15 výrobků je 5 nekvalitních. Náhodná veličina X udává počet nekvalitních výrobků mezi čtyřmi náhodně vybranými výrobky. Vypočtěte její střední hodnotu a rozptyl, jestliže byl výběr proveden s vracením.

   [$X \sim \mathrm{Bi}(4, \frac{1}{3})$, $\mathsf{E}(X) = \frac{4}{3}$, $\operatorname{var}(X) = \frac{8}{9}$]

5. Házíme kostkou. X nechť označuje, kolik hodů předcházelo hození první šestky. Jaká je pravděpodobnost, že X bude nejvýše 3? Jaká bude střední hodnota a rozptyl této veličiny?

   [$X \sim \mathrm{Ge}(\frac{1}{6})$, $\mathsf{P}(X \leq 3) = 0{,}52$, $\mathsf{E}(X) = 5$, $\operatorname{var}(X) = 30$]

6. V partii je 100 součástek, mezi nimiž je 10 zmetků. Z celé partie se pro kontrolu jakosti náhodně vyberou dvě součástky. Určete střední hodnotu počtu zmetků obsažených ve výběru. (Návod: X má hypergeometrické rozdělení.)

[$X \sim \mathrm{Hg}(100{,}10{,}2)$; $\mathsf{E}(X) = 0{,}2$]

7. Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{pro } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte $\mathsf{P}(-2 \le X \le -0{,}5)$, $\mathsf{P}(-2 \le X \le -1)$ a $\mathsf{E}(X)$.

[$\mathsf{P}(-2 \le X \le -0{,}5) = 0{,}25$; $\mathsf{P}(-2 \le X \le -1) = 0$; $\mathsf{E}(X) = -\frac{1}{3}$]

8. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{pro } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \ge 2 \end{cases}$$

Najděte její hustotu, modus, medián, střední hodnotu a stanovte pravděpodobnost $\mathsf{P}(0{,}5 < X < 1{,}5)$.

[$f(x) = \frac{x}{2}$ pro $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ jinde; $\hat{x} = 2$; $x_{0,5} = \sqrt{2}$; $\mathsf{E}(X) = \frac{4}{3}$; $\mathsf{P}(0{,}5 < X < 1{,}5) = 0{,}5$]

9. Najděte medián, horní kvartil a 0,1-kvantil náhodné veličiny X určené hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{pro } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

[$x_{0,5} = 2 - \sqrt{2}$; $x_{0,75} = 1$; $x_{0,10} = 0{,}103$]

10. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{pro } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu a a pravděpodobnost, že X se od své střední hodnoty neliší o více než 0,5.

[$a = \frac{3}{8}$; $\frac{7}{8}$]

11. Náhodná veličina X má spojité rovnoměrné rozdělení. Jaká je její hustota, jestliže $\mathsf{E}(X) = 1$ a $\mathrm{var}(X) = 3$.

[$f(x) = \frac{1}{6}$ pro $-2 < x < 4$, $f(x) = 0$ jinak]

12. Životnost (v letech) jistého druhu výrobků se řídí exponenciálním rozdělením s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{5}) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Jakou záruční dobu stanoví výrobce, nemá-li počet reklamovaných výrobků překročit 10%?

[0,5268 roku]

13. Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \leq 1)$, $\mathsf{P}(X > 1)$ a $\mathsf{E}(X)$.

[$\mathsf{P}(X \leq 1) = 0{,}75$; $\mathsf{P}(X > 1) = 0{,}25$; $\mathsf{E}(X) = \frac{2}{3}$]

14. Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq 0{,}5 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a pravděpodobnost $\mathsf{P}(0{,}25 \leq X \leq 1{,}5)$.

[$\mathsf{E}(X) = \frac{7}{8}$; $\mathsf{P}(0{,}25 \leq X \leq 1{,}5) = 0{,}5$]

15. Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2 & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu a hodnotu distribuční funkce v bodě 0,5.

[$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{4}$; $F(0{,}5) = \frac{7}{8}$]

16. Spojitá náhodná veličina X je zadána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x^3 & \text{pro } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Určete její hustotu, střední hodnotu a pravděpodobnost $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$.

[$f(x) = 3x^2$ pro $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ jinak; $\mathsf{E}(X) = 0{,}75$; $\mathsf{P}(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}) = 0{,}406$]

17. Rozdělení pravděpodobností spojité náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{pro } x \geq 1 \\ 0 & \text{pro } x < 1. \end{cases}$$

Najděte distribuční funkci této náhodné veličiny a pomocí ní vypočítejte pravděpodobnost toho, že X nabude hodnoty z intervalu $\langle 1, 5 \rangle$. Nakonec určete medián tohoto rozdělení.

[$F(x) = 0$ pro $x < 1$, $F(x) = 1 - \frac{1}{x}$ pro $x \geq 1$; $\mathsf{P}(X \in \langle 1, 5 \rangle) = \frac{4}{5}$; $x_{0,5} = 2$]

18. Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\frac{x}{a}) & \text{pro } -a < x < a \\ 0 & \text{pro } x \leq -a. \end{cases}$$

Určete medián tohoto rozdělení.

[$x_{0,5} = 0$]

19. Doba bezporuchového chodu zařízení má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 700 hodin. Určete dobu, během níž nedojde s pravděpodobností 0,8 k poruše.

[156 hod]

20. Vypočtěte modus náhodné veličiny X s normálním rozdělením daným hustotou.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \ x \in \mathbb{R}.$$

(Návod: využijte znalostí z vyšetřování průběhu funkce.)

[$\hat{x} = \mu$]

21. Výsledky měření jsou zatíženy normálně rozdělenou náhodnou chybou s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou 3 mm. Jaká je pravděpodobnost, že při 3 měřeních bude alespoň jedna chyba v intervalu (0, 2,4) mm?

[0,63926]

22. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou λ, tj. $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$. Vypočtěte $\mathsf{P}(X > 3\lambda)$.

[0,04979]

8 Funkce náhodné veličiny

Náhodnou veličinu Y nazveme ***funkcí náhodné veličiny*** X, jestliže platí $Y = \varphi(X)$, kde φ je borelovsky měřitelná funkce, jejíž definiční obor obsahuje obor hodnot náhodné veličiny X.

Z toho také vyplývá, že oborem hodnot náhodné veličiny $Y = \varphi(X)$ je obor hodnot funkce φ.

Pravděpodobnostní funkce a hustota funkce náhodné veličiny $Y = \varphi(X)$:

Nechť φ je prostá funkce. Inverzní funkci k φ označme τ.

Je-li X **diskrétní** náhodná veličina, je také Y diskrétní náhodná veličina a pro její pravděpodobnostní funkci platí

$$p_Y(y) = \mathsf{P}(Y = y) = \mathsf{P}\left(\varphi(X) = y\right) = \mathsf{P}\left(X = \tau(y)\right) = p_X\left(\tau(y)\right).$$

Je-li X **spojitá** náhodná veličina a jestliže existuje derivace funkce τ, je také Y spojitá náhodná veličina a pro její hustotu platí

$$f_Y(y) = f_X\left(\tau(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}\right|.$$

(Nástin odvození. Pro φ rostoucí: $f_Y(y) = F_Y'(y) = [\mathsf{P}(Y \leq y)]' = [\mathsf{P}(\varphi(X) \leq y)]' = [\mathsf{P}(X \leq \tau(y))]' = F_X'(\tau(y)) = f_X(\tau(y))\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}$. Pro φ klesající: $f_Y(y) = F_Y'(y) = [\mathsf{P}(Y \leq y)]' = [\mathsf{P}(\varphi(X) \leq y)]' = [\mathsf{P}(X \geq \tau(y))]' = [1 - F_X(\tau(y))]' = -f_X(\tau(y))\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}$.)

V praxi se nejčastěji setkáváme s lineární funkcí (někdy hovoříme též o lineární transformaci).

Pravděpodobnostní funkce a hustota náhodné veličiny vzniklé lineární transformací:
Uvažujme takovou náhodnou veličinu $Y = a + bX$, kde $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Potom platí, že je-li X **diskrétní**, pak $p_Y = p_X(\frac{y-a}{b})$. Je-li X **spojitá**, pak $f_Y(y) = \left|\frac{1}{b}\right| f_Y(\frac{y-a}{b})$.

Poznámka. Pro $b = 0$ je náhodná veličina Y konstanta, tj.

$$p(a) = 1,\ p(y) = 0 \quad \text{pro } y \neq a.$$

Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny vzniklé lineární transformací:
Uvažujeme takovou náhodnou veličinu $Y = a + bX$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí, že $\mathsf{E}(Y) = a + b\,\mathsf{E}(X)$ a $\operatorname{var}(Y) = b^2 \operatorname{var}(X)$.

Řešené příklady

Příklad 1. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobností na intervalu $(0,a)$, to znamená, že její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pro } 0 < x < a \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

S použitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete

a) $\mathsf{E}(2X + 3)$,

b) $\mathsf{E}(3X^2 - 2X + 1)$,

c) $\operatorname{var}(2X + 3)$.

