



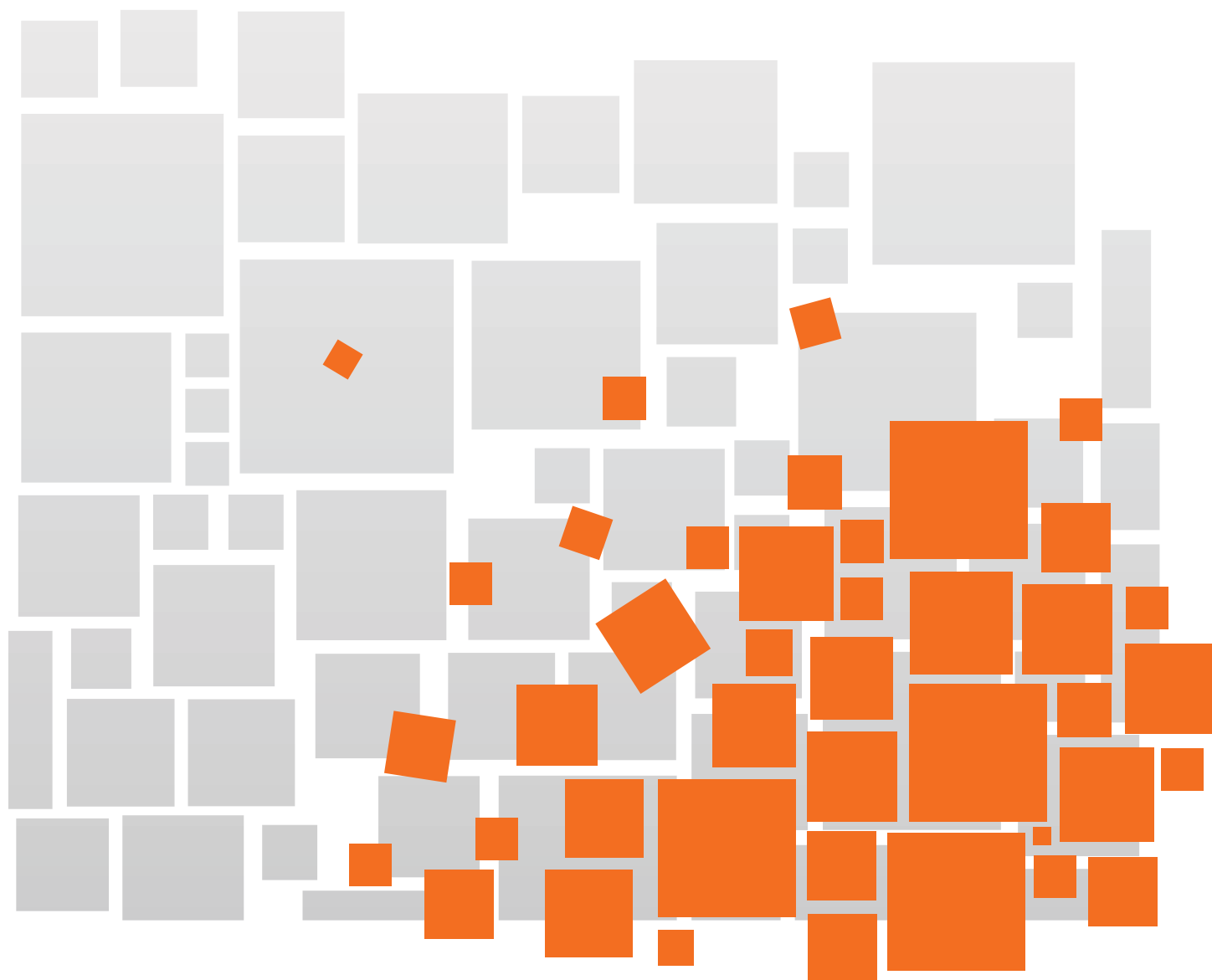
Přírodovědecká
fakulta

Univerzita Palackého
v Olomouci

CO BUDE NA PÍSEMCE?

Aneb sbírka příkladů ke kurzu Matematika 1

Iveta Bebčáková, Pavla Kouřilová



Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Co bude na písemce?

Aneb sbírka příkladů ke kurzu Matematika 1

Iveta Bebčáková
Pavla Kouřilová

Olomouc 2020

Oponenti

Mgr. Jana Burkotová, Ph.D.

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

1. vydání

Neoprávněné užití tohoto díla je porušením autorských práv a může zakládat občanskoprávní, správněprávní, popř. trestněprávní odpovědnost.

© Iveta Bebčáková, Pavla Kouřilová, 2020

© Univerzita Palackého v Olomouci, 2020

ISBN 978-80-244-5854-0 (online: PDF)

Milí čtenáři,

předkládáme Vám sbírku příkladů, se kterými se setkávali studenti kurzu KMA/M1N Matematika 1 v nejrůznějších písemných testech na cestě za zápočtem či zkouškou. Kurz byl vyučován na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci primárně pro obory Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví a Aplikovaná statistika. Jednalo se o jeden ze základních kurzů, které studenti prvních ročníků zmíněných oborů museli absolvovat.

Měly jsme tu čest po dlouhých 15 let v tomto kurzu přednášet a cvičit a dělaly jsme to s láskou. Každý rok jsme vytvářely několik sad písemných testů s nejrůznějšími typy zápočtových a zkuškových úloh. Za ta léta se příklady nastrádaly a nám přišlo líto je dále schovávat ve stole, v šanonech či v počítačových souborech, na které se časem zapomene. Proto jsme s radostí využily možnost tyto příklady vydat v podobě sbírky.

Sbírka obsahuje ty nejzajímavější úlohy z posledních několika let, které jsme pro studenty vytvořily a uspořádaly do tematických celků. Sbírka obsahuje tři hlavní kapitoly. První kapitolu tvoří zadání vybraných úloh rozdělených podle jednotlivých temat a ve druhé kapitole najdou čtenáři jejich výsledky. Třetí kapitola je tvořena podrobně řešenými příklady. Některé úlohy z první kapitoly (příklady označené hvězdičkou) jsou zde vzorově vyřešeny, přičemž jednotlivé kroky řešení jsou detailně vysvětleny a okomentovány. Převážná většina příkladů je však ponechána bez takto podrobného řešení a představují tak pro čtenáře možnost najít si svou vlastní cestu řešení a těšit se z nově nabyté dovednosti.

Věříme, že touto sbírkou trochu pomůžeme (nejen) studentům, kteří nemají tu odvalu položit přímo v přednáškové místnosti před všemi svými vrstevníky tu zásadní otázku: *Co bude na písemce?*

Hodně štěstí a zábavy při řešení!

Iveta Bebčáková a Pavla Kouřilová

Autorky děkují recenzentům Mgr. Janě Burkotové, Ph.D. a Mgr. Zdenku Halasovi, DiS., Ph.D. za podrobné přečtení rukopisu a cenné připomínky a v neposlední řadě také Z. Vápeníkové, K. Králové a K. Drastichové za pomoc při kontrole správnosti výsledků u neřešených příkladů.

PS: Podobná sbírka pokrývající příklady z písemek k navazujícímu kurzu KMA/M2N Matematika 2 vyšla v roce 2018 pod názvem *Co bylo na písemce? Sbírka příkladů ke kurzu Matematika 2*.

Publikace vznikla za podpory projektu OP VVV s názvem Univerzita Palackého jako komplexní vzdělávací instituce, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002337.

Obsah

Přehled použitého značení	6
1 Zadání příkladů	7
1.1 Algebraické výrazy	7
1.2 Nerovnice	7
1.3 Výroky	8
1.4 Operace s množinami	8
1.5 Vlastnosti množin v $\mathbb{R}$	9
1.6 Definiční obor funkce jedné proměnné	11
1.7 Definiční obor funkce dvou proměnných	12
1.8 Parita funkce	14
1.9 Inverzní funkce	17
1.10 Limita	19
1.11 Vlastnosti funkce	23
1.12 Derivace funkce	24
1.13 Stacionární body funkce	26
1.14 Průběh funkce	27
1.15 Primitivní funkce	29
2 Výsledky neřešených příkladů	36
2.1 Algebraické výrazy	36
2.2 Nerovnice	36
2.3 Výroky	37
2.4 Operace s množinami	38
2.5 Vlastnosti množin v $\mathbb{R}$	41
2.6 Definiční obor funkce jedné proměnné	45
2.7 Definiční obor funkce dvou proměnných	46
2.8 Parita funkce	65
2.9 Inverzní funkce	67
2.10 Limita	71
2.11 Vlastnosti funkce	74
2.12 Derivace funkce	75
2.13 Stacionární body funkce	79
2.14 Průběh funkce	80
2.15 Primitivní funkce	128
3 Řešené příklady	135

Přehled použitého značení

$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
$\min A$	minimum množiny A
$\max A$	maximum množiny A
$\inf A$	infimum množiny A
$\sup A$	supremum množiny A
A°	vnitřek množiny A
hA	hranice množiny A
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
A'	množina všech hromadných bodů množiny A
D_f	definiční obor funkce f
f'	první derivace funkce jedné proměnné f
f''	druhá derivace funkce jedné proměnné f
f^{-1}	funkce inverzní k funkci f
P_x, P_y	průsečíky grafu funkce s osou x , resp. y
SB	množina všech stacionárních bodů funkce
IB	inflexní bod funkce
NB	nulový bod funkce
l.min.	lokální minimum funkce
l.max.	lokální maximum funkce
F	primitivní funkce k funkci f
PP	metoda <i>per partes</i>
PZ	metoda rozkladu na parciální zlomky

1 Zadání příkladů

1.1 Algebraické výrazy

Stanovte podmínky, pro něž má výraz V smysl, a výraz zjednodušte.

$$1. V = \left(x - \frac{3x}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$2. V = \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2 - ab}{(a-b)^2}\right) : \frac{1}{a-b}$$

$$3. V = \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right) : \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$4. V = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right)$$

$$5. V = \left(\frac{a-1}{a-2} - \frac{a}{a-1}\right) \cdot \left(a - \frac{3a}{a+1}\right)$$

$$6. V = \frac{x^2 - 1}{x+y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x+1} \cdot \left(x + \frac{x}{x-1}\right)$$

1.2 Nerovnice

Vyřešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

$$1. \frac{2x+3}{x-1} \leq 3$$

$$2. \frac{x+3}{2x-1} > 1$$

$$3. \frac{4-3x}{3+x} < -1$$

$$4. \frac{5+x}{x-3} \geq 2$$

$$5. \frac{4x-7}{x+2} \geq 2$$

$$6. \frac{2-3x}{1-x} < 1$$

$$7. \frac{3-x}{x+5} \leq 2$$

$$8. \frac{x+2}{3x-1} > 2$$

$$9. |x-2| - 1 \geq \left| -\frac{x}{2} \right|$$

$$10. |3x+1| - |x-2| + 1 < 0$$

11. $3x - |3x| + |11 - x| < 1$
12. $|2 - 7x| - 3x \geq |x + 4|$
13. $x + |7x - 2| \leq |3 + x|$
14. $3|x + 1| - |3x + 2| < 0$

1.3 Výroky

Výrok запиšte slovně a symbolicky ho negujte.

1. $\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad \exists z \in \mathbb{Z} : (z \text{ je sudé}) \Rightarrow (x \cdot y = 2z)$
2. $\exists p \in \mathbb{R}_0^- \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad \exists n \in \mathbb{N} : (p \cdot q \geq 0) \wedge (n = p - q)$
3. $\forall z \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{N} : \left(y = \frac{z}{m}\right) \vee (y > m)$
4. $\exists q \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall m \in \mathbb{R}_0^+ : (n \text{ je liché}) \wedge (q \cdot m \neq n)$
5. $\exists m \in \mathbb{Q} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall x \in \mathbb{Z} : (m \cdot y = x) \wedge \left(\frac{y}{z} \in \mathbb{Q}\right)$
6. $\forall q \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \exists p \in \mathbb{Q}_0^- : (p \cdot q \text{ je dělitelné } 3) \vee (p - q \geq z)$
7. $\exists z \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : (z + x \text{ je liché}) \vee (z + x = 2n)$
8. $\forall p \in \mathbb{R}^- \quad \exists q \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{Z} : (p > q \cdot y) \wedge (q \leq y)$
9. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists z \in \mathbb{Z} : (x > n) \Rightarrow (x \cdot z = 3)$
10. $\exists q \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}_0 : (n \text{ je liché}) \wedge (q \cdot m = n)$
11. $\exists z \in \mathbb{Z}_0^- \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} : \left(y = \frac{z}{m}\right) \vee (y > m)$
12. $\forall p \in \mathbb{R}_0^- \quad \exists q \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} : (p \cdot q < 0) \vee (n = p - q)$

1.4 Operace s množinami

Dané množiny A a B co nejjednodušeji запиšte, určete $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ a zakreslete množinu $A \times B$.

1. $A = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 - 9 < 0\} \setminus \{0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^+; x \leq 3\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}_0; x \leq 3\}$
3. $A = \{x \in \mathbb{Z}_0^-; x \geq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 \leq 0\} \cup \{2\}$
4. $A = \{x \in \mathbb{R}^-; -x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; |x - 1| < 3\}$
5. $A = \{x \in \mathbb{R}^+; -x > -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}^+; |x - 1| < 2\}$
6. $A = \{x \in \mathbb{N}_0; x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}_0^+; |x + 1| \leq 3\}$
7. $A = \{x \in \mathbb{N}_0; x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^+; |x - 2| < 1\}$

8. $A = \{x \in \mathbb{R}_0^-; |x| \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; 4 > x^2\}$
9. $A = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 < 4\} \setminus \{0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^+; x \leq 2\}$
10. $A = \{x \in \mathbb{R}^-; -x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; |x - 1| < 2\}$

1.5 Vlastnosti množin v $\mathbb{R}$

Množinu M co nejjednodušeji zapište (pomocí intervalů); určete $\min M$, $\max M$, $\inf M$ a $\sup M$; určete M° , $\text{h}M$, $\overline{M}$, M' a množinu izolovaných bodů množiny M .