Řešení. Pro výpočet hledaných charakteristik si nejprve spočítáme $\mathsf{E}(X)$, $\mathsf{E}(X^2)$ a $\operatorname{var}(X)$

$$\mathsf{E}(X) = \int_0^a x \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2},$$

$$\mathsf{E}(X^2) = \int_0^a x^2 \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^2}{3},$$
$$\operatorname{var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - [\mathsf{E}(X)]^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Užitím vztahu pro střední hodnotu lineární transformace

$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}(X), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(2X + 3) = 2 \cdot \mathsf{E}(X) + 3 = 2 \cdot \frac{a}{2} + 3 = a + 3,\\
&\mathsf{E}(3X^2 - 2X + 1) = 3 \cdot \mathsf{E}(X^2) - 2 \cdot \mathsf{E}(X) + 1 = 3 \cdot \frac{a^2}{3} - 2 \cdot \frac{a}{2} + 1\\
&\quad = a^2 - a + 1.
\end{aligned}$$

Pro rozptyl lineární transformace platí vztah

$$\operatorname{var}(a + bX) = b^2 \operatorname{var}(X), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

a tedy

$$\operatorname{var}(2X + 3) = 4 \cdot \operatorname{var}(X) = 4 \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}.$$

○

Příklad 2. Sledovaná železniční trasa vykazuje velké nerovnosti, takže zatížení jednotlivé vozové nápravy náhodně kolísá, teoreticky spojitým způsobem. Prakticky jsou známy jen částečné informace, takže uvažujeme o diskrétní náhodné veličině X (náhodné zatížení v tunách), která nabývá hodnot 6, 30 a 70 s pravděpodobnostmi 0,15; 0,65 a 0,2. Při kalkulaci nákladů se ekonom zajímá o střední opotřebení náprav dané vzorcem $Y = 1,15X^2$. Vypočtěte střední hodnotu opotřebení.

Řešení. Střední hodnotu opotřebení vypočteme užitím vztahů pro výpočet střední hodnoty (funkce) diskrétní náhodné veličiny a lineární transformace

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(1,15X^2) &= 1,15 \cdot \mathsf{E}(X^2) = 1,15 \cdot \left(6^2 \cdot 0{,}15 + 30^2 \cdot 0{,}65 + 70^2 \cdot 0{,}2\right)\\
&= 1,15 \cdot 1570{,}4 = 1805,96.
\end{aligned}$$

○

Příklad 3. Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí

$$p_X(x) = \mathsf{P}(X = x) = \frac{1}{14}x^2, \quad x \in \{1, 2, 3\}.$$

Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = 2X - 3$.

Řešení. Nejprve určíme obor hodnot náhodné veličiny Y tak, že do transformace $y = 2x - 3$ dosadíme za x postupně všechny realizace náhodné veličiny X. Náhodná veličina Y tedy může nabývat hodnot $y \in \{-1, 1, 3\}$. Pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y získáme přímým výpočtem

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \mathsf{P}(Y = y) = \mathsf{P}(2X - 3 = y) = \mathsf{P}\left(X = \frac{y+3}{2}\right) \\ &= p_X\left(\frac{y+3}{2}\right) = \frac{1}{14}\frac{(y+3)^2}{4}, \quad y \in \{-1, 1, 3\}. \end{aligned}$$

○

Příklad 4. Náhodná veličina X má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $(1, 2)$. Najděte hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$.

Řešení. Nejprve určíme hustotu a distribuční funkci náhodné veličiny X. Hustota náhodné veličiny se spojitým rovnoměrným rozdělením na intervalu (a, b) je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

V našem případě je tedy hustota náhodné veličiny X dána předpisem

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočteme distribuční funkci náhodné veličiny X pro $x \in (1, 2)$

$$F_X(x) = \int_1^x 1 \, \mathrm{d}t = [t]_1^x = x - 1.$$

Odtud

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{pro } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

Nyní určíme nenulovou část hustoty náhodné veličiny $Y = \frac{1}{X}$. Funkce $1/x$ je na intervalu $(1, 2)$ spojitá a ryze klesající. Funkční hodnoty $1/x$ v krajních bodech intervalu $(1, 2)$ jsou 1 a $\frac{1}{2}$. Hustota náhodné veličiny Y je tedy nenulová na intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$. Krajní meze vyšly v opačném pořadí, protože funkce $\frac{1}{x}$ je klesající. V případě rostoucí funkce by meze vyšly v původním pořadí.

Distribuční funkci transformované náhodné veličiny Y vypočteme z definice distribuční funkce s využitím vztahů pro počítání s pravděpodobnostmi a znalosti distribuční funkce F_X. Pro $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ platí

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y \leq y) = \mathsf{P}\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = \mathsf{P}\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(X < \frac{1}{y}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \left(\frac{1}{y} - 1\right) = 2 - \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y \leq \frac{1}{2} \\ 2 - \frac{1}{y} & \text{pro } \frac{1}{2} < y < 1 \\ 1 & \text{pro } y \geq 1. \end{cases}$$

Hustotu náhodné veličiny Y spočteme jako derivaci distribuční funkce $F_Y(y)$. Pro $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ platí

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(2 - \frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2} \cdot (-1) = \frac{1}{y^2}.$$

Dohromady

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{pro } y \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Hustotu $f_Y(y)$ můžeme vypočítat i bez znalosti distribuční funkce $F_Y(y)$ pomocí věty o hustotě transformované náhodné veličiny. V našem případě $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (1, 2)$. Inverzní funkce k funkci $\varphi(x)$ je $\tau(y) = \frac{1}{y}$ pro $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ a derivace funkce $\tau(y)$ je $(\tau(y))' = \frac{1}{y^2}$. Dosadíme a pro $y \in (\frac{1}{2}, 1)$ dostaneme

$$f_Y(y) = f_X(\tau(y))\,|(\tau(y))'| = 1 \cdot \left|\frac{1}{y^2}\right| = \frac{1}{y^2}.$$

$\circ$

Příklad 5. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} k(x-3)^2 & \text{pro } -2 \le x < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočítejte koeficient k a hustotu náhodné veličiny $Y = \ln(X+3) - 2$.

Řešení. K výpočtu koeficientu k využijeme vlastnosti, že integrál z hustoty přes celou reálnou osu je roven jedné, tedy v našem případě

$$1 = \int_{-2}^{1} k(x-3)^2 \,\mathrm{d}x = k\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_{-2}^{1} = 39k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{39}.$$

Transformací $y = \ln(x+3) - 2$ se změní meze pro nenulovou část hustoty náhodné veličiny Y. Do transformace dosadíme krajní body intervalu $\langle -2, 1)$, na kterém je nenulová hustota $f_X(x)$, a získáme interval $\langle -2, \ln(4) - 2)$, na kterém je nenulová hustota $f_Y(y)$. K nalezení hustoty $f_Y(y)$ použijeme větu o hustotě transformované náhodné veličiny. V našem případě je monotonní funkce $\varphi(x)$ ve tvaru $\varphi(x) = \ln(x+3) - 2$, kde $x \in \langle -2, 1)$. Inverzní funkce k $\varphi(x)$ je $\tau(y) = \exp(y+2) - 3$, kde $y \in \langle -2, \ln(4) - 2)$, a derivace funkce $\tau(y)$ je rovna $(\tau(y))' = \exp(y+2)$, kde $y \in \langle -2, \ln(4) - 2)$. Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\tau(y))\,|(\tau(y))'| = \frac{1}{39}\left[\big(\exp(y+2) - 3\big) - 3\right]^2 |\exp(y+2)| \\ &= \frac{1}{39}\big(\exp(y+2) - 6\big)^2 \exp(y+2), \quad y \in \langle -2, \ln(4) - 2)\,, \end{aligned}$$

jinak je $f_Y(y) = 0$. ∘

ПШП

1. Počet různých druhů zboží, které zákazník nakoupí při jedné návštěvě obchodu, je náhodná veličina X. Dlouhodobým sledováním bylo zjištěno, že X nabývá hodnot $0, 1, 2, 3, 4$ s pravděpodobnostmi 0,25; 0,55; 0,11; 0,07 a 0,02. Určete její střední hodnotu a rozptyl počtu nakoupených druhů zboží. Jakou střední hodnotu bude mít náhodná veličina $Y = 2X^2 + 1$?

   [$\mathsf{E}(X) = 1{,}06$; $\mathrm{var}(X) = 0{,}8164$; $\mathsf{E}(Y) = 4{,}88$]

2. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = 4X$, jestliže X má Poissonovo rozdělení pravděpodobností s parametrem $\lambda > 0$.

[$p_Y(y) = \frac{\lambda^{y/4}}{(y/4)!}\exp(-\lambda)$ pro $y \in \{0, 4, 8, 12, \ldots\}$, $p_Y(y) = 0$ jinak]

3. Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = 2X+1$, jestliže X má pravděpodobnostní funkci

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{pro } x \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

[$p_Y(y) = \frac{1}{3}$ pro $y \in \{3, 5, 7\}$, $p_Y(y) = 0$ jinak]

4. Najděte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = X^3$, jestliže X má pravděpodobnostní funkci

$$p_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{pro } x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

[$p_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y/3}$ pro $y = 1, 8, 27, 64, \ldots$, $p_Y(y) = 0$ jinak]

5. Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$, jestliže X má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 3)$.

[$f(y) = \frac{1}{6\sqrt{y}}$ pro $0 < y < 9$, $f(y) = 0$ jinak]

6. Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = \ln(X)$, jestliže X má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

[$f(y) = \exp(y)$ pro $y < 0$, $f(y) = 0$ jinak]

7. Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = -\ln(X)$, jestliže X má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

[$f(y) = \exp(-y)$ pro $y \geq 0$, $f(y) = 0$ jinak]

8. Najděte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$, jestliže X má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-2, 0)$.

[$f(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$ pro $0 < y < 4$, $f(y) = 0$ jinak; $F(y) = 0$ pro $y \leq 0$, $F(y) = \frac{\sqrt{y}}{2}$ pro $0 < y < 4$, $F(y) = 1$ pro $y \geq 4$]

9. Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = 5\ln(X)$, jestliže X má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.

[$f(y) = \frac{1}{5}\exp(\frac{y}{5})$ pro $y < 0$, $f(y) = 0$ jinak]

10. Náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočítejte hustotu náhodné veličiny $Y = \exp(-X)$.

[$f(y) = -\frac{\ln(y)}{2y}$ pro $\exp(-2) \leq y < 1$, $f(y) = 0$ jinak]

9 Náhodné vektory

Náhodný vektor je uspořádaná n-tice náhodných veličin $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ definovaných na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Sdružená (simultánní) ***distribuční funkce*** náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je zobrazení $F_{\mathbf{X}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{P}\Big[\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega \in \Omega \colon X_j(\omega) \leq x_j\}\Big]$$
$$= \mathsf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka. V praxi užíváme označení $\mathsf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathsf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$.

Diskrétní náhodný vektor nabývá konečně nebo spočetně mnoha hodnot a jeho rozdělení pravděpodobností (přiřazující pravděpodobnost realizaci náhodného vektoru v borelovské množině v $\mathbb{R}^n$) je určeno dvojicí $\{\mathbf{x}_m\}, \{p_m\}$, kde $\mathbf{x}_m = (x_{1m}, \dots, x_{nm})'$ jsou realizace náhodného vektoru a $p_m = \mathsf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{x}_m), \sum_m p_m = 1$. Funkce $p(\mathbf{x}_m) = p_m$ se nazývá ***pravděpodobnostní funkce***. Distribuční funkce diskrétního náhodného vektoru je dána jako

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m : \mathbf{x}_m \leq \mathbf{x}} p_m \qquad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n.$$

Rozdělení pravděpodobností ***spojitého náhodného vektoru*** je určeno ***hustotou*** $f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$, nezápornou borelovsky měřitelnou funkcí. Distribuční funkce spojitého náhodného vektoru je dána jako

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(t_1, \dots, t_n) \, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n$$
$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n.$$

Pro pravděpodobnostní funkce a hustoty náhodných vektorů platí:

- $f(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ v bodech, ve kterých tato parciální derivace existuje;
- $\sum\limits_{x_1\in \mathsf{M}_1} \dots \sum\limits_{x_n\in \mathsf{M}_n} p(x_1,\dots,x_n) = 1$, kde M_i, $i = 1,\dots,n$ je obor hodnot veličiny X_i;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = 1$.

Nechť a_i, b_i, $-\infty < a_i \le b_i < \infty,\ i = 1,\dots,n$, pak platí

$$\mathsf{P}(a_1 < X_1 \le b_1,\dots,a_n < X_n \le b_n) = \sum (-1)^{\sum \varepsilon_j} F_{\mathbf{X}}(c_1,\dots,c_n) \ge 0\,,$$

kde $\varepsilon_j = 0$ nebo $\varepsilon_j = 1$, $(j = 1,\dots,n)$, $c_j = a_j\varepsilon_j + b_j(1-\varepsilon_j)$. Speciálně, pro dvourozměrný náhodný vektor $(X,Y)'$ dostaneme výraz

$$\mathsf{P}(a < X \le b, c < Y \le d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

Náhodný vektor $(X_{i_1},\dots,X_{i_k})'$, jehož složky jsou vybrané z náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1,\dots,X_n)'$, se nazývá ***marginální náhodný vektor*** příslušný vektoru $\mathbf{X}$ pro $k = 1,\dots,n-1$ a $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

Marginální distribuční funkci/hustotu/pravděpodobnostní funkci získáme z jí odpovídajícího simultánního protějšku limitou/integrací/sčítáním přes všechny proměnné x_j odpovídající „zbylým“ veličinám X_j, $j \ne i_1,\dots,i_k$.

Řešené příklady

Příklad 1. Náhodný vektor $(X,Y)'$ má sdruženou pravděpodobnostní funkci zadanou tabulkou

$X \setminus Y$	1	2	3
-1	0,15	0,05	0,10
0	0,10	0,10	0,15
1	0,05	0,10	0,20

Ověřte, že se opravdu jedná o pravděpodobnostní funkci, a určete

a) $\mathsf{P}(X = 0,\, Y = 3)$,

b) $\mathsf{P}(X < 0{,}5,\, Y < 2{,}5)$,

c) $\mathsf{P}(X > 0{,}5,\, Y > 2{,}5)$,

d) marginální rozdělení (ověřte, že se opravdu jedná o rozdělení pravděpodobností),

e) sdruženou distribuční funkci.

Řešení. Jedná se o pravděpodobnostní funkci, protože všechny funkční hodnoty jsou kladné a jejich součet je roven jedné.

Z tabulky sdružených pravděpodobností vidíme (třetí řádek, čtvrtý sloupec), že

$$\mathsf{P}(X = 0,\, Y = 3) = 0{,}15.$$

Pravděpodobnosti b) a c) vypočteme jako součet pravděpodobností výsledků příznivých danému jevu, tj.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X < 0{,}5,\, Y < 2{,}5) &= \mathsf{P}(X = -1,\, Y = 1) + \mathsf{P}(X = -1,\, Y = 2) \\
&\quad + \mathsf{P}(X = 0,\, Y = 1) + \mathsf{P}(X = 0,\, Y = 2) \\
&= 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}10 = 0{,}40. \\
\mathsf{P}(X > 0{,}5,\, Y > 2{,}5) &= \mathsf{P}(X = 1,\, Y = 3) = 0{,}20.
\end{aligned}$$

Marginální rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X, resp. Y, získáme součtem řádků, resp. sloupců, tabulky hodnot sdružené pravděpodobnostní funkce

x_i	-1	0	1
$p_X(x_i)$	0,30	0,35	0,35

y_j	1	2	3
$p_Y(y_j)$	0,30	0,25	0,45

Jedná se o rozdělení pravděpodobností, protože všechny funkční hodnoty $p_X(x)$, resp. $p_Y(y)$, jsou kladné a jejich součet je roven jedné.

Sdruženou distribuční funkci $F(x, y)$ náhodného vektoru $(X, Y)'$ vypočteme podle definice

$$F(x, y) = \sum_{i: x_i \le x} \sum_{j: y_j \le y} \mathsf{P}(X = x_i,\, Y = y_j), \quad \forall (x, y)' \in \mathbb{R}^2.$$

Distribuční funkce diskrétního náhodného vektoru je schodovitá funkce definovaná na $\mathbb{R}^2$. Definiční obor distribuční funkce lze rozdělit na kartézský součin disjunktních zprava uzavřených intervalů, na kterých je distribuční funkce konstantní. Hraniční body těchto intervalů tvoří jednotlivé realizace náhodných veličin X a Y. Vše lze souhrnně zapsat do tabulky

$x \setminus y$	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, 3)$	$\langle 3, \infty)$
$(-\infty, -1)$	0	**0**	0	0
$\langle -1, 0)$	0	0,15	0,20	0,30
$\langle 0, 1)$	0	0,25	0,40	**0,65**
$\langle 1, \infty)$	0	0,30	0,55	1

Podrobně si vysvětlíme, jak byly spočteny některé některé hodnoty z tabulky (vyznačeny tučně). Např. v bodě $(-1{,}5,\ 1{,}8)' \in (-\infty, -1) \times \langle 1, 2)$ je hodnota distribuční funkce rovna nule, protože

$$F(-1{,}5,\ 1{,}8) = \mathsf{P}(X \leq -1{,}5,\ Y \leq 1{,}8) = \mathsf{P}(\emptyset) = 0.$$

Pro $(0{,}5,\ 3{,}4)' \in \langle 0, 1) \times \langle 3, \infty)$ dostaneme

$$\begin{aligned} F(0{,}5,\ 3{,}4) &= \mathsf{P}(X \leq 0{,}5,\ Y \leq 3{,}4) \\ &= \mathsf{P}(X = -1,\ Y = 1) + \mathsf{P}(X = -1,\ Y = 2) + \mathsf{P}(X = -1,\ Y = 3) \\ &\quad + \mathsf{P}(X = 0,\ Y = 1) + \mathsf{P}(X = 0,\ Y = 2) + \mathsf{P}(X = 0,\ Y = 3) \\ &= 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}65. \end{aligned}$$

○

Příklad 2. Nechť náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobností soustředěné na trojúhelníkové oblasti

$$G = \{(x, y)' \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1 - x\}.$$

Vypočtěte sdruženou hustotu a obě marginální hustoty. Dále určete pravděpodobnosti

$$\mathsf{P}(X \leq 0{,}5,\ Y \leq 0{,}5),\ \ \mathsf{P}(X \leq 0{,}5,\ Y \geq 0{,}5),\ \ \mathsf{P}(X \geq 0{,}5,\ Y \leq 0{,}5).$$

Řešení. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobností na trojúhelníkové oblasti G, proto je hustota na této oblasti konstantní, $f(x, y) = c$, a mimo tuto oblast nulová. Při výpočtu konstanty c

využijeme vztah
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$
Odtud
$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} c\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = c\int_0^1 \big[y\big]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x = c\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x$$
$$= c\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{2} = 1 \quad\Rightarrow\quad c = 2.$$
Dále určíme marginální hustoty. Uvažujme nejprve náhodnou veličinu X. Pro $x \notin \langle 0,1)$ je $f_X(x) = 0$. Pro $x \in \langle 0,1)$ dostaneme
$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2\,\mathrm{d}y = 2\big[y\big]_{y=0}^{y=1-x} = 2(1-x).$$
Analogicky vypočteme marginální hustotu náhodné veličiny Y. Pro $y \notin \langle 0,1)$ je $f_Y(y) = 0$. Pro $y \in \langle 0,1)$ dostaneme
$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2\,\mathrm{d}x = 2\big[x\big]_{x=0}^{x=1-y} = 2(1-y).$$
Na závěr vypočteme hledané pravděpodobnosti
$$\mathsf{P}(X \le 0{,}5,\ Y \le 0{,}5) = \int_0^{0{,}5}\int_0^{0{,}5} 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{0{,}5}\big[2x\big]_{x=0}^{x=0{,}5}\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{0{,}5} 1\,\mathrm{d}y = \big[y\big]_{y=0}^{y=0{,}5} = 0{,}5,$$
$$\mathsf{P}(X \le 0{,}5,\ Y \ge 0{,}5) = \int_0^{0{,}5}\left[\int_{0{,}5}^{1-x} 2\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_0^{0{,}5}\big[2y\big]_{y=0{,}5}^{y=1-x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{0{,}5}(1-2x)\,\mathrm{d}x = \big[x-x^2\big]_{x=0}^{x=0{,}5} = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
$$\mathsf{P}(X \ge 0{,}5,\ Y \le 0{,}5) = \int_{0{,}5}^{1}\left[\int_0^{1-x} 2\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_{0{,}5}^{1}\big[2y\big]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{0{,}5}^{1}(2-2x)\,\mathrm{d}x = \big[2x-x^2\big]_{x=0{,}5}^{x=1} = 1-\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