- * 1. $M = \{x \in \mathbb{Z}^+; \log_3 x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 1 - x^2 > 0\}$
2. $M = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x + 2 \neq 0\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^-; 2^x \geq \frac{1}{4}\right\}$
3. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; x^2 - 2x - 3 \leq 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \cos x = 0\}$
4. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+; x^2 < 16\} \cup \{x \in \mathbb{Z}; |x - 1| < 3\}$
5. $M = \{x \in \mathbb{R}; |x - 1| \leq 2\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}^+; 1 - x^2 \leq 0\}$
6. $M = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Z}^-; |x + 1| = 2\}$
7. $M = \{x \in \mathbb{R}; e^{x-3} \leq 1\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}; |x - 2| < 1\}$
8. $M = \{x \in \mathbb{R}; \ln(x - 2) \neq 0\}$
9. $M = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -1\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}; x^2 < 1\}$
10. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^-; 3 \geq |x - 1|\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}; x > -2\}$
11. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; |x| \leq 2\} \setminus \{x \in \mathbb{N}; x < 4\}$
12. $M = \{x \in \mathbb{R}; x < 1\} \setminus \{x \in \mathbb{N}_0; x \leq 5\}$
13. $M = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2, x < 4\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}; 2 < x < 8\}$
14. $M = \{x \in \mathbb{R}; |x - 3| \leq 1\} \setminus \{x \in \mathbb{N}; |x - 3| \leq 1\}$
15. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+; |x - 2| < 4\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 8x = 0\}$
16. $M = \{x \in \mathbb{R}; 1 < x^2 < 9\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 4 \geq 0\}$
17. $M = \{x \in \mathbb{N}; \sqrt{x} < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x < 0\}$
18. $M = \{x \in \mathbb{Z}^-; |x - 1| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}; \ln x > 0\}$
19. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; x^2 - 4 \leq 0\} \setminus \{x \in \mathbb{N}; x < 2\}$
20. $M = \{x \in \mathbb{Z}^-; x^2 < 5\} \cup \{x \in \mathbb{R}^+; x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$
21. $M = \{x \in \mathbb{R}; |x - 4| \leq 5\} \setminus \{x \in \mathbb{N}; x^2 - 6x - 7 = 0\}$
22. $M = \{x \in \mathbb{R}; |x - 3| > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; \ln x \geq 0\}$
23. $M = \{x \in \mathbb{Z}; \arcsin x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}; |x + 3| < 2\}$

24. $M = \{x \in \mathbb{Z}; \ln x \leq 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}_0^-; x^2 < \frac{1}{4}\right\}$
25. $M = \{x \in \mathbb{R}^-; |x + 1| > 2\} \cap \{x \in \mathbb{R}; (x + 4)^2 > 0\}$
26. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^-; x^2 + 4x - 5 > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; |x + 6| > 0\}$
27. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+; x^2 - 2x - 3 < 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \ln x = 0\}$
28. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; x^2 - 4 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Z}^-; |x - 1| < 3\}$
29. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+; x^2 - 2x - 3 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; \log_5 x \neq 2\}$
30. $M = \{x \in \mathbb{N}; |x - 1| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$
31. $M = \{x \in \mathbb{R}^-; |x - 1| < 3\} \cup \left\{x \in \mathbb{R}; \arcsin \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{2}\right\}$
32. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; |x - 2| \leq 5\} \cap \{x \in \mathbb{R}; \ln x \neq 1\}$
33. $M = \{x \in \mathbb{R}; \log x \leq 2\} \setminus \{x \in \mathbb{N}; x^2 - 4x + 3 < 0\}$
34. $M = \left\{x \in \mathbb{R}^+; \frac{1}{10^x} \geq 0,01\right\} \cup \{x \in \langle 0, 2\pi \rangle; \cos x = -1\}$
35. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; 3^{x-5} \leq 9\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \cos x = 1\}$
36. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^-; 2^{x+10} > 16\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \cos x = -1\}$
37. $M = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + x - 6 \leq 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^-; x > \log(0,001)\}$
38. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; 5^{-x} \geq 0,2\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}; \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
39. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; 3 \cdot 2^{-x} \geq 0,75\} \cup \{x \in \mathbb{Z}^+; \log_3 x \leq 1\}$
40. $M = \{x \in \mathbb{R}; |x - 4| \leq 2\} \setminus \left\{x \in \mathbb{R}; 0,0002 < \frac{2}{10^x} < \frac{1}{50}\right\}$
41. $M = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq 2^x \leq 16\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \sin x > 0\}$
42. $M = \{x \in \mathbb{R}; 0,5 \leq 2^{-x+1} < 16\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 4 > 0\}$
43. $M = \{x \in \mathbb{R}_0^+; 54 - 2 \cdot 3^x > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0\}$
44. $M = \{x \in \mathbb{R}^-; |x - 3| \leq 7\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \sin x = 0\}$
45. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; x^2 - 2x - 3 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0\}$
46. $M = \{x \in \mathbb{R}^-; x^2 + 3x - 4 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x \neq \log(0,001)\}$
47. $M = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| < 2\} \setminus \{x \in \mathbb{Z}; 16 - 10x + x^2 < 0\}$
48. $M = \{x \in \mathbb{R}; 4x^2 + 3x - 1 \geq 0\} \setminus \{x \in \mathbb{R}; e^{2x} > \sqrt{e}\}$
49. $M = \{x \in \mathbb{R}^+; x^2 - 4 \leq 0\} \setminus \{x \in \mathbb{N}; x < 2\}$
50. $M = \{x \in \mathbb{R}; -1 < \log x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}; |x - 6| \geq 4\}$

1.6 Definiční obor funkce jedné proměnné

Určete a pomocí intervalů запиšte maximální definiční obor funkce f .

$$1. f(x) = \frac{\cos \sqrt{6+x-x^2}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$2. f(x) = \sqrt{\frac{2}{4-x^2}} - \ln(x+1)$$

$$3. f(x) = \frac{\log(3-2x)}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$4. f(x) = \frac{e^{-2x}}{\log(2x-x^2)}$$

$$5. f(x) = \sqrt[4]{\frac{3}{4-x^2}} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(1+x)$$

$$6. f(x) = \frac{3^{7x-2}}{\ln \sqrt[3]{2x-x^2}}$$

$$7. f(x) = \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\ln \sqrt{1-x}}$$

$$8. f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x - 3 \sin x}{x^2 + \pi^2}$$

$$9. f(x) = \frac{\arccos(2x+2)}{\sin(x+1)} \cdot \sqrt{4-x^2}$$

$$10. f(x) = \frac{\ln(3x-2)}{\sqrt[3]{x^2-5x+6}} - \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$11. f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\log_3(3-x)} + \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1}$$

$$12. f(x) = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(16-x^2)}{\sqrt{5x-x^2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$$

$$*13. f(x) = \frac{\arcsin(2x-1)}{\sqrt{x^2-x+1}} \cdot e^{\sqrt{3x-1}}$$

$$14. f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + 3}{\ln(4-x^2)}$$

$$15. f(x) = \frac{3 + \arccos\left(\frac{x}{3}\right)}{1 - e^{\frac{5x}{x-3}}}$$

$$16. f(x) = \frac{\log_3(4+3x-x^2) + 2}{\operatorname{arctg}\left(\frac{3x}{x-2}\right)}$$

$$17. f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-4}\right)$$

$$18. f(x) = \arcsin(\ln(x^2 - 4))$$

$$19. f(x) = \frac{\ln|x-3|}{x^2-1}$$

$$20. f(x) = \arctg\left(\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$$

$$21. f(x) = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{x-2}\right)}$$

$$22. f(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{x-1}{x^2-3}\right)\right)$$

$$23. f(x) = \frac{\sin(\cos x)}{1 - \sin(x^2)}$$

1.7 Definiční obor funkce dvou proměnných

Určete, запиšte a zakreslete maximální definiční obor funkce f .

$$* \quad 1. f(x, y) = \frac{\sqrt{2-x-x^2} \cdot \sin(x-y^2)}{\log_2(2-x^2-y^2)}$$

$$2. f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y^2+x^2-1}}{\sqrt[4]{4-x^2-y} \cdot (1-\log_2(2x+y))}$$

$$3. f(x, y) = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(2-|y-3|)}{2-\sqrt{y-x^2}} \cdot e^{2x-y}$$

$$4. f(x, y) = \frac{1+\ln(2-x^2-y^2)}{\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[4]{2x+2y-1}}$$

$$5. f(x, y) = \frac{\log_2(3-x-y)}{\sqrt{y-2-x^2}}$$

$$6. f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}} - \ln((x-1)^2 + y^2 - 4)$$

$$7. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4) + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$8. f(x, y) = \frac{\sqrt{2-y-x^2}}{\sqrt[3]{y-x+1}}$$

$$9. f(x, y) = \frac{\sqrt{2-x^2-(y+1)^2}}{|x|+y}$$

$$10. f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2)}$$

$$11. f(x, y) = \frac{\log(x^2-y^2)}{xy}$$

$$12. f(x, y) = \ln(x(x^2 + y^2 - 9))$$

$$13. f(x, y) = \frac{1 - \log(x^2 + y^2 - 16)}{x \cdot \sqrt{y^2 - 4}}$$

$$14. f(x, y) = \frac{\ln(1 - xy)}{y^2 - xy}$$

$$15. f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{\ln(4 - y^2)}{x(x^2 + 9)}} + \sqrt{4 - x^2 - y}$$

$$16. f(x, y) = \sqrt{1 - \ln(x^2 + y^2)} \cdot \frac{1}{1 - |x| - y}$$

$$17. f(x, y) = \log(x^2 + (y - 1)^2 - 1) \cdot \left(\sqrt{9 - |x| - y} + \sqrt{x^2 y} \right)$$

$$18. f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg}(x + 3)}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} + \arcsin(x^2)$$

$$19. f(x, y) = \frac{5}{y} \ln \left(\frac{x - y^2 - 1}{x + y^2 + 1} \right)$$

$$20. f(x, y) = \arcsin(x^2) + \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{x - y}$$

$$21. f(x, y) = 5^{\sqrt{3-x}} \cdot \left(\sqrt{x - y^2 + 1} - \arcsin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$22. f(x, y) = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 1}}{\sqrt[4]{x-y+1}} - \ln \left(-\frac{x}{y} \right)$$

$$23. f(x, y) = \frac{\sqrt{xy \sin \left(\frac{\pi}{2} \right)} \cdot \arccos(x - y) + \log(1 - y - x^2)}{1 + x^2}$$

$$24. f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}{\frac{\pi^2}{4}} + \arcsin^2 \left(\frac{x + y}{2} \right)$$

$$25. f(x, y) = \frac{\log(2 - |y| - x)}{\sqrt[6]{y^2 + (x + 2)^2 - 1}} \cdot \arcsin \left(\frac{x^2}{4} \right)$$

$$26. f(x, y) = \frac{\arcsin \left(\frac{x^2 + y^2}{16} \right)}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 - 1}} + \ln \left(\frac{(x+2)^2 + (y-2)^2 - 1}{x - y} \right)$$

$$27. f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - 4)}{\sqrt{|y| - x^2 - 1}} + \arcsin \left(\frac{y}{8} \right)$$

$$28. f(x, y) = \arccos \left(\frac{(y-9)^2}{9} \right) - \frac{\ln(3 + y - |x|)}{\sqrt{x^2 + y - 9}}$$

$$29. f(x, y) = \log_{\frac{1}{2}}(4 - y^2 - x^2) - \sqrt[4]{-xy} + \sqrt{|x| - |y| + 1}$$

30. $f(x, y) = \frac{\log\left(y - \log_{\frac{1}{2}} x\right)}{\sqrt[4]{(x-2)^2 + y^2}} + \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$
31. $f(x, y) = \frac{\arccos\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\sqrt[4]{4-x^2-3x}} + \log(4x^2 + 4y^2 - 1)$
32. $f(x, y) = \sqrt{y - x^2 - 5} + \log(y^2 - 6y - 7) + \arcsin\left(\frac{y-9}{3x}\right) + 5^{x^2-1}$
33. $f(x, y) = \sqrt{1 - \ln(x+2)} + \sqrt{3}\log(x^2 + 4x + 3) - \pi \arcsin\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} y\right)$
34. $f(x, y) = \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{(x-2)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{9 - x^2 - y} + \arccos\left(\frac{y-x}{3}\right)$
35. $f(x, y) = \sqrt{|x| - y^2} + \frac{\log(9 - x^2)}{(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 1)^2}$
36. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - |x| + 1} - \sqrt[4]{3 + 2y - y^2}}{\ln(x^2 + (y-3)^2 - 1)}$
37. $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{y-2x-1}{5}\right) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + y - 4) - \sqrt{5 + 4y - y^2}$
38. $f(x, y) = \frac{\log(3 + 2y - y^2)}{\sqrt[8]{1 - |x| - y}} + \left(\frac{\pi^2}{4} - \arcsin^2\left(\frac{x}{y^2 + 1}\right)\right)^{-2}$

1.8 Parita funkce

Určete maximální definiční obor a vyšetřete paritu funkce f .

- * 1. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x - 2 \sin x}}{x^2 - 1}$
2. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - x^2}}$
3. $f(x) = \frac{x^3 - x}{2 + \cos x}$
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{4 - \cos^2 x}}$
5. $f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos x}{x^2 + 2x^4}$
6. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{4 - x^2}}$
7. $f(x) = \frac{\sqrt[4]{16 - x^2}}{\sin^2 x}$
8. $f(x) = \frac{\ln(16 - x^2)}{\sqrt[3]{\cos x}}$

9. $f(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}{1-x^2}$
10. $f(x) = \frac{\sqrt[4]{49-x^2}}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
11. $f(x) = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\arcsin\left(\frac{x}{4}\right)}$
12. $f(x) = \frac{\sqrt[5]{3\sin x - 2x}}{1-x^2}$
13. $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$
15. $f(x) = x \ln|x|$
16. $f(x) = \frac{5^{-x} + 5^x}{x}$
17. $f(x) = \sin(\cos x)$
18. $f(x) = \frac{x}{\ln(5-x^2)}$
19. $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x}$
20. $f(x) = x \ln(4-x^2)$
21. $f(x) = \frac{x^3}{\sin x}$
22. $f(x) = \frac{\ln(x^2+9)}{x}$
23. $f(x) = \frac{x \sin(1-x^2)}{\cos x}$
24. $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\arccos(x^2)}$
25. $f(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}$
26. $f(x) = \ln(\cos 2x)$
27. $f(x) = \frac{\sin 2x}{3^x + 3^{-x}}$
28. $f(x) = \frac{x - \sin 2x}{x^2 - 1}$

29. $f(x) = \frac{\cos^3(2x)}{x - x^3}$
30. $f(x) = \frac{3x - \sin 5x}{x^3 + x}$
31. $f(x) = \frac{\sin(2x) - x^2}{\ln(1 - x^2)}$
32. $f(x) = \frac{\cos 3x \cdot \sin x}{\sqrt{1 - x^2}}$
33. $f(x) = \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2 + 1}$
34. $f(x) = e^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg} x$
35. $f(x) = \frac{x \cdot \sin(\cos x)}{x^2 - 1}$
36. $f(x) = \frac{\sin\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\log(1 - x^2)}$
37. $f(x) = \frac{x \cdot \cos(\sin x)}{x^2 - 9}$
38. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
39. $f(x) = \sin(e^{-x} - e^x)$
40. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x - 3 \sin x}{x^2 + 1}$
41. $f(x) = \frac{\cos 3x}{\log(x^2 - 9)}$
42. $f(x) = \frac{\cos(2^x - 2^{-x})}{2^x - 2^{-x}}$
43. $f(x) = \sin(x - \arcsin x)$
44. $f(x) = \frac{\cos x - \sin^2 x}{1 - \cos x}$
45. $f(x) = \frac{2^{2-x^2}}{\sin x \cdot \cos x}$
46. $f(x) = \frac{\cos^3(\sin^2(x^3))}{\operatorname{arctg} 2x}$
47. $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2} \cdot \sin(\sqrt[5]{x})}{x \cdot \operatorname{arctg}(x^2 + 1)}$
48. $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{5}{7}x\right) - x^3}{\sin 8x}$

$$49. f(x) = \frac{x^3 - \operatorname{tg} x}{x^2}$$

$$50. f(x) = \frac{\cos(x - \sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$51. f(x) = \frac{x - \sin x}{\cos^2 x}$$

$$52. f(x) = \frac{\sin(\cos x)}{1 - \sin(x^2)}$$

$$53. f(x) = \log \left(\frac{x+3}{x-3} \right)$$

$$54. f(x) = \ln^2 \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$$

$$55. f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\ln(x^2)}$$

$$56. f(x) = \ln |\cos x|$$

1.9 Inverzní funkce

Pro funkci f určete maximální interval, na němž je prostá, a na tomto intervalu určete funkci f^{-1} inverzní k funkci f (včetně $D_{f^{-1}}$).

- * 1. $f(x) = 1 - 2 \sin(3x + 2)$
- 2. $f(x) = 4 + 3 \arccos(5 - 2x)$
- 3. $f(x) = 2 - 3 \arcsin(1 + 3x)$
- 4. $f(x) = 3 + 2 \cos(5 - 2x)$
- 5. $f(x) = 3 - 2 \cos(2x + 5)$
- 6. $f(x) = 2 + 3 \arcsin(1 - 3x)$
- 7. $f(x) = 3 + 4 \cos(2x - 1)$
- 8. $f(x) = 3 - 2 \operatorname{arctg}(1 - 4x)$
- 9. $f(x) = 5 + 4 \ln(2 - 3x)$
- 10. $f(x) = 2 \sin(1 - 3x) + 1$
- 11. $f(x) = 4 - 7 \cdot 3^{x+2}$
- 12. $f(x) = 5 + 2 \operatorname{tg}(x - 4)$
- 13. $f(x) = 5 + 7 \cos(2 - 4x)$
- 14. $f(x) = 1 - 2 \ln \left(\frac{x}{3} \right)$
- 15. $f(x) = 4 + 2 \sin(2x - 6)$

16. $f(x) = 5 + 4 \ln(x - 2)$
17. $f(x) = 5 + 4 \operatorname{tg}(x - 2)$
18. $f(x) = 4 + 8 \sin(2 - x)$
19. $f(x) = 7 - 2 \cos(x + 3)$
20. $f(x) = 12 + 6 \cdot e^{2x-1}$
21. $f(x) = 5 + \cos(1 - 4x)$
22. $f(x) = 4 + 5 \cdot e^{2x+\pi}$
23. $f(x) = 9 - \frac{1}{4} \operatorname{tg}(2x + 3)$
24. $f(x) = 5 + \frac{1}{4} \log_7(6 - 9x)$
25. $f(x) = 1 + \frac{2}{3^{3x+1}}$
26. $f(x) = 9 - \frac{1}{4} \cos(2x + 3^4)$
27. $f(x) = 5 - 3 \operatorname{tg}(2x + 1)$
28. $f(x) = 2 - 7 \log(2 - 4x)$
29. $f(x) = 4 - 2^{x+4}$
30. $f(x) = 5 + 3 \sin\left(\frac{2-x}{7}\right)$
31. $f(x) = 4 - 2 \cos\left(\frac{x-3}{2}\right)$
32. $f(x) = 2 - 3 \operatorname{cotg}\left(\frac{4x-1}{5}\right)$
33. $f(x) = \frac{5}{2} - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}$
34. $f(x) = 5 - 3 \cos\left(\frac{3}{x}\right)$
35. $f(x) = 5 - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 3^x\right)$
36. $f(x) = 7 - 2 \log_5(4 - 3x)$
37. $f(x) = 5 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \log_3 x\right)$
38. $f(x) = 3 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \log_{\frac{1}{2}} x\right)$
39. $f(x) = 2 - 3 \operatorname{tg}(5 - 4e^{2x})$

$$40. f(x) = 5 + 4 \ln \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x - 2 \right)$$

$$41. f(x) = 5 + 2 \log_5 (\pi + e^{-x})$$

$$42. f(x) = 2 - 4 \cos \left(\pi - \frac{1}{5^x} \right)$$

1.10 Limita

Vypočítejte limitu funkce jedné proměnné.

$$* \quad 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x-1)^2)}{x^2 - 1}$$

$$* \quad 2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^{1-x}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_{\frac{1}{7}}(x+7)}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3^{x-3}}{1 - \sqrt{x-1}}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{3 - \sqrt{8-x}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sin(\pi(x-2))}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^4 - 16}$$

15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{3+x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^3}{\sqrt{3x} - \sqrt{3}}$
17. $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{2 \sin(x+7)}{5x^2 + 35x}$
18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\log_5 \left(-\frac{1}{x} + 5\right)}$
19. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - \sqrt{x}}$
20. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{\operatorname{tg}(-2x - 4)}$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \left(1 - \frac{1}{x}\right)$
22. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2}{\sin x}$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{\ln^2 x}$
24. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\ln(\sin x)}$
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\ln(x^2 + 1)}$
26. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{\ln(x^2)}{x^2 - e}$
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \ln x$
28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x}}{(x-1)^2}$
29. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln x}{\sin 2x}$
30. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin x}$
31. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
32. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\cos \left(\frac{x}{2}\right)}$
33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\sin 5x}$

34. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x}{(x-2)^2}$
35. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{5}{x-1}}$
36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \cdot \sin(x^2)}$
37. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\frac{3}{4}\pi - \frac{x}{2}}$
38. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{\sin(\pi x)}$
39. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
40. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \ln \left(\frac{3x}{1+3x} \right)$
41. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left(\frac{\ln \left(x + \frac{1}{2} \right)}{1 - \cos x} \right)$
42. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{\ln(5x + e) - 1}$
43. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x}{\sin(x-3)^2}$
44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\ln(1-x^2)}$
45. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right)$
46. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x}}{(x-1)^2}$
47. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{-x}}{\ln(x-1)}$
48. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \ln(1-x)$
49. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x+1}}{\sin(e^{-x})}$
50. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \cos(\pi x)}$
51. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \ln(x^2 - 4)$
52. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos x}{x^2 - 9}$

53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{3\pi-x}{2}\right)}{1 - \cos 2x}$
54. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln(5-x)}$
55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x \cos x}$
56. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{4 - x^2}$
57. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
58. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x}$
59. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{-x}}{x^2 - 4x + 4}$
60. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cos\left(\frac{1 + \pi x}{2x}\right)$
61. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} \ln(3x)$
62. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt[3]{1-x}}{1 + \cos x}$
63. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \ln x$
64. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\arcsin x}{\ln((x+1)^2 + 1)}$
65. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^3 \ln\left(\frac{100}{(1-x)^2}\right)$
66. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{\sin(\pi x)}$
67. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\ln(\sin x)}$
68. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{5 - 5^x}$
69. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 6}{\ln(1-x)}$
70. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} \ln(x^2 - 1)$
71. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{2x}{1+2x}\right)$

$$72. \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x+3} \ln \left(\frac{2x}{3+2x} \right)$$

$$73. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3^{-x}}{1 + \cos x}$$

$$74. \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x - 3) \ln(x - x^2)$$

$$75. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{x^3 - 8}}$$

$$76. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{-3}}{x^2(4 - x^2)}$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \ln \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)$$

$$79. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e} \right)^{x^2} (x^3 - x^2)$$

$$80. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x+3}}{x^3 - 6}$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{e^{-x}}{1 - \log x}$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(10 - x) - x}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$83. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^5} e^{1-x^2}$$

$$84. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin x}$$

$$85. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{\cos \left(\frac{x}{2} \right)}$$

$$86. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - 3}{1 + \cos x}$$

1.11 Vlastnosti funkce

Pro funkci f určete maximální D_f , paritu, limity v nevlastních bodech a v bodech nespojitosti a průsečíky se souřadnicovými osami.

$$* \quad 1. \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$2. \quad f(x) = \ln \left(\frac{3 - 2x}{1 - x} \right)$$

$$3. f(x) = \frac{\sin(2-x)}{2^x - 1}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{\log_4(1-x^2)}$$

$$5. f(x) = \log_3(x^2 - 2)$$

$$6. f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-7}{2x+1}}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{x} \sin \sqrt{x+2}$$

$$8. f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x+3}}$$

$$9. f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$10. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$11. f(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$$

$$12. f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

1.12 Derivace funkce

Určete derivaci funkce f ; určete D_f a $D_{f'}$.

$$* \quad 1. f(x) = 6 \ln^2 \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) + 5^{\cos \pi}$$

$$2. f(x) = e^{\frac{x^2}{3-x}}$$

$$3. f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + \sin \frac{\pi}{3}$$

$$4. f(x) = \ln^3 \left(\frac{x+1}{2-x} \right) + \sqrt[3]{\pi}$$

$$5. f(x) = \frac{e^x \cos 2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$6. f(x) = \frac{\ln \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$7. f(x) = e^{\log 4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$$

$$8. f(x) = \ln \left(\sin(\pi e^3) \cdot \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)$$

9. $f(x) = \frac{\sqrt{\cos \sqrt{\pi} \cdot \sin x}}{\sin \sqrt{x}}$
10. $f(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{\sin 3}}$
11. $f(x) = \sqrt{\frac{\cos(\pi - 1) \cdot \cos(\ln x)}{x}}$
12. $f(x) = 5 \sqrt[5]{\frac{\sin x + 1}{1 - 2x^2}} + \log\left(\frac{\pi}{2}\right)$
13. $f(x) = 3 \sqrt[3]{\frac{\cos x - 2}{1 - 4x^3}} + e^{-3\pi} \sin 1$
14. $f(x) = 3x^2 \sqrt{\ln\left(\frac{1}{3x}\right)}$
15. $f(x) = 4x \sin \sqrt{4x + 1}$
16. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right) - \cos(\sqrt[3]{e})$
17. $f(x) = \sin(e^3) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$
18. $f(x) = \sin \sqrt{e} + \frac{x \sqrt[3]{2x + 1}}{(x + 1)^2}$
19. $f(x) = (\pi - 1)^3 - \frac{e^{-x^2}(x + 2)}{(2x + 1)^2}$
20. $f(x) = \frac{e^{-x}(x + 2)}{(2x + 2)^2} - \sqrt{\frac{2}{e^3}}$
21. $f(x) = \frac{e^x(3x + 1)}{3 \sqrt[3]{x^2}} + \sin(e^{-2})$
22. $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x}{(2x + 1)^2}}$
23. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{8}{x^2(1 - 2x)^4}}$
24. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x - x^2}}{(4 - 5x)^2} + \sqrt{e^3}$
25. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\sin \sqrt{\pi}}}{\sqrt[3]{x^2}}$
26. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{(3x + 1)^2} - \sin \sqrt{\pi}$

$$27. f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-3x}}{(2x-5)^2} + 4 \ln(\pi^2 - 1)$$

$$28. f(x) = \sin^2(\sqrt[3]{x-3}) - \ln\left(\frac{2x-9}{4-x^2}\right)$$

$$29. f(x) = \ln\left(\frac{1-\sqrt[4]{x}}{3x-2}\right)$$

$$30. f(x) = \ln\left(\frac{16-2\sqrt[3]{x}}{2+x^2}\right)$$

$$31. f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{(2-5x)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$32. f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)}$$

$$33. f(x) = \sqrt[3]{\frac{e^{x^2}-4}{\ln(x^2)}}$$

$$34. f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{(x-3)^2}$$

1.13 Stacionární body funkce

Pro danou funkci f určete maximální definiční obor a stacionární body.