○

Příklad 3. Nechť $(X,Y)'$ je náhodný vektor, jehož sdružená distribuční funkce $F(x,y)$ je dána tabulkou

$x \setminus y$	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, \frac{\pi}{2})$	$\langle \frac{\pi}{2}, \infty)$
$(-\infty, 0)$	0	0	0
$\langle 0, \frac{\pi}{2})$	0	$\sin x \sin y$	$\sin x$
$\langle \frac{\pi}{2}, \infty)$	0	$\sin y$	1

Určete sdruženou hustotu náhodného vektoru $(X,Y)'$ a marginální hustoty náhodných veličin X a Y.

Řešení. Sdružená hustota $f(x,y)$ náhodného vektoru $(X,Y)'$ je pro libovolné $(x,y)' \in (0,\pi/2) \times (0,\pi/2)$ rovna

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y.$$

Marginální hustota náhodné veličiny X je pro $x \in (0,\pi/2)$

$$f_X(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y \,\mathrm{d}y = \cos x \,[\sin y]_0^{\pi/2} = \cos x.$$

Obdobně vypočteme hustotu náhodné veličiny Y. Pro $y \in (0,\pi/2)$ platí

$$f_Y(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y \,\mathrm{d}x = \cos y \,[\sin x]_0^{\pi/2} = \cos y.$$

Na jiných oblastech jsou všechny uvedené hustoty nulové. ○

Příklad 4. Hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je dána vztahem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - x + y, & \text{pro } (x,y)' \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete sdruženou distribuční funkci $F(x,y)$ a vypočtěte pravděpodobnost $\mathsf{P}(0{,}25 \leq X \leq 0{,}5,\ 0{,}25 \leq Y \leq 0{,}5)$.

Řešení. Je-li $(x,y)' \in \langle 0,1) \times \langle 0,1)$, dostaneme

$$F(x,y) = \int_0^x \left[\int_0^y (1-u+v)\,\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u = \int_0^x \left[v - uv + \frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=y} \mathrm{d}u$$
$$= \int_0^x \left(y - uy + \frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \left[yu - y\frac{u^2}{2} + \frac{y^2}{2}u\right]_{u=0}^{u=x} = \frac{xy}{2}(2 - x + y).$$

Pro $(x,y)' \in \langle 1,\infty) \times \langle 1,\infty)$ dostaneme

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (1-u+v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_1^x \int_1^y 0\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 1.$$

Pro $(x,y)' \in \langle 0,1) \times \langle 1,\infty)$ platí

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x \left[\int_0^1 (1-u+v)\,\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u = \int_0^x \left[v - uv + \frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=1} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^x \left(1-u+\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}u = \left[u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}u\right]_{u=0}^{u=x} = \frac{x}{2}(3-x). \end{aligned}$$

Je-li $(x,y)' \in \langle 1,\infty) \times \langle 0,1)$, pak

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 \left[\int_0^y (1-u+v)\,\mathrm{d}v\right] \mathrm{d}u = \int_0^1 \left[v - uv + \frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=y} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^x \left(y - uy + \frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}u = \left[yu - y\frac{u^2}{2} + \frac{y^2}{2}u\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{y}{2}(1+y). \end{aligned}$$

V jiných oblastech roviny je distribuční funkce rovna nule. Výsledky zapíšeme přehledně do tabulky hodnot distribuční funkce

$x \setminus y$	$(-\infty,0)$	$\langle 0,1)$	$\langle 1,\infty)$
$(-\infty,0)$	0	0	0
$\langle 0,1)$	0	$\frac{xy}{2}(2-x+y)$	$\frac{x}{2}(3-x)$
$\langle 1,\infty)$	0	$\frac{y}{2}(1+y)$	1

Nyní určíme hledanou pravděpodobnost

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(0{,}25 \le X \le 0{,}5,\ 0{,}25 \le Y \le 0{,}5) &= \int_{0,25}^{0,5} \left[\int_{0,25}^{0,5} (1-x+y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\ &= \int_{0,25}^{0,5} \left[x - \frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=0,25}^{x=0,5} \mathrm{d}y = \int_{0,25}^{0,5} \left(\frac{5}{32} + \frac{y}{4}\right) \mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{5}{32}y + \frac{y^2}{8}\right]_{y=0,25}^{y=0,5} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost můžeme vypočítat i pomocí sdružené distribuční funkce. V tomto případě platí

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(0{,}25 \le X \le 0{,}5,\ 0{,}25 \le Y \le 0{,}5)\\
&\quad = F(0{,}5,\ 0{,}5) - F(0{,}25,\ 0{,}5) - F(0{,}5,\ 0{,}25) + F(0{,}25,\ 0{,}25)\\
&\quad = \frac{1}{4} - \frac{9}{64} - \frac{7}{64} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Dosáhli jsme stejného výsledku, počítali jsme tedy správně. ○

ΠШΠ

1. Spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)'$ má hustotu

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, \quad (x, y)' \in \mathbb{R}^2.$$

Vypočtěte pravděpodobnost $\mathsf{P}(\mathbf{X} \in G)$, kde

$$G = \{(x, y)' \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}.$$

[1/16]

2. Nezávisle na sobě hodíme dvěma kostkami. Náhodná veličina X udává počet ok, která padla na první kostce a náhodná veličina Y udává maximum z počtu ok, která padla na obou kostkách. Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci $p(x, y)$ a obě marginální pravděpodobnostní funkce $p_X(x)$ a $p_Y(y)$.

[$p(a, a) = \frac{a}{36}$ pro $a = 1, 2, \ldots, 6$; $p(a, b) = \frac{1}{36}$ pro $a, b = 1, 2, \ldots, 6,\ a < b$; $p(x, y) = 0$ jinak; $p_X(a) = \frac{1}{6}$ pro $a = 1, 2, \ldots, 6$; $p_X(x) = 0$ jinak; $p_Y(a) = \frac{2a-1}{36}$ pro $a = 1, 2, \ldots, 6$; $p_Y(y) = 0$ jinak]

3. Nechť náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobností soustředěné na čtvercové oblasti

$$G = \{(x, y)' \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1\}.$$

Vypočtěte sdruženou hustotu a obě marginální hustoty.

[$f(x, y) = 1$ pro $(x, y)' \in G$, $f(x, y) = 0$ jinak; $f_X(x) = 1$ pro $0 \le x < 1$, $f_X(x) = 0$ jinak; $f_Y(y) = 1$ pro $0 \le y < 1$, $f_Y(y) = 0$ jinak]

4. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ reálný vektor a $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$ je reálná čtvercová symetrická pozitivně definitní matice. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ má n-rozměrné normální rozdělení pravděpodobností s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$, tj. $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, právě když jeho hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).$$

Položme $n = 2$ a zaveďme označení $\sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \varrho\sigma_1\sigma_2$, tj.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Odvoďte explicitní tvar hustoty v tomto případě.

[$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{q(x_1,x_2)}{2}\right)$, kde $q(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\varrho^2}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\varrho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$]

5. Je dán náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ se sdruženou hustotou

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{27}x_3(x_1 + x_2) \text{ pro } x_1 \in \langle 0{,}1\rangle,\ x_2 \in \langle 0{,}2\rangle,\ x_3 \in \langle 0{,}3\rangle,$$

a nula jinak. Spočtěte všechny dvourozměrné a jednorozměrné marginální hustoty (u nich ověřte, že jde opravdu o hustoty).

[$f_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2)$, $f_{23}(x_2, x_3) = \frac{1}{27}(2x_2 + 1)x_3$, $f_{13}(x_1, x_3) = \frac{4}{27}(x_1 + 1)x_3$, $f_1(x_1) = \frac{2}{3}(x_1 + 1)$, $f_2(x_2) = \frac{1}{6}(2x_2 + 1)$, $f_3(x_3) = \frac{2}{9}x_3$ na oblastech odpovídajících oborům hodnot jednotlivých veličin a nula jinak.]

6. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má konstantní hustotu na obdélníkové oblasti $G = \langle 1, 2\rangle \times \langle 2, 4\rangle$ a nulovou jinde. Najděte sdruženou hustotu, sdruženou distribuční funkci, marginální hustoty a marginální distribuční funkce. Dále vypočítejte pravděpodobnosti

   (a) $\mathsf{P}(1 \le X \le 2,\ 2 \le Y \le 3)$,

   (b) $\mathsf{P}(1{,}5 \le X \le 2,\ 3 \le Y \le 4)$.