$$* \quad 1. f(x) = \frac{3x^2-4}{(1-2x)^2}$$

$$2. f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(2x-1)^2}$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt[3]{5x-1}}{(x-1)^2}$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{(1-3x)^2}$$

$$5. f(x) = \frac{\sqrt[3]{1-2x^2}}{(1-3x)^2}$$

$$6. f(x) = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$$

$$7. f(x) = \frac{\sqrt[3]{4-3x^2}}{(x^2-1)^4}$$

$$8. f(x) = \ln^2(x^2-8x-9) - \ln(1+\ln^2(x^2-8x-9))$$

$$9. f(x) = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$10. f(x) = \frac{e^{x^2}}{(2x - 1)^2}$$

1.14 Průběh funkce

Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf.

$$1. f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$2. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$3. f(x) = \frac{e^x}{x + 2}$$

$$4. f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$5. f(x) = e^{\frac{1}{x^2 - 1}}$$

$$6. f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

$$7. f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 4}$$

$$8. f(x) = \ln \left(\frac{x}{2x - 4} \right)$$

$$9. f(x) = e^{-x} \sin x$$

$$10. f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$$

$$11. f(x) = \sqrt[3]{x^2} e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$12. f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$* 13. f(x) = (3 - x)e^{\frac{1}{x}}$$

$$14. f(x) = e^{-\frac{1}{x-3}}$$

$$15. f(x) = e^{\frac{x-3}{x+1}}$$

$$16. f(x) = \ln(1 - x^3)$$

$$17. f(x) = 1 - \frac{1}{\ln(x^2)}$$

$$18. f(x) = 3 + \frac{e^{2x-5}}{(x-1)^2}$$

$$19. f(x) = \frac{x}{\ln\left(\frac{x^4}{16}\right)}$$

$$20. f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 2x + 1)}$$

$$21. f(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)$$

$$22. f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$$

$$23. f(x) = \frac{2x^3}{1 - x^2}$$

$$24. f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 1}$$

$$25. f(x) = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}}$$

$$26. f(x) = \frac{2x - x^3}{x^2 - 1}$$

$$27. f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^3}$$

$$28. f(x) = \ln\left(\frac{x}{x - 4}\right)$$

$$29. f(x) = \frac{e^{x-3}}{x + 1}$$

$$30. f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$$

$$31. f(x) = \frac{e^{-x}}{2x + 2}$$

$$32. f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$33. f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x + 1}}$$

$$34. f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$35. f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$$

$$36. f(x) = \sqrt[3]{1 - e^{3x}}$$

$$37. f(x) = \ln^2(x - 2)$$

$$38. f(x) = \frac{x^3(3x + 4)}{(x + 1)^3}$$

$$39. f(x) = e^{\frac{2}{x}}(2 - x)$$

$$40. f(x) = e^{-\frac{1}{2x-2}}$$

$$41. f(x) = \ln \left(\frac{3x}{1+x} \right)$$

$$42. f(x) = \frac{e^x}{4-x}$$

$$43. f(x) = e^{\frac{1}{x^2-4}}$$

$$44. f(x) = 1 - e^{-\frac{(x-4)^2}{9}}$$

$$45. f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$46. f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$47. f(x) = (1-x)^2 e^{-x}$$

$$48. f(x) = \frac{8-x^3}{x}$$

$$49. f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$$

1.15 Primitivní funkce

Vypočítejte integrály; promyslete, na kterém intervalu/intervalech primitivní funkci počítáme.

$$* \quad 1. \int x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$2. \int \frac{(x+1)(x^2+2x)}{(x^2+2x+3)^2} \, dx$$

$$* \quad 3. \int \frac{1-x^2}{x^2-2x-8} \, dx$$

$$4. \int 3x^2 \ln(x^2) \, dx$$

$$5. \int \frac{\sin x}{9 - \cos^2 x} \, dx$$

$$6. \int \frac{4-x^2+x^3}{x^2-3x-18} \, dx$$

$$7. \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$8. \int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} \, dx$$

$$9. \int \frac{x-2x^2}{x^3-3x^2+3x-1} \, dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx$$

11. $\int \ln(x^2 + 1) \, dx$
12. $\int \frac{4x^3 - 2}{(x - 1)(x^2 + 9)} \, dx$
13. $\int x^2 \cos(4x - 1) \, dx$
14. $\int \frac{2x - x^2}{(x + 3)\sqrt{x + 3}} \, dx$
15. $\int x \cos^2(5x) \, dx$
16. $\int \frac{2 - 2x^3 + 2x^2}{(1 - x)^2(1 + x^2)} \, dx$
17. $\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx$
18. $\int e^{-2x} \sin 3x \, dx$
19. $\int \frac{x^3 - 18x^2 - 41}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2)} \, dx$
20. $\int \frac{3x}{\cos^2(x + 3)} \, dx$
21. $\int \sqrt{1 - 4x^2} \, dx$
22. $\int \frac{4x^3 + 7x^2 + x + 2}{x^4 + x^2} \, dx$
23. $\int \frac{3x - x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x - 2)} \, dx$
24. $\int \frac{5}{9 + x^2} \, dx$
25. $\int \frac{\ln \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}} \, dx$
26. $\int \frac{1}{\sqrt{5 - x^2}} \, dx$
27. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$
28. $\int \frac{4x^2 - 7x + 2}{x^3 - 2x^2} \, dx$
29. $\int \frac{1}{\pi + x^2} \, dx$

30. $\int x^2 e^{2x} \, dx$
31. $\int \frac{2x^2 + 2x - 1}{x(x+1)^2} \, dx$
32. $\int \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2(x-1)} \, dx$
33. $\int \frac{\cos x}{5 + \sin^2 x} \, dx$
34. $\int e^{3x} \sin(5x + 1) \, dx$
35. $\int \frac{x^2 + 3x - 9}{x(x^2 - 6x + 9)} \, dx$
36. $\int \frac{1}{-4x^2 - 2} \, dx$
37. $\int \frac{\arcsin(\ln x)}{x} \, dx$
38. $\int x^2 \sin(3x + 3) \, dx$
39. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}(1+x)} \, dx$
40. $\int \frac{7x^2 - 25x + 20}{x^3 - 4x^2 + 4x} \, dx$
41. $\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} \, dx$
42. $\int (3x + 1) \ln(7x) \, dx$
43. $\int \frac{3x^3 - 20x^2 + 27x - 6}{(x^2 + 3)(x - 3)^2} \, dx$
44. $\int \frac{1}{x\sqrt{3x-2}} \, dx$
45. $\int \frac{1}{x - 6\sqrt{x} + 14} \, dx$
46. $\int 2x^3 \cos(1 - 5x) \, dx$
47. $\int \frac{5x^3 + 17x^2 + 20x - 1}{(x+2)^2(3x^2+1)} \, dx$
48. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 24x + 16}{(x-2)^2(x^2+4)} \, dx$

- *49. $\int \frac{e^{4x}}{e^{8x} - 6e^{4x} + 18} dx$
50. $\int e^{2x} \sin 5x dx$
51. $\int \frac{-x^4 + 6x^3 - x^2 - 9x - 10}{(x^2 + 1)^2 (2x - 3)} dx$
52. $\int \frac{3}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} dx$
53. $\int \cos(2x - 1) \sin(3x) dx$
54. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 8} dx$
55. $\int \frac{25 - 31x - 9x^2 - x^3}{(x + 3)^2 (3x^2 + 5)} dx$
56. $\int \ln^2(3 - 5x) dx$
57. $\int \frac{x}{\cos^2(2x)} dx$
58. $\int \frac{\sqrt{3}}{x^2 - 6x + 12} dx$
59. $\int \frac{3x^3 - 8x^2 - 3x - 4}{(2x^2 + 1)(x^2 - 1)} dx$
60. $\int \frac{3x}{2 \cos^2(5x)} dx$
61. $\int \frac{5}{3x\sqrt{1 + \ln x}} dx$
62. $\int \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 20}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4)} dx$
63. $\int \frac{5}{\sqrt{4 - x^2 - 4x}} dx$
64. $\int x^2 \operatorname{arctg} 2x dx$
65. $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$
66. $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 4x + 5}{5x^2 + 4x^3 + x^4} dx$
67. $\int \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

68. $\int \frac{3 + 4x}{x^2 - 8x + 20} \, dx$
69. $\int \frac{6x^3 - 21x^2 + 20x - 10}{(x - 2)^2 (x^2 + 2)} \, dx$
70. $\int \frac{5}{50 + x^2 - 10x} \, dx$
71. $\int \frac{8 + 12x - x^2 + 3x^3}{x^3 + 4x} \, dx$
72. $\int \frac{2x^7 - 12x^6 + 24x^5 + x^2 - 9x + 24}{x^3 - 6x^2 + 12x} \, dx$
73. $\int \frac{4 + x^2 - 4x^4}{2x^3 + x} \, dx$
74. $\int e^x \arcsin(e^x) \, dx$
75. $\int \frac{2}{x^2 - 4x + 7} \, dx$
76. $\int \frac{2x^2 + 7x + 8}{x^3 + 2x^2 + 4x} \, dx$
77. $\int (x^2 - 3x) \sin(1 - 2x) \, dx$
78. $\int \frac{1}{4x^2 + x + 1} \, dx$
79. $\int 3x \ln(1 - x^2) \, dx$
80. $\int \frac{3x^3 + 10x^2 + 11x + 4}{(3 + x)^2 (1 + x^2)} \, dx$
81. $\int 2x \cos^2(3x) \, dx$
82. $\int \frac{x}{x^2 + 6x + 18} \, dx$
83. $\int \frac{4x^2 - 19x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, dx$
84. $\int \arctg(3x + 1) \, dx$
85. $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} \, dx$
86. $\int 4x^2 \cos(1 - 3x) \, dx$

87. $\int \frac{3}{2x^2 - 8x + 14} dx$
88. $\int \frac{5x^3 - 11x^2 - 10x + 3}{x^3 - 3x^2} dx$
89. $\int x \operatorname{arctg} (1 - 2x^2) dx$
90. $\int \frac{2}{4x^2 + 4x + 3} dx$
91. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 7x - 7}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 3)} dx$
92. $\int \frac{x + 1}{x^2 - 6x + 13} dx$
93. $\int \frac{2x - 3}{\cos^2 x} dx$
94. $\int \frac{x^2 + 9x}{(x + 4)(x^2 + 4)} dx$
95. $\int \frac{x + \operatorname{tg} \sqrt{x}}{5\sqrt{x}} dx$
96. $\int \frac{3x^2 + 26x + 55}{(x + 4)^3} dx$
97. $\int \frac{6x^3 + 27x + 81}{(x^3 + 3x^2)(9 + x^2)} dx$
98. $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$
99. $\int \frac{2x^2 + 4 - x^4}{x^5 + 2x^3} dx$
100. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}(4 + x)} dx$
101. $\int 3x \ln (1 - x^2) dx$
102. $\int \frac{e^{3x}}{5 + e^{6x}} dx$
103. $\int \frac{x^3 - 6x^2 - 3x - 4}{(3 + x^2)(x - 1)^2} dx$
104. $\int x \sin \sqrt{x} dx$
105. $\int \frac{1 - 2x^2}{x(4 + x^2)} dx$

$$106. \int \frac{x^2 - 4}{x^3 + 4x} dx$$

$$107. \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$$

$$108. \int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x} dx$$

$$109. \int \frac{2 + x - x^2}{x^2 + 3x - 4} dx$$

$$110. \int \frac{\arcsin(\ln x)}{3x} dx$$

$$111. \int \frac{1 - x^2}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$112. \int \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

$$113. \int \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx$$

$$114. \int \frac{5x^2 - 1}{x(2x - 1)} dx$$

$$115. \int e^{2x} \cos(e^x \pi) dx$$

2 Výsledky neřešených příkladů ¹

2.1 Algebraické výrazy

1. $V = \frac{-x}{x^2 - 1}$; podm.: $x \neq \pm 1, x \neq 2$
2. $V = \frac{-2ab}{a + b}$; podm.: $a \neq \pm b$
3. $V = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; podm.: $x \neq \pm y$
4. $V = \frac{x}{x - y}$; podm.: $x \neq \pm y$
5. $V = \frac{a}{a^2 - 1}$; podm.: $a \neq \pm 1, a \neq 2$
6. $V = x^2(x - y)$; podm.: $x \neq \pm 1, x \neq -y$

2.2 Nerovnice

1. $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 6, \infty)$
2. $x \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$
3. $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$
4. $x \in (3, 11\rangle$
5. $x \in (-\infty, -2) \cup \left\langle \frac{11}{2}, \infty\right)$
6. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
7. $x \in (-\infty, -5) \cup \left\langle -\frac{7}{3}, \infty\right)$
8. $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$
9. $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 6, \infty)$
10. $x \in (-1, 0)$
11. $x \in (-\infty, -2) \cup (10, 12)$
12. $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{11}\right\rangle \cup \langle 2, \infty)$

¹Všechny grafy níže ve výsledcích jsou pouze ruční náčrtky. Tvar jednotlivých křivek proto nemusí být vždy dokonale přesný a z praktických důvodů také není občas dodrženo stejné měřítko na obou souřadnicových osách.

$$13. x \in \left\langle -\frac{1}{7}, \frac{5}{7} \right\rangle$$

$$14. x \in \left(-\infty, -\frac{5}{6} \right)$$

2.3 Výroky

1. Pro všechna přirozená čísla x a všechna kladná reálná čísla y existuje celé číslo z takové, že pokud z je sudé, pak platí $x \cdot y = 2z$.
Negace: $\exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R}^+ \quad \forall z \in \mathbb{Z} : (z \text{ je sudé}) \wedge (x \cdot y \neq 2z)$
2. Existuje nekladné reálné číslo p takové, že ke každému celému číslu q existuje přirozené číslo n takové, že $p \cdot q \geq 0$ a zároveň $n = p - q$.
Negace: $\forall p \in \mathbb{R}_0^- \quad \exists q \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} : (p \cdot q < 0) \vee (n \neq p - q)$
3. Ke každému celému nezápornému číslu z existuje reálné číslo y a existuje přirozené číslo m takové, že $y = \frac{z}{m}$ nebo $y > m$.
Negace: $\exists z \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N} : \left(y \neq \frac{z}{m} \right) \wedge (y \leq m)$
4. Existuje přirozené číslo q a existuje celé kladné číslo n takové, že pro všechna nezáporná reálná čísla m platí, že n je liché a zároveň $q \cdot m \neq n$.
Negace: $\forall q \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \exists m \in \mathbb{R}_0^+ : (n \text{ není liché}) \vee (q \cdot m = n)$
5. Existuje racionální číslo m takové, že pro všechna nezáporná reálná čísla y a všechna celá čísla x platí $m \cdot y = x$ a zároveň $\frac{y}{z}$ je racionální číslo.
Negace: $\forall m \in \mathbb{Q} \quad \exists y \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists x \in \mathbb{Z} : (m \cdot y \neq x) \vee \left(\frac{y}{z} \notin \mathbb{Q} \right)$
6. Ke každému přirozenému číslu q a každému reálnému číslu z existuje nekladné racionální číslo p takové, že $p \cdot q$ je dělitelné číslem 3 nebo $p - q \geq z$.
Negace: $\exists q \in \mathbb{N} \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{Q}_0^- : (p \cdot q \text{ není dělitelné } 3) \wedge (p - q < z)$
7. Existuje nezáporné celé číslo z a existuje reálné číslo x takové, že pro všechna přirozená čísla n platí, že číslo $z + x$ je liché nebo $z + x = 2n$.
Negace: $\forall z \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : (z + x \text{ není liché}) \wedge (z + x \neq 2n)$
8. Ke každému zápornému reálnému číslu p existuje přirozené číslo q takové, že pro všechna celá čísla y platí $p > q \cdot y$ a zároveň $q \leq y$.
Negace: $\exists p \in \mathbb{R}^- \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{Z} : (p \leq q \cdot y) \vee (q > y)$
9. Ke každému kladnému reálnému číslu x existuje přirozené číslo n a existuje celé číslo z tak, že pokud $x > n$, pak $x \cdot z = 3$.
Negace: $\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{Z} : (x > n) \wedge (x \cdot z \neq 3)$
10. Existuje kladné celé číslo q takové, že ke každému přirozenému číslu n existuje číslo m z množiny $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že n je liché a zároveň $q \cdot m = n$.
Negace: $\forall q \in \mathbb{Z}^+ \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0 : (n \text{ není liché}) \vee (q \cdot m \neq n)$
11. Existuje nekladné celé číslo z a existuje reálné číslo y takové, že pro všechna přirozená čísla m platí $y = \frac{z}{m}$ nebo $y > m$.
Negace: $\forall z \in \mathbb{Z}_0^- \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{N} : \left(y \neq \frac{z}{m} \right) \wedge (y \leq m)$

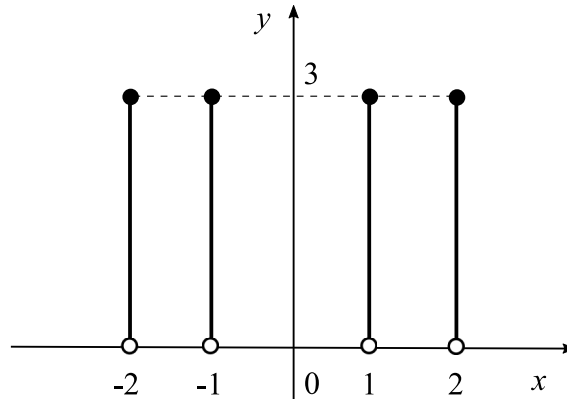
12. Ke každému nekladnému reálnému číslu p existuje celé číslo q takové, že pro všechna přirozená čísla n platí $p \cdot q < 0$ nebo $n = p - q$.

Negace: $\exists p \in \mathbb{R}_0^- \quad \forall q \in \mathbb{Z} \quad \exists n \in \mathbb{N} : (p \cdot q \geq 0) \wedge (n \neq p - q)$

2.4 Operace s množinami

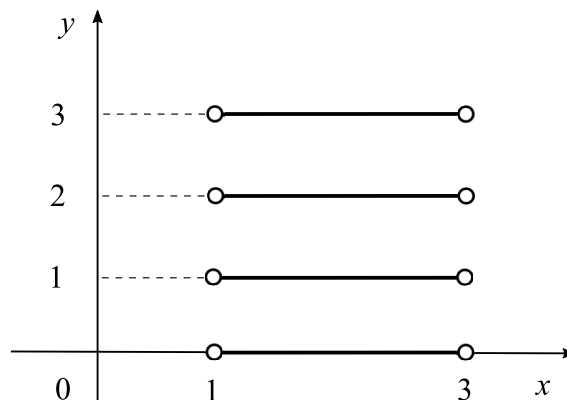
1. $A = \{-2, -1, 1, 2\}$, $B = (0, 3)$

$$A \cup B = \{-2, -1\} \cup (0, 3), A \cap B = \{1, 2\}, A \setminus B = \{-2, -1\}, B \setminus A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$$



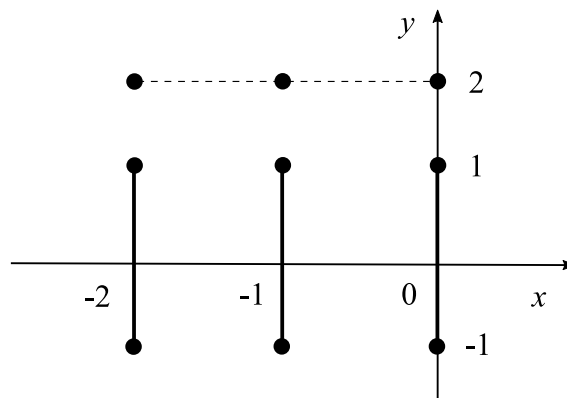
2. $A = (1, 3)$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$

$$A \cup B = \{0\} \cup \langle 1, 3 \rangle, A \cap B = \{2\}, A \setminus B = (1, 2) \cup (2, 3), B \setminus A = \{0, 1, 3\}$$

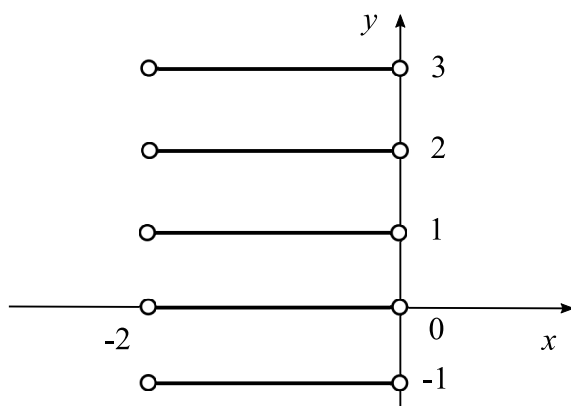


3. $A = \{-2, -1, 0\}$, $B = \langle -1, 1 \rangle \cup \{2\}$

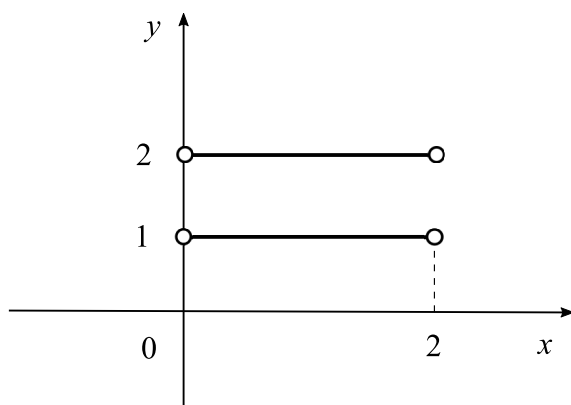
$$A \cup B = \langle -1, 1 \rangle \cup \{-2, 2\}, A \cap B = \{-1, 0\}, A \setminus B = \{-2\}, B \setminus A = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \{2\}$$



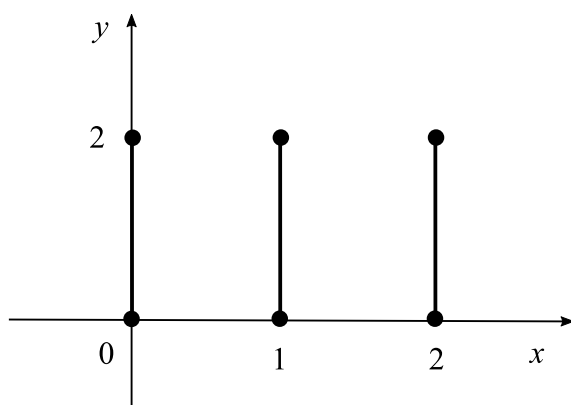
4. $A = (-2, 0)$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
 $A \cup B = (-2, 0) \cup \{1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{-1\}$, $A \setminus B = (-2, -1) \cup (-1, 0)$, $B \setminus A = \{0, 1, 2, 3\}$



5. $A = (0, 2)$, $B = \{1, 2\}$
 $A \cup B = (0, 2) \cup \{2\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = (0, 1) \cup (1, 2)$, $B \setminus A = \{2\}$

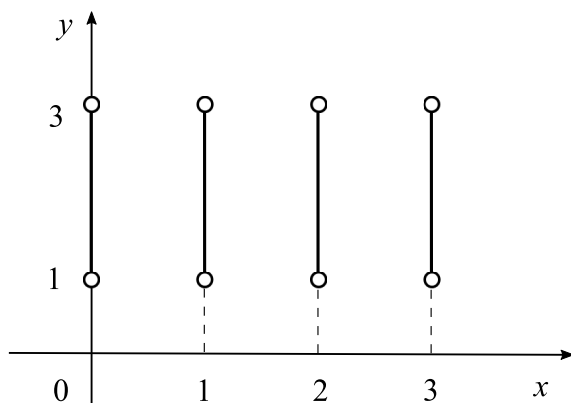


6. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \langle 0, 2 \rangle$
 $A \cup B = \langle 0, 2 \rangle$, $A \cap B = \{0, 1, 2\}$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = (0, 1) \cup (1, 2)$



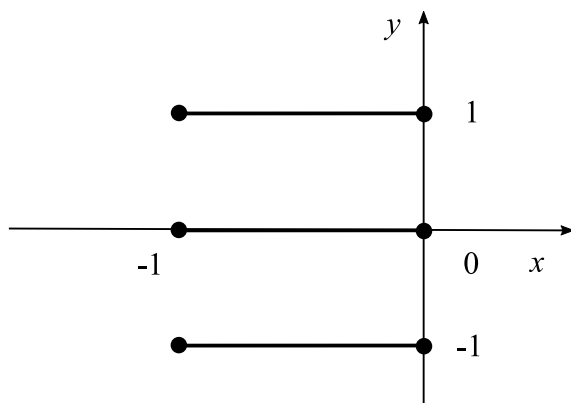
7. $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = (1, 3)$

$A \cup B = \{0\} \cup \langle 1, 3 \rangle$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{0, 1, 3\}$, $B \setminus A = (1, 2) \cup (2, 3)$



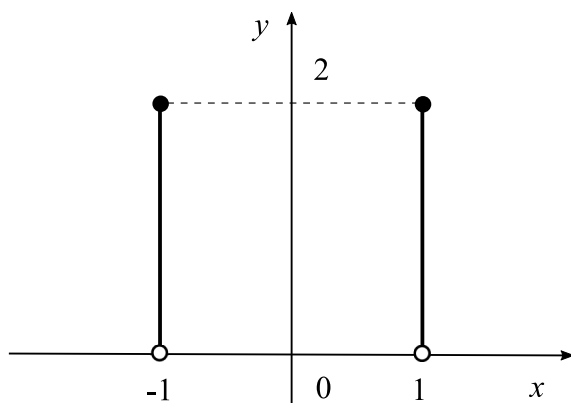
8. $A = \langle -1, 0 \rangle$, $B = \{-1, 0, 1\}$

$A \cup B = \langle -1, 0 \rangle \cup \{1\}$, $A \cap B = \{-1, 0\}$, $A \setminus B = (-1, 0)$, $B \setminus A = \{1\}$

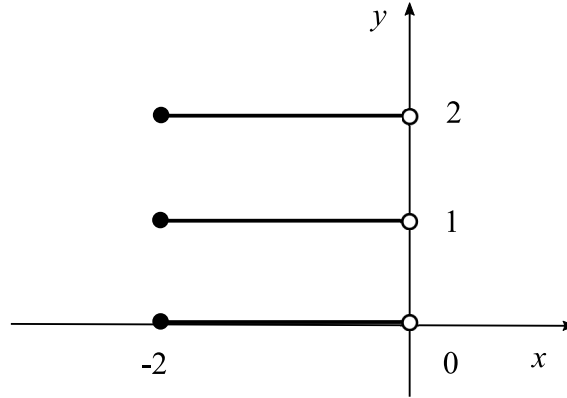


9. $A = \{-1, 1\}$, $B = (0, 2)$

$A \cup B = \{-1\} \cup (0, 2)$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{-1\}$, $B \setminus A = (0, 1) \cup (1, 2)$



10. $A = \langle -2, 0 \rangle$, $B = \{0, 1, 2\}$
 $A \cup B = \langle -2, 0 \rangle \cup \{1, 2\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = \langle -2, 0 \rangle$, $B \setminus A = \{0, 1, 2\}$