[$f(x, y) = \frac{1}{2}$ pro $(x, y) \in \langle 1, 2\rangle \times \langle 2, 4\rangle$, $f(x, y) = 0$ jinak; $f_X(x) = 1$ pro $x \in \langle 1, 2\rangle$, $f_X(x) = 0$

jinak; $f_Y(y) = 0{,}5$ pro $y \in \langle 2,4\rangle$, $f_Y(y) = 0$ jinak; $F(x,y) = 0{,}5(x-1)(y-2)$ pro $(x,y)' \in G$, $F(x,y) = 0{,}5(y-2)$ pro $(x,y)' \in \langle 1,2\rangle \times \langle 4,\infty)$, $F(x,y) = x-1$ pro $(x,y)' \in \langle 2,\infty) \times \langle 2,4\rangle$, $F(x,y) = 1$ pro $(x,y)' \in \langle 2,\infty) \times \langle 4,\infty)$, $F(x,y) = 0$ jinak; $F_X(x) = 0$ pro $x < 1$, $F_X(x) = x-1$ pro $x \in \langle 1,2\rangle$, $F_X(x) = 1$ pro $x > 2$; $F_Y(y) = 0$ pro $y < 2$, $F_Y(y) = 0{,}5(y-2)$ pro $y \in \langle 2,4\rangle$, $F_Y(y) = 1$ pro $y > 4$; 1/2; 1/4.]

7. Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $(X,Y)'$ je dána tabulkou

$X \setminus Y$	4	5	6
1	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	$\frac{4}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$
3	$\frac{2}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{2}{27}$

Určete sdruženou distribuční funkci $F(x,y)$, marginální rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y a vypočítejte pravděpodobnost

(a) $\mathsf{P}(X \geq 2,\, Y \geq 5)$,

(b) $\mathsf{P}(X \leq 2,\, Y \geq 5)$.

[$F(x,y) = 5/27$ pro $(x,y)' \in \langle 1,2) \times \langle 4,5)$, $F(x,y) = 6/27$ pro $(x,y)' \in \langle 1,2) \times \langle 5,6)$, $F(x,y) = 9/27$ pro $(x,y)' \in \langle 1,2) \times \langle 6,\infty)$, $F(x,y) = 9/27$ pro $(x,y)' \in \langle 2,3) \times \langle 4,5)$, $F(x,y) = 13/27$ pro $(x,y)' \in \langle 2,3) \times \langle 5,6)$, $F(x,y) = 20/27$ pro $(x,y)' \in \langle 2,3) \times \langle 6,\infty)$, $F(x,y) = 11/27$ pro $(x,y)' \in \langle 3,\infty) \times \langle 4,5)$, $F(x,y) = 18/27$ pro $(x,y)' \in \langle 3,\infty) \times \langle 5,6)$, $F(x,y) = 1$ pro $(x,y)' \in \langle 3,\infty) \times \langle 6,\infty)$, $F(x,y) = 0$ jinak; $p_Y(4) = \frac{11}{27}$, $p_Y(5) = \frac{7}{27}$, $p_Y(6) = \frac{9}{27}$, $p_Y(y) = 0$ jinak; 4/9; 11/27]

10 Nezávislé náhodné veličiny

Nezávislost n-tice náhodných veličin: Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou (stochasticky) nezávislé, jestliže pro libovolná reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ jsou nezávislé náhodné jevy $(X_1 \leq x_1), \dots, (X_n \leq x_n)$.

Kriterium nezávislosti: Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n),$$
$$\forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

tzn. sdružená distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je rovna součinu marginálních distribučních funkcí náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ pro libovolná reálná čísla $x_1, \dots, x_n$.

Analogická kritéria nezávislosti pak dostaneme i pro diskrétní, resp. spojité náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$:

- **diskrétně** rozdělené náhodné veličiny:

  $$p_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_1(x_1) \cdots p_n(x_n),$$

  to znamená, že sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je rovna součinu marginálních pravděpodobnostních funkcí náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ pro libovolná $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathsf{M}_1 \times \cdots \times \mathsf{M}_n$, kde M_i je obor hodnot veličiny X_i;

- **spojitě** rozdělené náhodné veličiny:

  $$f_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n),$$

  tj. sdružená hustota náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je rovna součinu marginálních hustot náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ pro skoro všechna[1] $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.

[1] Až na množinu Lebesgueovy míry nula, tedy v $\mathbb{R}^2$ nemusí být splněno například pro přímku, konečný počet bodů atp.

Řešené příklady

Příklad 1. Diskrétní náhodný vektor $(X,Y)'$ má dánu pravděpodobnostní funkci tabulkou

$X \setminus Y$	-1	0	1
1	0	1/8	1/2
2	1/8	1/4	0

Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

Řešení. Nejprve spočteme marginální pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X a Y, která získáme součtem řádků a sloupců tabulky hodnot sdružené pravděpodobnostní funkce

x_i	1	2
$p_X(x_i)$	5/8	3/8

y_j	-1	0	1
$p_Y(y_j)$	1/8	3/8	4/8

Náhodné veličiny X a Y nejsou stochasticky nezávislé, neboť $p_{X,Y}(1,-1) = 0$, a proto nemůže být splněna nutná podmínka pro nezávislost. Je nutně

$$p_{X,Y}(1,-1) = 0 \neq p_X(1) \cdot p_Y(-1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{64}.$$

$\circ$

Příklad 2. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)'$ má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 24x^2y(1-x) & \text{pro } 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

Řešení. Nejprve vypočteme marginální hustoty. Hustota náhodné veličiny X je pro $0 \leq x < 1$ rovna

$$f_X(x) = 24 \int_0^1 x^2(1-x)y \,\mathrm{d}y = 24x^2(1-x) \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 12x^2(1-x),$$

tj.

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{pro } x \in (0{,}1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Analogicky, pro $0 \le y < 1$ platí

$$f_Y(y) = 24 \int_0^1 yx^2(1-x)\,\mathrm{d}x = 24y \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 2y,$$

a tedy hustota náhodné veličiny Y je

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2y & \text{pro } y \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože platí $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ pro $\forall (x,y)' \in \mathbb{R}^2$, jsou veličiny X a Y stochasticky nezávislé. ○

ΠШΠ

1. Diskrétní náhodný vektor $(X,Y)'$ má dánu pravděpodobnostní funkci tabulkou

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/4	1/8	0
1	1/4	1/4	1/8

   Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y stochasticky nezávislé.

   [nejsou]

2. Hodíme třikrát jednou mincí. Nechť náhodná veličina X je rovna počtu líců, které padly a náhodná veličina Y udává počet změn ve výsledcích těchto tří hodů. Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé.

   [nejsou]

3. Nechť náhodný vektor $(X,Y)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobností soustředěné na čtvercové oblasti

$$G = \{(x,y)' \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1\}.$$

   Rozhodněte, zda jeho složky X, Y jsou stochasticky nezávislé.

   [jsou]

4. Nechť náhodný vektor $(X, Y)'$ má spojité rovnoměrné rozdělení pravděpodobností soustředěné na trojúhelníkové oblasti

$$G = \{(x, y)' \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 - x\}.$$

Rozhodněte, zda jeho složky X, Y jsou stochasticky nezávislé.

[nejsou]

5. Náhodný vektor $(X, Y)'$ má konstantní hustotu na obdélníkové oblasti $G = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle$ a nulovou jinde. Zjistěte, zda jsou složky X a Y stochasticky nezávislé.

[jsou]

6. Nechť náhodný vektor $(X, Y)'$ má sdruženou hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{384} x^2 y^2 \exp\left(-y - \frac{x}{2}\right) & \text{pro } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ověřte, zda jsou veličiny X, Y stochasticky nezávislé.

[jsou]

11 Podmíněné rozdělení

Nechť X a Y jsou ***diskrétní*** náhodné veličiny se simultánní pravděpodobnostní funkcí $p(x, y)$ a marginálními pravděpodobnostními funkcemi $p_X(x)$ a $p_Y(y)$ definovanými a nenulovými pro $x \in M_X$ a $y \in M_Y$. ***Podmíněnou pravděpodobnostní funkci veličiny*** X ***při daném*** $Y = y$ (kde $y \in M_Y$) definujeme jako

$$h_X(x \mid y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}, \quad x \in \mathsf{M}_X,\ y \in \mathsf{M}_Y.$$

Nechť X a Y jsou ***spojité*** náhodné veličiny se simultánní hustotou $f(x, y)$ a marginálními hustotami $f_X(x)$ a $f_Y(y)$ definovanými a nenulovými pro $x \in \mathsf{M}_X$ a $y \in \mathsf{M}_Y$. ***Podmíněnou hustotu veličiny*** X ***při daném*** $Y = y$ (kde $y \in M_Y$) definujeme jako

$$h_X(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathsf{M}_X,\ y \in \mathsf{M}_Y.$$

Podmíněné číselné charakteristiky:

Podmíněnou střední hodnotu veličiny X vzhledem k Y definujeme v diskrétním případě jako

$$\mathsf{E}(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i h_X(x_i \mid y_j)$$

a ve spojitém případě jako

$$\mathsf{E}(X \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x h_X(x \mid y)\,\mathrm{d}x.$$

Podmíněný rozptyl je pro oba případy definovaný jako

$$\mathrm{var}(X \mid Y = y) = \mathsf{E}\left\{[X - \mathsf{E}(X \mid Y = y)]^2 \mid Y = y\right\}.$$

Řešené příklady

Příklad 1. Určete podmíněné rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y při daném $X = x$, pokud mají veličiny X, Y sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou

$X \setminus Y$	0	1	4
0	0	1/8	1/2
1	1/8	1/4	0

Dále určete podmíněné střední hodnoty a podmíněné rozptyly náhodné veličiny Y při daném $X = x$.