2.5 Vlastnosti množin v $\mathbb{R}$

1. $M = (-1, 1) \cup \{2\}$
 $\min M = neex.$, $\max M = 2$, $\inf M = -1$, $\sup M = 2$
 $M^\circ = (-1, 1)$, $hM = \{-1, 1, 2\}$, $\overline{M} = \langle -1, 1 \rangle \cup \{2\}$, $M' = \langle -1, 1 \rangle$,
mn.izol.bodů $M = \{2\}$
2. $M = (-2, -1) \cup (-1, 0)$
 $\min M = neex.$, $\max M = neex.$, $\inf M = -2$, $\sup M = 0$
 $M^\circ = M$, $hM = \{-2, -1, 0\}$, $\overline{M} = M' = \langle -2, 0 \rangle$, mn.izol.bodů $M = \emptyset$
3. $M = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
 $\min M = neex.$, $\max M = 3$, $\inf M = 0$, $\sup M = 3$
 $M^\circ = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, $hM = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 3\right\}$, $\overline{M} = \langle 0, 3 \rangle$, $M' = \langle 0, 3 \rangle$, mn.izol.bodů $M = \emptyset$
4. $M = \{-1\} \cup \langle 0, 4 \rangle$
 $\min M = -1$, $\max M = neex.$, $\inf M = -1$, $\sup M = 4$
 $M^\circ = \langle 0, 4 \rangle$, $hM = \{-1, 0, 4\}$, $\overline{M} = \{-1\} \cup \langle 0, 4 \rangle$, $M' = \langle 0, 4 \rangle$, mn.izol.bodů $M = \{-1\}$
5. $M = \langle -1, 1 \rangle \cup (1, 2) \cup (2, 3)$
 $\min M = -1$, $\max M = neex.$, $\inf M = -1$, $\sup M = 3$
 $M^\circ = (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$, $hM = \{-1, 1, 2, 3\}$, $\overline{M} = \langle -1, 3 \rangle$, $M' = \langle -1, 3 \rangle$,
mn.izol.bodů $M = \emptyset$
6. $M = \{-3\} \cup \langle -2, 0 \rangle$
 $\min M = -3$, $\max M = 0$, $\inf M = -3$, $\sup M = 0$
 $M^\circ = \langle -2, 0 \rangle$, $hM = \{-3, -2, 0\}$, $\overline{M} = M$, $M' = \langle -2, 0 \rangle$, mn.izol.bodů $M = \{-3\}$
7. $M = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$
 $\min M = neex.$, $\max M = 3$, $\inf M = neex.$, $\sup M = 3$
 $M^\circ = (-\infty, 2) \cup (2, 3)$, $hM = \{2, 3\}$, $\overline{M} = (-\infty, 3]$, $M' = (-\infty, 3]$, mn.izol.bodů $M = \emptyset$
8. $M = (2, 3) \cup (3, \infty)$
 $\min M = neex.$, $\max M = neex.$, $\inf M = 2$, $\sup M = neex.$
 $M^\circ = M$, $hM = \{2, 3\}$, $\overline{M} = \langle 2, \infty \rangle$, $M' = \langle 2, \infty \rangle$, mn.izol.bodů $M = \emptyset$

9. $M = \langle -1, 0 \rangle \cup (0, \infty)$
 $\min M = -1, \max M = neex., \inf M = -1, \sup M = neex.$
 $M^\circ = (-1, 0) \cup (0, \infty), hM = \{-1, 0\}, \overline{M} = \langle -1, \infty \rangle, M' = \langle -1, \infty \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
10. $M = \langle -2, -1 \rangle \cup (-1, 0)$
 $\min M = -2, \max M = neex., \inf M = -2, \sup M = 0$
 $M^\circ = (-2, -1) \cup (-1, 0), hM = \{-2, -1, 0\}, \overline{M} = \langle -2, 0 \rangle, M' = \langle -2, 0 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
11. $M = (0, 1) \cup (1, 2)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = 0, \sup M = 2$
 $M^\circ = (0, 1) \cup (1, 2), hM = \{0, 1, 2\}, \overline{M} = \langle 0, 2 \rangle, M' = \langle 0, 2 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
12. $M = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = neex., \sup M = 1$
 $M^\circ = M, hM = \{0, 1\}, \overline{M} = (-\infty, 1), M' = (-\infty, 1), \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
13. $M = \langle 2, 3 \rangle \cup (3, 4)$
 $\min M = 2, \max M = neex., \inf M = 2, \sup M = 4$
 $M^\circ = (2, 3) \cup (3, 4), hM = \{2, 3, 4\}, \overline{M} = \langle 2, 4 \rangle, M' = \langle 2, 4 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
14. $M = (2, 3) \cup (3, 4)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = 2, \sup M = 4$
 $M^\circ = M, hM = \{2, 3, 4\}, \overline{M} = \langle 2, 4 \rangle, M' = \langle 2, 4 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
15. $M = \langle 0, 6 \rangle \cup \{8\}$
 $\min M = 0, \max M = 8, \inf M = 0, \sup M = 8$
 $M^\circ = (0, 6), hM = \{0, 6, 8\}, \overline{M} = \langle 0, 6 \rangle \cup \{8\}, M' = \langle 0, 6 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{8\}$
16. $M = (-3, -1) \cup (1, 3)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = -3, \sup M = 3$
 $M^\circ = M, hM = \{-3, -1, 1, 3\}, \overline{M} = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle, M' = \overline{M}, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
17. $M = (0, 1) \cup \{2, 3\}$
 $\min M = neex., \max M = 3, \inf M = 0, \sup M = 3$
 $M^\circ = (0, 1), hM = \{0, 1, 2, 3\}, \overline{M} = \langle 0, 1 \rangle \cup \{2, 3\}, M' = \langle 0, 1 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{2, 3\}$
18. $M = \{-1\} \cup (1, \infty)$
 $\min M = -1, \max M = neex., \inf M = -1, \sup M = neex.$
 $M^\circ = (1, \infty), hM = \{-1, 1\}, \overline{M} = \{-1\} \cup \langle 1, \infty \rangle, M' = \langle 1, \infty \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{-1\}$
19. $M = (0, 1) \cup (1, 2)$
 $\min M = neex., \max M = 2, \inf M = 0, \sup M = 2$
 $M^\circ = (0, 1) \cup (1, 2), hM = \{0, 1, 2\}, \overline{M} = \langle 0, 2 \rangle, M' = \langle 0, 2 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
20. $M = \{-2, -1\} \cup (0, 4)$
 $\min M = -2, \max M = 4, \inf M = -2, \sup M = 4$
 $M^\circ = (0, 4), hM = \{-2, -1, 0, 4\}, \overline{M} = \{-2, -1\} \cup \langle 0, 4 \rangle, M' = \langle 0, 4 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{-2, -1\}$
21. $M = \langle -1, 7 \rangle \cup (7, 9)$
 $\min M = -1, \max M = 9, \inf M = -1, \sup M = 9$
 $M^\circ = (-1, 7) \cup (7, 9), hM = \{-1, 7, 9\}, \overline{M} = \langle -1, 9 \rangle, M' = \langle -1, 9 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$

22. $M = \langle 1, 3 \rangle \cup (3, \infty)$
 $\min M = 1, \max M = neex., \inf M = 1, \sup M = neex.$
 $M^\circ = (1, 3) \cup (3, \infty), hM = \{1, 3\}, \overline{M} = \langle 1, \infty \rangle, M' = \langle 1, \infty \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
23. $M = (-5, -1) \cup \{1\}$
 $\min M = neex., \max M = 1, \inf M = -5, \sup M = 1$
 $M^\circ = (-5, -1), hM = \{-5, -1, 1\}, \overline{M} = \langle -5, -1 \rangle \cup \{1\}, M' = \langle -5, -1 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{1\}$
24. $M = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \{1\}$
 $\min M = neex., \max M = 1, \inf M = -\frac{1}{2}, \sup M = 1$
 $M^\circ = \left(-\frac{1}{2}, 0\right), hM = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}, \overline{M} = \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle \cup \{1\}, M' = \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{1\}$
25. $M = (-\infty, -3) \setminus \{-4\}$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = neex., \sup M = -3$
 $M^\circ = M, hM = \{-3, -4\}, \overline{M} = (-\infty, -3), M' = (-\infty, -3), \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
26. $M = (-\infty, -6) \cup (-6, -5)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = neex., \sup M = -5$
 $M^\circ = M, hM = \{-6, -5\}, \overline{M} = (-\infty, -5), M' = (-\infty, -5), \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
27. $M = (0, 1) \cup (1, 3)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = 0, \sup M = 3$
 $M^\circ = (0, 1) \cup (1, 3), hM = \{0, 1, 3\}, \overline{M} = \langle 0, 3 \rangle, M' = \langle 0, 3 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
28. $M = \{-1\} \cup (0, 2)$
 $\min M = -1, \max M = 2, \inf M = -1, \sup M = 2$
 $M^\circ = (0, 2), hM = \{-1, 0, 2\}, \overline{M} = \{-1\} \cup \langle 0, 2 \rangle, M' = \langle 0, 2 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{-1\}$
29. $M = \langle 3, 25 \rangle \cup (25, \infty)$
 $\min M = 3, \max M = neex., \inf M = 3, \sup M = neex.$
 $M^\circ = (3, 25) \cup (25, \infty), hM = \{3, 25\}, \overline{M} = \langle 3, \infty \rangle, M' = \langle 3, \infty \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
30. $M = \{1\} \cup \langle 2, 3 \rangle$
 $\min M = 1, \max M = 3, \inf M = 1, \sup M = 3$
 $M^\circ = (2, 3), hM = \{1, 2, 3\}, \overline{M} = M, M' = \langle 2, 3 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{1\}$
31. $M = \{-3\} \cup (-2, 0)$
 $\min M = -3, \max M = neex., \inf M = -3, \sup M = 0$
 $M^\circ = (-2, 0), hM = \{-3, -2, 0\}, \overline{M} = \{-3\} \cup \langle -2, 0 \rangle, M' = \langle -2, 0 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{-3\}$
32. $M = (0, e) \cup (e, 7)$
 $\min M = neex., \max M = 7, \inf M = 0, \sup M = 7$
 $M^\circ = M, hM = \{0, e, 7\}, \overline{M} = \langle 0, 7 \rangle, M' = \langle 0, 7 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
33. $M = (0, 2) \cup (2, 100)$
 $\min M = neex., \max M = 100, \inf M = 0, \sup M = 100$
 $M^\circ = (0, 2) \cup (2, 100), hM = \{0, 2, 100\}, \overline{M} = \langle 0, 100 \rangle, M' = \langle 0, 100 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$

34. $M = (0, 2) \cup \{\pi\}$
 $\min M = neex., \max M = \pi, \inf M = 0, \sup M = \pi$
 $M^\circ = (0, 2), hM = \{0, 2, \pi\}, \overline{M} = \langle 0, 2 \rangle \cup \{\pi\}, M' = \langle 0, 2 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{\pi\}$
35. $M = (0, 2\pi) \cup (2\pi, 7)$
 $\min M = neex., \max M = 7, \inf M = 0, \sup M = 7$
 $M^\circ = (0, 2\pi) \cup (2\pi, 7), hM = \{0, 2\pi, 7\}, \overline{M} = \langle 0, 7 \rangle, M' = \langle 0, 7 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
36. $M = (-6, -\pi) \cup (-\pi, 0)$
 $\min M = neex., \max M = 0, \inf M = -6, \sup M = 0$
 $M^\circ = (-6, -\pi) \cup (-\pi, 0), hM = \{-6, -\pi, 0\}, \overline{M} = \langle -6, 0 \rangle, M' = \langle -6, 0 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
37. $M = \{-3\} \cup \langle 0, 2 \rangle$
 $\min M = -3, \max M = 2, \inf M = -3, \sup M = 2$
 $M^\circ = (0, 2), hM = \{-3, 0, 2\}, \overline{M} = M, M' = \langle 0, 2 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{-3\}$
38. $M = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
 $\min M = neex., \max M = 1, \inf M = 0, \sup M = 1$
 $M^\circ = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, 1\right), hM = \left\{0, \frac{\pi}{4}, 1\right\}, \overline{M} = \langle 0, 1 \rangle, M' = \langle 0, 1 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
39. $M = (0, 2) \cup \{3\}$
 $\min M = neex., \max M = 3, \inf M = 0, \sup M = 3$
 $M^\circ = (0, 2), hM = \{0, 2, 3\}, \overline{M} = \langle 0, 2 \rangle \cup \{3\}, M' = \langle 0, 2 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{3\}$
40. $M = \{2\} \cup \langle 4, 6 \rangle$
 $\min M = 2, \max M = 6, \inf M = 2, \sup M = 6$
 $M^\circ = (4, 6), hM = \{2, 4, 6\}, \overline{M} = M, M' = \langle 4, 6 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{2\}$
41. $M = \{0\} \cup \langle \pi, 4 \rangle$
 $\min M = 0, \max M = 4, \inf M = 0, \sup M = 4$
 $M^\circ = (\pi, 4), hM = \{0, \pi, 4\}, \overline{M} = M, M' = \langle \pi, 4 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \{0\}$
42. $M = \langle -2, 2 \rangle$
 $\min M = -2, \max M = 2, \inf M = -2, \sup M = 2$
 $M^\circ = (-2, 2), hM = \{-2, 2\}, \overline{M} = M, M' = M, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
43. $M = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
 $\min M = 0, \max M = neex., \inf M = 0, \sup M = 3$
 $M^\circ = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right), hM = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 3\right\}, \overline{M} = \langle 0, 3 \rangle, M' = \langle 0, 3 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
44. $M = \langle -4, -\pi \rangle \cup (-\pi, 0)$
 $\min M = -4, \max M = neex., \inf M = -4, \sup M = 0$
 $M^\circ = (-4, -\pi) \cup (-\pi, 0), hM = \{-4, -\pi, 0\}, \overline{M} = \langle -4, 0 \rangle, M' = \langle -4, 0 \rangle,$
 $\text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$
45. $M = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$
 $\min M = neex., \max M = 3, \inf M = 0, \sup M = 3$
 $M^\circ = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 3\right), hM = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 3\right\}, \overline{M} = \langle 0, 3 \rangle, M' = \langle 0, 3 \rangle, \text{mn.izol.bod}\ddot{u} M = \emptyset$

46. $M = \langle -4, -3 \rangle \cup (-3, 0)$
 $\min M = -4, \max M = neex., \inf M = -4, \sup M = 0$
 $M^\circ = (-4, -3) \cup (-3, 0), hM = \{-4, -3, 0\}, \overline{M} = \langle -4, 0 \rangle, M' = \langle -4, 0 \rangle,$
 $mn.izol.bod\ddot{u} M = \emptyset$
47. $M = (0, 3) \cup (3, 4)$
 $\min M = neex., \max M = neex., \inf M = 0, \sup M = 4$
 $M^\circ = M, hM = \{0, 3, 4\}, \overline{M} = \langle 0, 4 \rangle, M' = \langle 0, 4 \rangle, mn.izol.bod\ddot{u} M = \emptyset$
48. $M = (-\infty, -1) \cup \left\{ \frac{1}{4} \right\}$
 $\min M = neex., \max M = \frac{1}{4}, \inf M = neex., \sup M = \frac{1}{4}$
 $M^\circ = (-\infty, -1), hM = \left\{ -1, \frac{1}{4} \right\}, \overline{M} = M, M' = (-\infty, 1), mn.izol.bod\ddot{u} M = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$
49. $M = (0, 1) \cup (1, 2)$
 $\min M = neex., \max M = 2, \inf M = 0, \sup M = 2$
 $M^\circ = (0, 1) \cup (1, 2), hM = \{0, 1, 2\}, \overline{M} = \langle 0, 2 \rangle, M' = \langle 0, 2 \rangle, mn.izol.bod\ddot{u} M = \emptyset$
50. $M = \left(\frac{1}{10}, 2 \right) \cup \{10\}$
 $\min M = neex., \max M = 10, \inf M = \frac{1}{10}, \sup M = 10$
 $M^\circ = \left(\frac{1}{10}, 2 \right), hM = \left\{ \frac{1}{10}, 2, 10 \right\}, \overline{M} = \left\langle \frac{1}{10}, 2 \right\rangle \cup \{10\}, M' = \left\langle \frac{1}{10}, 2 \right\rangle,$
 $mn.izol.bod\ddot{u} M = \{10\}$

2.6 Definiční obor funkce jedné proměnné

1. $D_f = \langle -2, 0 \rangle \cup (0, 3)$
2. $D_f = (-1, 2)$
3. $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(1, \frac{3}{2} \right)$
4. $D_f = (0, 1) \cup (1, 2)$
5. $D_f = (-1, 2)$
6. $D_f = (0, 1) \cup (1, 2)$
7. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
9. $D_f = \left\langle -\frac{3}{2}, -1 \right\rangle \cup \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$
10. $D_f = \left(\frac{2}{3}, 2 \right) \cup (2, 3) \cup (3, 4)$
11. $D_f = (-\infty, -1) \cup \langle 1, 2 \rangle \cup (2, 3)$

$$12. D_f = (0, 2) \cup (2, 4)$$

$$13. D_f = \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle$$

$$14. D_f = \left\langle 1, \sqrt{3} \right\rangle \cup \left(\sqrt{3}, 2 \right)$$

$$15. D_f = \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3)$$

$$16. D_f = (-1, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4)$$

$$17. D_f = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$$

$$18. D_f = \left\langle -\sqrt{e+4}, -\sqrt{\frac{1}{e}+4} \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{\frac{1}{e}+1}, \sqrt{e+4} \right\rangle$$

$$19. D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$$

$$20. D_f = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$$

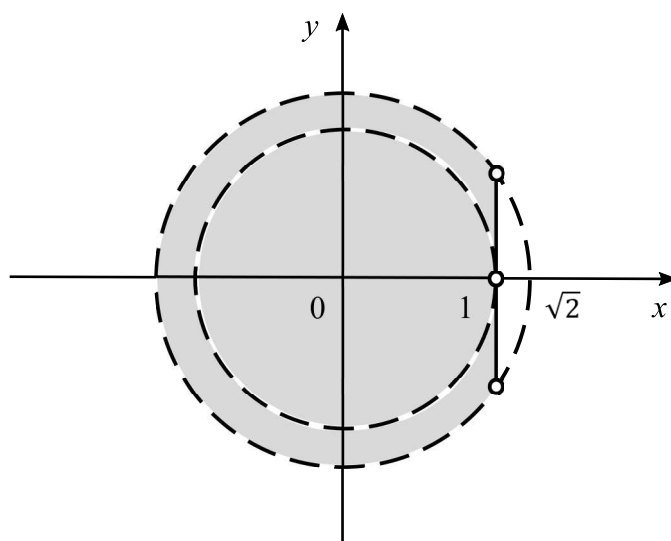
$$21. D_f = (2, 3) \cup (3, \infty)$$

$$22. D_f = \left(-\sqrt{3}, 1 \right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty \right)$$

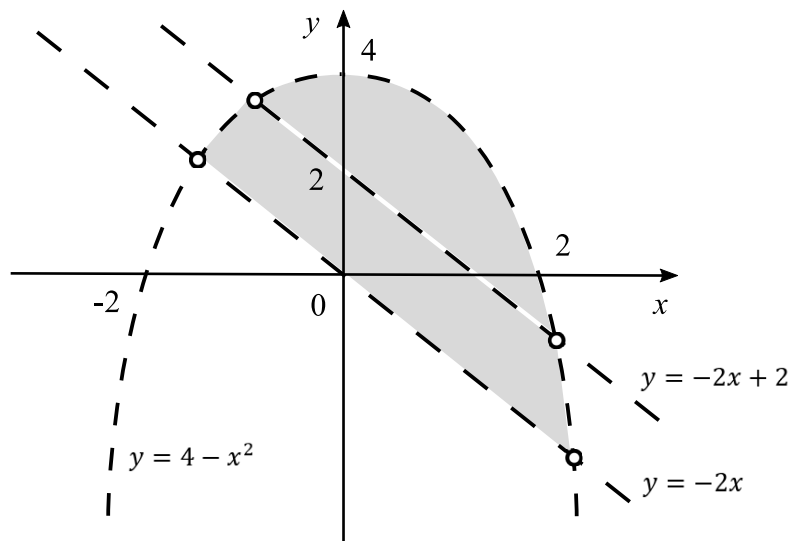
$$23. D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.7 Definiční obor funkce dvou proměnných

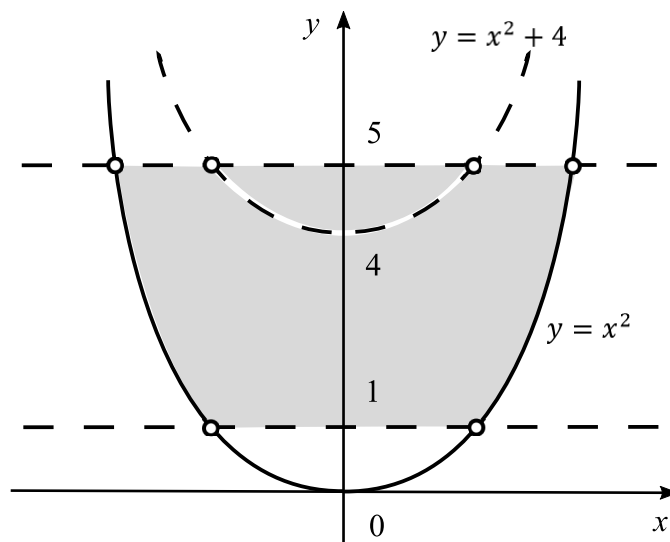
$$1. D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 - x - x^2 \geq 0, 2 - x^2 - y^2 > 0, 2 - x^2 - y^2 \neq 1\}$$



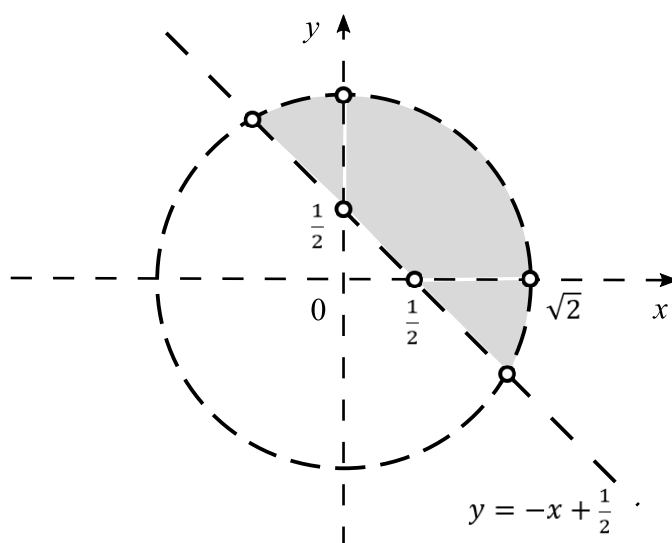
2. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 4 - x^2, y \neq -2x + 2, y > -2x\}$



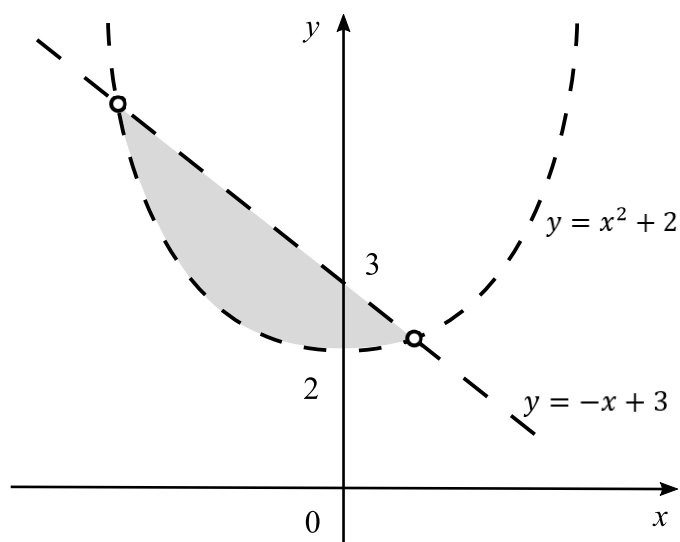
3. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 > |y - 3|, y \neq x^2 + 4, y \geq x^2\}$



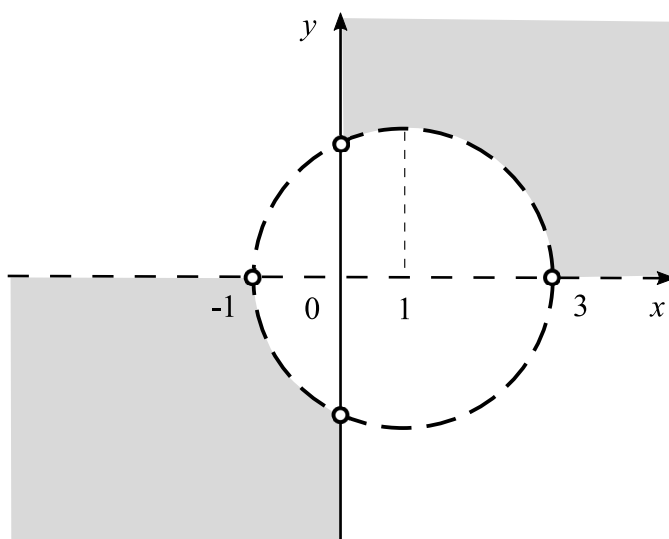
$$4. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 > x^2 + y^2, x \neq 0, y \neq 0, y > -x + \frac{1}{2} \right\}$$



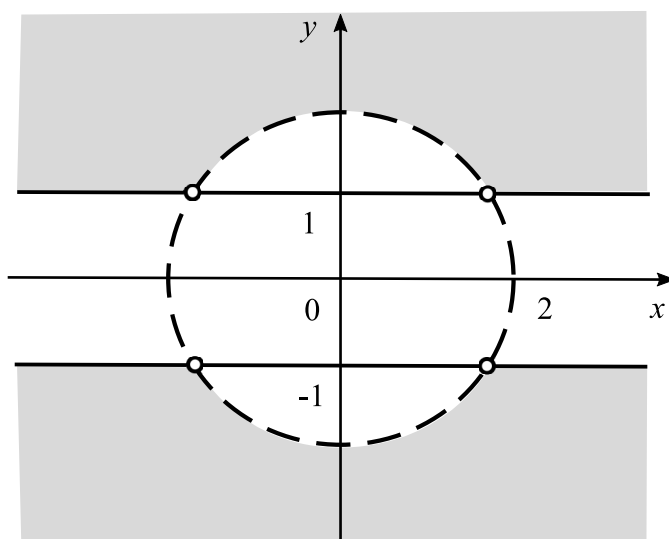
$$5. D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 3 - x, y > x^2 + 2\}$$



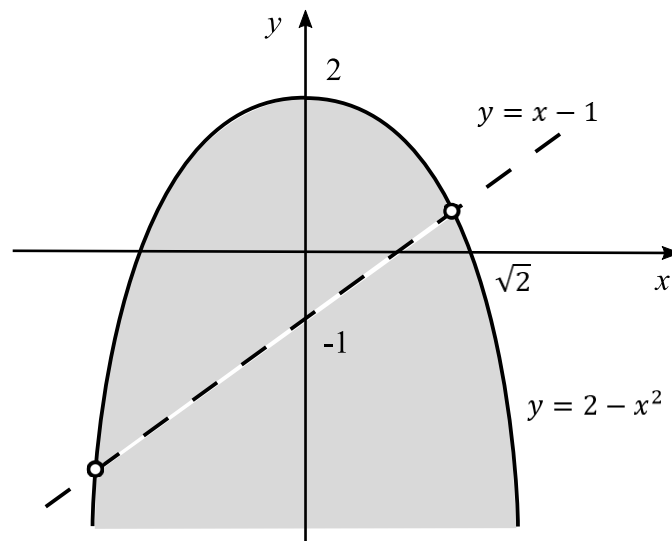
$$6. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x}{y} \geq 0, (x-1)^2 + y^2 > 4 \right\}$$