Řešení. Nejprve určíme marginální pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X

$$p_X(0) = \frac{5}{8}; \quad p_X(1) = \frac{3}{8}; \quad p_X(x) = 0 \text{ jinak.}$$

Náhodná veličina X nabývá dvou různých hodnot, a proto existují dvě podmíněná rozdělení náhodné veličiny Y při daném $X = x$, a to rozdělení Y při daném $X = 0$, tj. $h_Y(y \mid x = 0)$, a rozdělení Y při daném $X = 1$, tj. $h_Y(y \mid x = 1)$. Podmíněná rozdělení vypočteme užitím vztahu

$$h_Y(y \mid x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \quad x \in \{0,1\},\ y \in \{0,1,4\}.$$

Odtud dostaneme

$$h_Y(y = 0 \mid x = 0) = \frac{p(0{,}0)}{p_X(0)} = \frac{0}{\frac{5}{8}} = 0,$$

$$h_Y(y = 1 \mid x = 0) = \frac{p(1,0)}{p_X(0)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5},$$

$$h_Y(y = 4 \mid x = 0) = \frac{p(4,0)}{p_X(0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$$

a analogicky postupujeme dále. Výsledné podmíněné pravděpodobnostní funkce $h_Y(y \mid x = 0)$ a $h_Y(y \mid x = 1)$ shrneme přehledně do tabulky

$X \setminus Y$	0	1	4	$\sum_y h_y(y \mid x)$
0	0	1/5	4/5	1
1	1/3	2/3	0	1

Pro kontrolu sečteme hodnoty v řádcích, abychom ověřili, že se skutečně jedná o pravděpodobností funkce, neboli ověříme, že je součet roven jedné.

Podmíněné střední hodnoty a podmíněné rozptyly náhodné veličiny Y při daném $X = x$, $\mathsf{E}(Y \mid X = x)$ a $\operatorname{var}(Y \mid X = x)$, vypočítáme pomocí podmíněných rozdělení pravděpodobností $h_Y(y \mid 0)$ a $h_Y(y \mid 1)$ následovně

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y \mid X = 0) &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{17}{5}, \\
\mathsf{E}(Y \mid X = 1) &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 = \frac{2}{3}, \\
\operatorname{var}(Y \mid X = 0) &= \left(0 - \frac{17}{5}\right)^2 \cdot 0 + \left(1 - \frac{17}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(4 - \frac{17}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} \\
&= \frac{36}{25}, \\
\operatorname{var}(Y \mid X = 1) &= \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(4 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 0 = \frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

○

Příklad 2. Spojité náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$
f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2x + y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}
$$

Určete podmíněnou hustotu Y při $X = 0{,}25$ a podmíněnou hustotu X při $Y = 1$. Dále určete podmíněnou střední hodnotu a podmíněný rozptyl náhodné veličiny X při $Y = 1$.

Řešení. Nejprve určíme marginální hustoty pravděpodobnosti

$$
f_X(x) = \int_0^2 \frac{1}{4}(2x + y)\,\mathrm{d}y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{pro } 0 < x < 1,
$$

$$
f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{4}(2x + y)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}(y + 1) \quad \text{pro } 0 < y < 2.
$$

Podmíněné hustoty vypočteme užitím vztahů

$$
h_Y(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}; \quad h_X(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2.
$$

Odtud dostaneme

$$h_Y(y \mid x = 0{,}25) = \frac{f(0{,}25; y)}{f_X(0{,}25)} = \frac{\frac{1}{4}(y + 0{,}5)}{\frac{1{,}25}{2}} = \frac{2}{5}(2y + 1) \quad \text{pro } 0 < y < 2,$$

$$h_X(x \mid y = 1) = \frac{f(x; 1)}{f_Y(1)} = \frac{\frac{1}{4}(2x + 1)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2x + 1) \quad \text{pro } 0 < x < 1.$$

Vně výše uvedených mezí jsou všechny hustoty nulové. Na závěr ještě spočteme podmíněnou střední hodnotu a podmíněný rozptyl náhodné veličiny X při $Y = 1$

$$\mathsf{E}(X \mid Y = 1) = \int_0^1 x \frac{1}{2}(2x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12},$$

$$\operatorname{var}(X \mid Y = 1) = \int_0^1 \left(x - \frac{7}{12}\right)^2 \frac{1}{2}(2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{25}{144}x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{49}{288}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{25}{432}x^3 - \frac{7}{24}x^2 + \frac{49}{288}x\right]_0^1 \doteq 0{,}686.$$

○

ПШП

1. Diskrétní náhodné veličiny X a Y mají sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou

$X \setminus Y$	0	1
0	1/18	3/18
1	4/18	3/18
2	6/18	1/18

Určete podmíněné střední hodnoty a podmíněné rozptyly náhodné veličiny Y při daném $X = x$.

[$\mathsf{E}(Y \mid X = 0) = \frac{3}{4}$, $\mathsf{E}(Y \mid X = 1) = \frac{3}{7}$, $\mathsf{E}(Y \mid X = 2) = \frac{1}{7}$, $\operatorname{var}(Y \mid X = 0) = \frac{3}{16}$, $\operatorname{var}(Y \mid X = 1) = \frac{12}{49}$, $\operatorname{var}(Y \mid X = 2) = \frac{6}{49}$]

2. Nechť X a Y jsou diskrétní náhodné veličiny se sdruženou pravděpodobnostní funkcí

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{21}(x+y) & \text{pro } x \in \{1,2,3\},\ y \in \{1,2\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete podmíněné rozdělení Y při $X = 1$.

[$h_Y(y \mid 1) = \frac{1}{5}(1+y)$ pro $y \in \{1,2\}$]

3. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)'$ má sdruženou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ x + y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete podmíněnou hustotu X při $Y = 0{,}5$.

[$h_X(x \mid 0{,}5) = 8x$ pro $x \in (0; 0{,}5)$]

4. Nechť sdružená hustota náhodného vektoru $(X,Y)'$ je dána předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete podmíněné střední hodnoty a podmíněné rozptyly náhodné veličiny Y při daném $X = x$, respektive X při daném $Y = y$.

$\Big[\mathsf{E}(X \mid Y = y) = \frac{y}{2}$, $\operatorname{var}(X \mid Y = y) = \frac{y^2}{12}$, $\mathsf{E}(Y \mid X = x) = \frac{1+x}{2}$, $\operatorname{var}(Y \mid X = x) = \frac{(x-1)^3}{12}\Big]$

5. Myš je uvězněná v místnosti s třemi východy v centru bludiště. Prvním východem se dostane ven z bludiště v průměru za tři minuty, druhý východ ji zavede zpět do pokoje, a to v průměru za pět minut, a konečně třetím východem se v průměru za 7 minut opět dostane zpět do pokoje. Předpokládáme, že myš si vybírá jeden ze tří východů se stejnou pravděpodobností. Jaká je střední doba toho, že myš opustí bludiště?

[15 minut]

12 Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Mějme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1,\ X_2, \ldots, X_n)'$, jehož složky jsou definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Jestliže platí $|\mathsf{E}(X_i)| < \infty$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak ***střední hodnota*** náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je definována takto

$$\mathsf{E}(\mathbf{X}) = (\mathsf{E}(X_1), \mathsf{E}(X_2), \ldots, \mathsf{E}(X_n))' .$$

Pokud jsou nadto veličiny X_i nezávislé, platí pro střední hodnotu jejich součinu

$$\mathsf{E}\,(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = \mathsf{E}\,(X_1) \cdot \mathsf{E}\,(X_2) \cdots \mathsf{E}(X_n), \tag{1}$$

tj. střední hodnota součinu veličin se rovná součinu jejich středních hodnot.

Jestliže $|\mathsf{E}(X^2)| < \infty$ a $|\mathsf{E}(Y^2)| < \infty$, potom

- ***kovariance*** dvou náhodných veličin X a Y je definovaná vztahem

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathsf{E}\big[\big(X - \mathsf{E}(X)\big) \cdot \big(Y - \mathsf{E}(Y)\big)\big] = \mathsf{E}(X \cdot Y) - \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y);$$

- je-li navíc $\mathrm{var}(X) \neq 0$ a $\mathrm{var}(Y) \neq 0$, definujeme ***korelační koeficient*** dvou náhodných veličin X a Y takto

$$\varrho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y)}}.$$

Kovariance i korelační koeficient jsou charakteristiky síly *lineárního* vztahu mezi veličinami X a Y. Kovariance nabývá libovolné *reálné* hodnoty, korelační koeficient pak hodnoty z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Hodnota $\varrho_{X,Y} = 1$ odpovídá přímé lineární závislosti, hodnota $\varrho_{X,Y} = -1$ závislosti nepřímé. Jestliže jsou veličiny X a Y nezávislé, potom kovariance, potažmo korelační koeficient jsou nulové, neboť z (1) dostaneme $\mathsf{E}(X \cdot Y) = \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y)$.

Poznámka. Opačná implikace platí pouze za předpokladu normálního rozdělení náhodného vektoru (X, Y). Veličinám s nulovým korelačním koeficientem říkáme *nekorelované*.

Další vybrané vlastnosti:

- korelace při lineární transformaci náhodných veličin:
$$\varrho_{a+bX,c+dY} = \varrho_{X,Y} \cdot \operatorname{sgn}(bd) \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{R},\ b \neq 0, d \neq 0;$$
- pro kovarianci obdobně platí $\operatorname{cov}(a + bX, c + dY) = bd \operatorname{cov}(X, Y)$;
- rozptyl součtu náhodných veličin:
$$\begin{aligned}\operatorname{var}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}(X_j) + 2\sum_{i<j}\sum \operatorname{cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}(X_j) + \sum_{i\neq j}\sum \operatorname{cov}(X_i, X_j).\end{aligned}$$

Varianční matice náhodného vektoru $\mathbf{X}$:

$$\operatorname{var}(\mathbf{X}) = \{\operatorname{cov}(X_i, X_j)\}_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X_1, X_1) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) & \cdots & \operatorname{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X_1) & \cdots & \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) & \cdots & \operatorname{var}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Korelační matice náhodného vektoru $\mathbf{X}$:

$$\operatorname{cor}(\mathbf{X}) = \left\{\varrho_{X_i,X_j}\right\}_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \varrho_{X_1,X_1} & \cdots & \varrho_{X_1,X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{X_n,X_1} & \cdots & \varrho_{X_n,X_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \varrho_{X_1,X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{X_n,X_1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešené příklady

Příklad 1. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)'$ má sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 1-x+y & \text{pro } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vypočtěte střední hodnotu, varianční a korelační matici náhodného vektoru $(X,Y)'$.

Řešení. Pro výpočet číselných charakteristik náhodného vektoru $(X,Y)'$ potřebujeme znát rozdělení pravděpodobností náhodných veličin X a Y. Proto nejprve určíme marginální hustoty

$$f_X(x) = \int_0^1 (1-x+y)\,\mathrm{d}y = \left[(1-x)y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2} - x,\ x \in (0,1);$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (1-x+y)\,\mathrm{d}x = \left[(1+y)x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} + y,\ y \in (0,1).$$

Jinde jsou hustoty $f_X(x)$ a $f_Y(y)$ nulové. Nyní už můžeme vypočítat střední hodnotu náhodných veličin X a Y

$$\mathsf{E}(X) = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{12},$$

$$\mathsf{E}(Y) = \int_0^1 y\left(y + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{7}{12}.$$

Pro výpočet rozptylu náhodných veličin X a Y potřebujeme nejprve spočítat střední hodnotu náhodných veličin X^2 a Y^2

$$\mathsf{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\left(\frac{3}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$\mathsf{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2\left(y + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Odtud, pro rozptyly náhodných veličin X a Y dostaneme

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{11}{144};\quad \mathrm{var}(Y) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

Zbývá spočítat kovarianci a korelaci náhodných veličin X a Y. Vypočteme $\mathsf{E}(X \cdot Y)$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(X \cdot Y) &= \int_0^1 x \left[\int_0^1 y(1-x+y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} - x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\frac{5}{6} - \frac{x}{2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{5}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{12},
\end{aligned}
$$

a tedy

$$
\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{3}{12} - \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{144}; \qquad \varrho_{X,Y} = \frac{\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\frac{11}{144}}} = \frac{1}{11}.
$$

Dohromady můžeme psát

$$
\mathsf{E}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}; \quad \operatorname{var}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{144} & \frac{1}{144} \\ \frac{1}{144} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}; \quad \operatorname{cor}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & 1 \end{pmatrix}.
$$

○

Příklad 2. Diskrétní náhodný vektor $(X,Y)'$ je zadán tabulkou sdružených pravděpodobností

$X \setminus Y$	1	0
1	0,005	0,01
0	0,02	0,965

Vypočtěte střední hodnotu, varianční a korelační matici náhodného vektoru $(X,Y)'$.

Řešení. Pro názornost přepíšeme tabulku sdružených pravděpodobností a vypočítáme marginální rozdělení pravděpodobností

$X \setminus Y$	1	0	$\sum$
1	0,005	0,01	0,015
0	0,02	0,965	0,985
$\sum$	0,025	0,975	1

Nyní spočítáme střední hodnoty náhodných veličin X a Y

$$\mathsf{E}(X) = 0 \cdot 0{,}985 + 1 \cdot 0{,}015 = 0{,}015;$$
$$\mathsf{E}(Y) = 0 \cdot 0{,}975 + 1 \cdot 0{,}025 = 0{,}025.$$

Abychom mohli vypočítat rozptyly náhodných veličin X a Y, musíme nejprve spočítat střední hodnoty náhodných veličin X^2 a Y^2. V tomto případě je $\mathsf{E}(X^2) = \mathsf{E}(X)$ a $\mathsf{E}(Y^2) = \mathsf{E}(X)$, neboť platí

$$\mathsf{E}(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}985 + 1^2 \cdot 0{,}015 = 0{,}015;$$
$$\mathsf{E}(Y^2) = 0^2 \cdot 0{,}975 + 1^2 \cdot 0{,}025 = 0{,}025.$$

Rozptyly náhodných veličin X a Y jsou proto rovny

$$\operatorname{var}(X) = 0{,}015 - (0{,}015)^2 = 0{,}014775;$$
$$\operatorname{var}(Y) = 0{,}025 - (0{,}025)^2 = 0{,}024375.$$

Zbývá spočítat kovarianci a korelaci náhodných veličin X a Y

$$\mathsf{E}(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}005 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 0 \cdot 0 \cdot 0{,}965 = 0{,}005;$$
$$\operatorname{cov}(X, Y) = 0{,}005 - 0{,}015 \cdot 0{,}025 = 0{,}004625;$$
$$\varrho_{X,Y} = \frac{0{,}004625}{\sqrt{0{,}014775 \cdot 0{,}024375}} = 0{,}244.$$

Dohromady, střední hodnota, varianční a korelační matice náhodného vektoru $(X, Y)'$ jsou rovny

$$\mathsf{E}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}015 \\ 0{,}025 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{var}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}014775 & 0{,}004625 \\ 0{,}004625 & 0{,}024375 \end{pmatrix};$$
$$\operatorname{cor}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}244 \\ 0{,}244 & 1 \end{pmatrix}.$$

○

ПШП

1. V urně jsou tři bílé, dvě modré a pět červených koulí. Náhodně vybereme z urny jednu kouli. Náhodné veličiny X_1, X_2 a X_3 definujeme

následujícím způsobem:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vytáhneme bílou kouli} \\ 0 & \text{jestliže vytáhneme modrou nebo červenou kouli} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vytáhneme modrou kouli} \\ 0 & \text{jestliže vytáhneme bílou nebo červenou kouli} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vytáhneme červenou kouli} \\ 0 & \text{jestliže vytáhneme bílou nebo modrou kouli} \end{cases}$$

Vypočtěte varianční a korelační matici takto vzniklého náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$.

$$\left[\operatorname{var}(\mathbf{X}) = \tfrac{1}{100} \begin{pmatrix} 21 & -6 & -15 \\ -6 & 16 & -10 \\ -15 & -10 & 25 \end{pmatrix}, \ \operatorname{cor}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2\sqrt{21}} & -\frac{3}{\sqrt{21}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{21}} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \right]$$

2. Kovariance náhodných veličin X_1 a X_2 je rovna 12. Vypočtěte kovarianci náhodných veličin $Y_1 = -8 + 11X_1$ a $Y_2 = 6 - 4X_2$.

[−528]

3. Náhodná veličina X má $\mathsf{E}(X) = 0, \operatorname{var}(X) = 1$. Najděte korelační koeficient $\varrho_{X,Y}$, kde $Y = 3X$.

[1]

4. Pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)'$ je dána tabulkou

a)

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	0,008	0,036	0,054	0,027
1	0,060	0,180	0,135	0
2	0,150	0,225	0	0
3	0,125	0	0	0

b)

$X \setminus Y$	1	2	3	4
3	0,01	0,02	0,03	0,25
5	0,04	0,16	0,18	0,05
7	0,12	0,07	0,06	0,01

Jak budou vypadat varianční a korelační matice?

[a) $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}45 \\ -0{,}45 & 0{,}63 \end{pmatrix}$; $\mathrm{cor}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}654 \\ -0{,}654 & 1 \end{pmatrix}$;
b) $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2{,}27 & -1{,}048 \\ -1{,}048 & 1{,}162 \end{pmatrix}$; $\mathrm{cor}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}645 \\ -0{,}645 & 1 \end{pmatrix}$]

5. Vyčítejte střední hodnotu a varianční matici dvourozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)'$, jehož hustota pravděpodobnosti je

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x + 2y) & \text{pro } (x,y)' \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěte též hodnotu korelačního koeficientu náhodných veličin X a Y.

$$\left[\mathsf{E}(\mathbf{X}) = \left(\tfrac{5}{9}, \tfrac{11}{18}\right)',\ \mathrm{var}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{13}{162} & -\frac{1}{162} \\ -\frac{1}{162} & \frac{23}{324} \end{pmatrix},\ \varrho_{X,Y} = -\frac{1}{\sqrt{13 \cdot 23}}\right]$$

6. Náhodná veličina X má normované normální rozdělení. Určete korelační koeficient náhodných veličin X a $Y = X^3$.

$\left[\varrho_{X,Y} = \frac{3}{\sqrt{15}}\right]$

13 Centrální limitní věty

Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou náhodné veličiny definované na *stejném* pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Centrální limitní věta (CLV):

Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejnou střední hodnotou μ a se stejným konečným, nenulovým rozptylem σ^2 (tedy $\mathsf{E}(X_n) = \mu$ a $\operatorname{var}(X_n) = \sigma^2$). Pak **posloupnost distribučních funkcí** náhodných veličin (normovaných součtů)

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

konverguje k **distribuční funkci** $\Phi(x)$ normovaného normálního rozdělení, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(Z_n \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Phi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Moivreova-Laplaceova věta (důsledek CLV):

Nechť náhodné veličiny X_n mají pro všechna $n \in \mathbb{N}$ binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$. Označme $F_n(x)$ distribuční funkci náhodné veličiny

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \Phi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Náhodná veličina X_n v Moivreově-Laplaceově větě představuje součet n nezávislých náhodných veličin majících alternativní rozdělení. Aproximace binomického rozdělení pravděpodobností normálním normovaným rozdělením je vyhovující, jestliže $np(1-p) > 9$ a současně $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$.

Řešené příklady

Příklad 1. Pravděpodobnost, že zakoupený elektrospotřebič bude vyžadovat opravu během záruční doby, je rovna 0,2. Jaká je pravděpodobnost, že během záruční doby bude nutno ze 400 prodaných spotřebičů opravit více než 96?

Řešení. Označme Y_i náhodnou veličinu s alternativním rozdělením Alt(0,2), která nabývá hodnoty 1, jestliže i-tý zakoupený elektrospotřebič potřebuje opravu během záruční doby, $i = 1, 2, \ldots, 400$. Veličiny Y_i můžeme považovat za nezávislé. Potom náhodná veličina $X_n = \sum_{i=1}^{400} Y_i \sim \mathrm{Bi}(400; 0{,}2)$ značí počet spotřebičů, které vyžadují opravu, mezi všemi ($n = 400$) prodanými elektrospotřebiči. Jelikož X_n má binomické rozdělení, pro střední hodnotu a rozptyl platí

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(X_n) = np = 400 \cdot 0{,}2 = 80;\\
&\mathrm{var}(X_n) = np(1-p) = 400 \cdot 0{,}2 \cdot (1-0{,}2) = 80 \cdot 0{,}8 = 64 = 8^2.
\end{aligned}$$

Ověříme podmínky, že pro výpočet hledané pravděpodobnosti můžeme užít aproximaci binomického rozdělení normálním rozdělením (Moivreova-Laplaceova věta):

1. $np(1-p) > 9$: $400 \cdot 0{,}2 \cdot (1-0{,}2) = 64 > 9$,
2. $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{401} \doteq 0{,}0025 < 0{,}2 < \frac{400}{401} \doteq 0{,}9975$.

Obě podmínky jsou splněny, a proto podle Moivreovy-Laplaceovy věty má normovaná veličina

$$U = \frac{X_n - \mathsf{E}(X_n)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_n)}} = \frac{X_n - 80}{8}$$

přibližně normované normální rozdělení. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_n > 96) &= 1 - \mathsf{P}(X_n \leq 96) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{X_n - 80}{8} \leq \frac{96-80}{8}\right)\\
&= 1 - \mathsf{P}(U \leq 2) \doteq 1 - \Phi(2) \doteq 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275.
\end{aligned}$$

Hledanou pravděpodobnost lze samozřejmě spočítat i přímým výpočtem bez použití aproximace. Platí

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X_n > 96) &= 1 - \mathsf{P}(X_n \le 96) = 1 - F_{\mathrm{Bi}(400;0,2)}(96) \\ &\doteq 1 - 0{,}97861 = 0{,}02139.\end{aligned}$$

Vidíme, že v tomto případě je rozdíl mezi přesným a přibližným výpočtem v řádu tisícin. ○

Příklad 2. Hodíme 420 krát pravidelnou šestistrannou hrací kostkou a sčítáme výsledky hodů. Odhadněte pravděpodobnost, že součet bude ležet mezi hodnotami 1400 a 1550.

Řešení. Označme X_i náhodnou veličinu, která udává hodnotu, která padla na kostce v i-tém hodu, $i = 1, 2, \ldots, 420$. Potom náhodná veličina $X = \sum_{i=1}^{420} X_i$ značí součet hodnot, které padly v 420 hodech kostkou. Veličiny X_i můžeme považovat za nezávislé. Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny X_i jsou rovny

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5;\\ &\mathsf{E}(X_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6};\\ &\mathrm{var}(X_i) = \frac{91}{6} - (3{,}5)^2 = \frac{35}{12}.\end{aligned}$$

Hledanou pravděpodobnost $\mathsf{P}(1400 \le X \le 1550)$ spočteme pomocí centrální limitní věty. Pro výpočet potřebuje znát střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(X) &= \sum_{i=1}^{420} \mathsf{E}(X_i) = 420 \cdot 3{,}5 = 1470;\\ \mathrm{var}(X) &= \sum_{i=1}^{420} \mathrm{var}(X_i) = 420 \cdot \frac{35}{12} = 1225 = (35)^2.\end{aligned}$$

Potom podle centrální limitní věty platí, že normovaná náhodná veličina

$$U = \frac{X - \mathsf{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} = \frac{X - 1470}{35}$$

má přibližně normované normální rozdělení. Odtud

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(1400 \le X \le 1550) &= \mathsf{P}\left(\frac{1400-1470}{35} \le \frac{X-1470}{35} \le \frac{1550-1470}{35}\right)\\ &= \mathsf{P}\left(-2 \le U \le \frac{16}{7}\right) \doteq \Phi\left(\frac{16}{7}\right) - \Phi(-2) = \Phi\left(\frac{16}{7}\right) - [1-\Phi(2)]\\ &\doteq 0{,}98886 + 0{,}97725 - 1 = 0{,}96611.\end{aligned}$$

○

ПШП

1. Pravděpodobnost, že se anketní lístek vrátí vyplněný, je 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že ze 160 rozeslaných se jich vrátí alespoň 100 vyplněných? Kolik jich je třeba rozeslat, aby se tato pravděpodobnost zvýšila na 0,99?

   [0,98078 (přesný výpočet bez aproximace 0,98303); 163 lístků]

2. Jaká je pravděpodobnost, že při 100 hodech pravidelnou kostkou padne šestka nejvýše dvacetkrát?

   [0,81327 (přesný výpočet bez aproximace 0,84811)]

3. Dvěstěkrát hodíme mincí. Jaká je pravděpodobnost, že podíl líců bude větší než 0,55?

   [0,07927 (přesný výpočet bez aproximace 0,06868)]

4. Kolikrát nejméně musíme hodit pravidelnou kostkou, aby s pravděpodobností alespoň 0,995 padla šestka alespoň desetkrát?

   [125 hodů]

5. Sledovaný jev se vyskytuje s pravděpodobností 0,2. Jaký je nejmenší počet nezávislých pokusů, aby s pravděpodobností alespoň 0,95 při nich sledovaný jev nastal alespoň desetkrát?

   [80 pokusů]

6. Výška mužů (určitého věku) je náhodná veličina se střední hodnotou 180 cm a směrodatnou odchylkou 10 cm. Určete pravděpodobnost, že průměrná výška 100 náhodně vybraných mužů bude v intervalu od 175 cm do 185 cm.

   [0,9999994]

7. Hmotnost jedné součástky v kilogramech je náhodná veličina se střední hodnotou 5 kg a směrodatnou odchylkou 3 kg. Každá součástka je zabalena do krabice o hmotnosti 2 kg. Určete pravděpodobnost, že auto naložené 150 takovými (plnými) krabicemi bude přetížené, je-li maximální možné zatížení auta 1100 kg.

   [0,08679]

8. Náhodná veličina X označující počet dětí ve školním věku v jedné rodině má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 0{,}8$. Ve městě bydlí 10 000 rodin. Jaký počet míst ve školách bude postačovat s pravděpodobností alespoň 0,95, předpokládáme-li, že všechny děti chodí do školy v obci, ve které bydlí?

   [8148 míst]

9. Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce utržit. Letadlo má 216 míst, ale ví se, že zhruba 5 % lidí se k odletu nedostaví. Kolik může společnost prodávat letenek na jeden let, chce-li držet pravděpodobnost, že se k odletu dostaví více než 216 lidí pod hladinou 0,1?

   [222 letenek]

Poznámka. Výsledky příkladů v této kapitole se mohou drobně lišit v závislosti na zaokrouhlení dílčích výpočtů a použití tabulek nebo softwaru pro výpočty hodnot distribuční funkce.

Literatura

[1] Budíková, M., Mikoláš, Š., Osecký, P.: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika. Sbírka příkladů.* Masarykova Univerzita, Brno, 2004.

[2] Bušek, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Prometheus, Praha, 2002.

[3] Friesl, M.: *Posbírané příklady z pravděpodobnosti a statistiky, verze 2004-09-03* [online]. Plzeň [cit. 7.4.2020], dostupné z `https://home.zcu.cz/~friesl/Archiv/PosbPsa.pdf`.

[4] Hebák, P., Kahounová, J.: *Počet pravděpodobnosti v příkladech.* Informatorium, Praha, 2005.

[5] Helisová, K., Korbelář, M., Navara, M., Novotný, M.: *Sbírka příkladů z pravděpodobnosti a matematické statistiky* [online]. ČVUT, Praha 2016 [cit. 7.4.2020]. Dostupné z `https://math.feld.cvut.cz/novotny/1617/PMS/Sbirka.pdf`.

[6] Hron, K., Kunderová, P., Vencálek, O.: *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky.* Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2018.

[7] Lichnovský, L.: *Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti: náhodný jev.* Bakalářská práce. Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2012.

[8] Lupienski, D.: *Sbírka řešených příkladů z pravděpodobnosti: náhodná veličina.* Bakalářská práce. Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2017.

Doc. RNDr. Karel Hron, Ph.D.
Doc. RNDr. Eva Fišerová, Ph.D.

Sbírka příkladů z pravděpodobnosti

Výkonný redaktor: Mgr. Miriam Delongová
Odpovědný redaktor: Bc. Otakar Loutocký
Technická redakce: autoři

Publikace neprošla redakční a jazykovou úpravou ve vydavatelství.

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
www.vydavatelstvi.upol.cz
www.e-shop.upol.cz
vup@upol.cz

1. vydání
Olomouc 2020
ISBN 978-80-244-5805-2 (online: PDF)
VUP 2020/0340