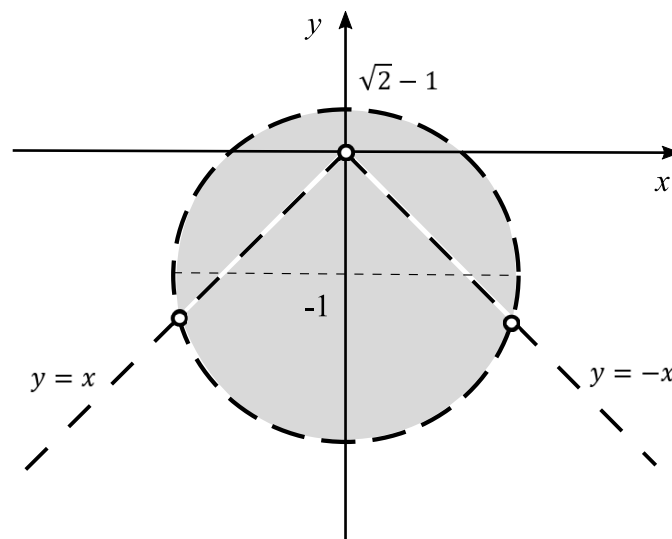
$$7. D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 4, |y| \geq 1\}$$



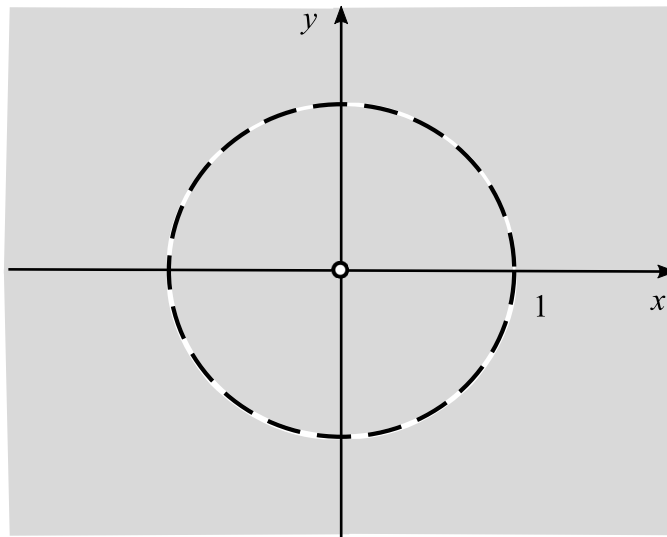
8. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 - x^2 \geq y, y \neq x - 1\}$



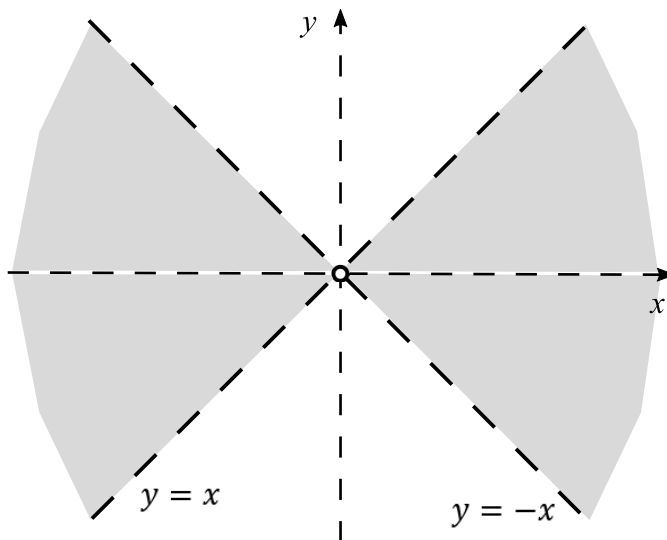
9. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y + 1)^2 \leq 2, y \neq -|x|\}$



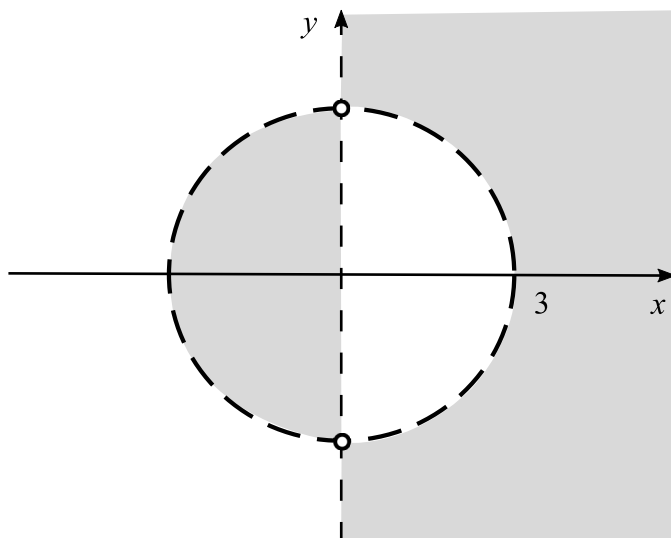
10. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \neq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$



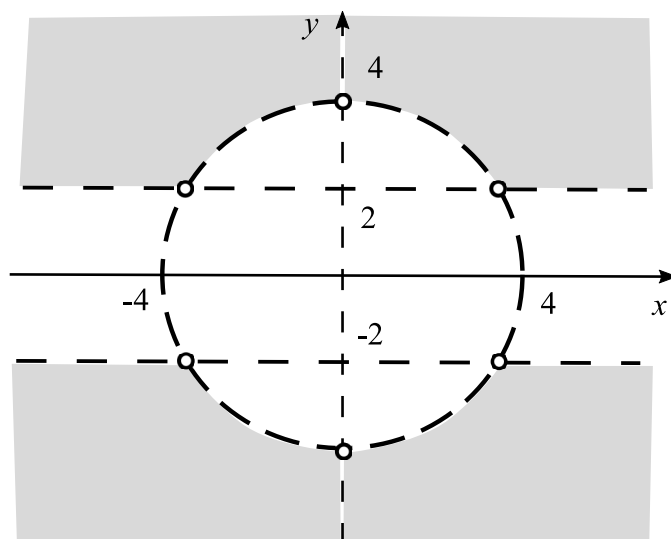
11. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > |y|, x \neq 0, y \neq 0\}$



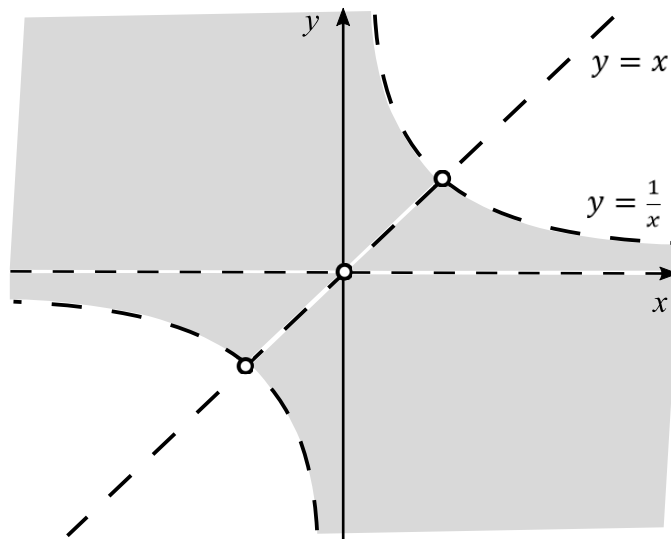
12. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, x^2 + y^2 - 9 > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0, x^2 + y^2 - 9 < 0\}$



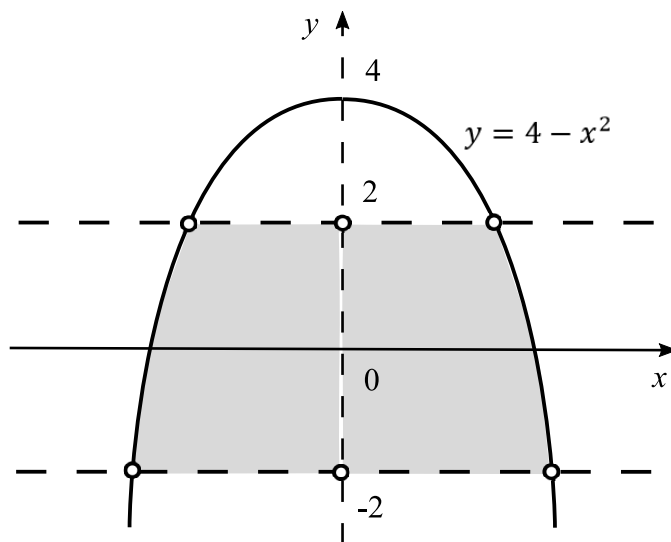
13. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 16, x \neq 0, |y| > 2\}$



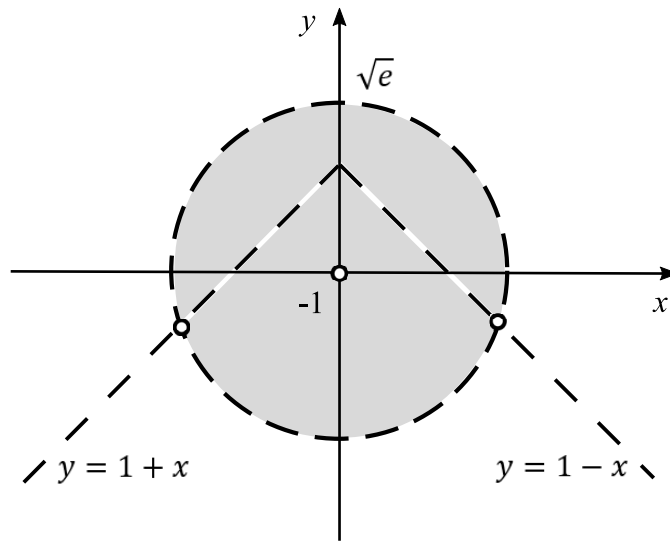
14. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy < 1, y \neq 0, y \neq x\}$



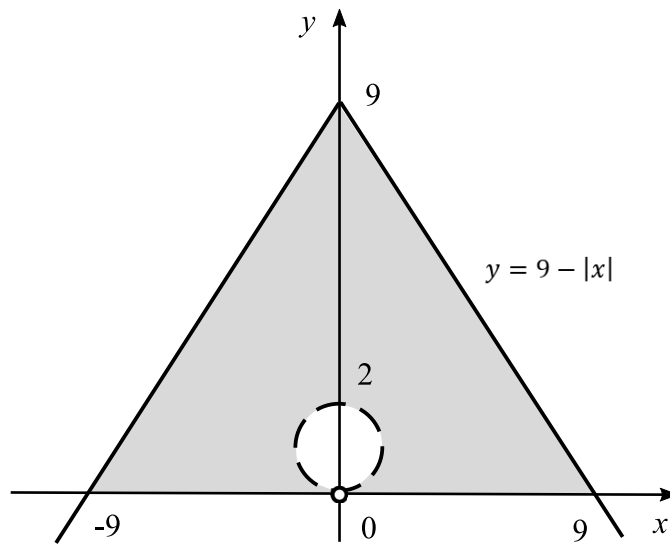
15. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y| < 2, x \neq 0, y \leq 4 - x^2\}$



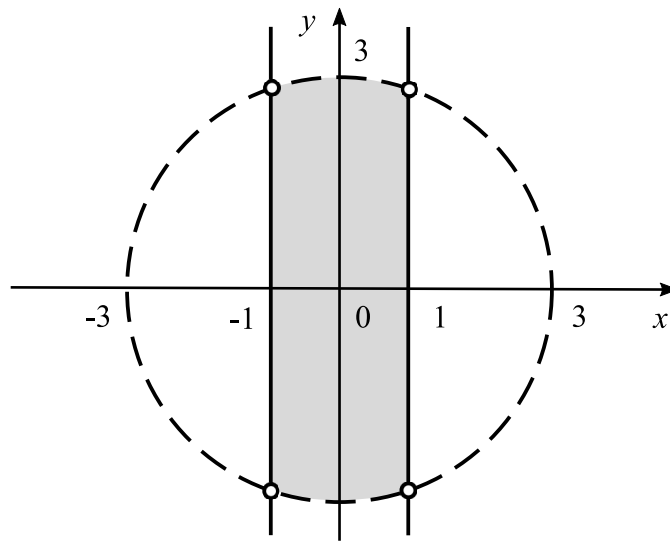
16. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq e, x^2 + y^2 > 0, 1 - |x| \neq y\}$



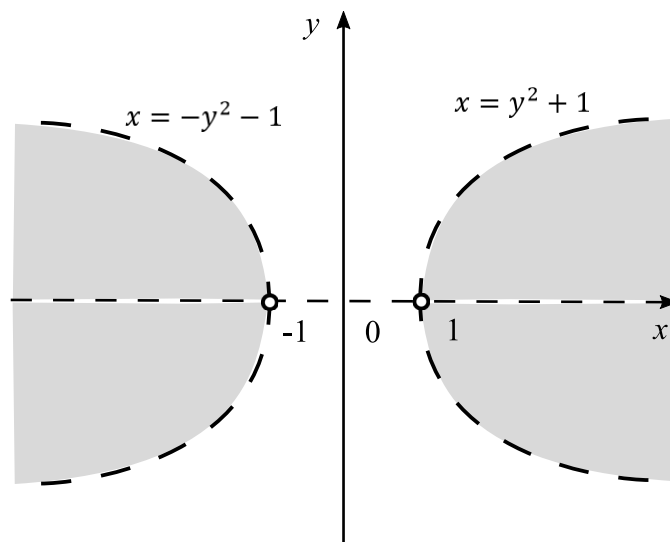
17. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, 9 - |x| \geq y, y \geq 0\}$



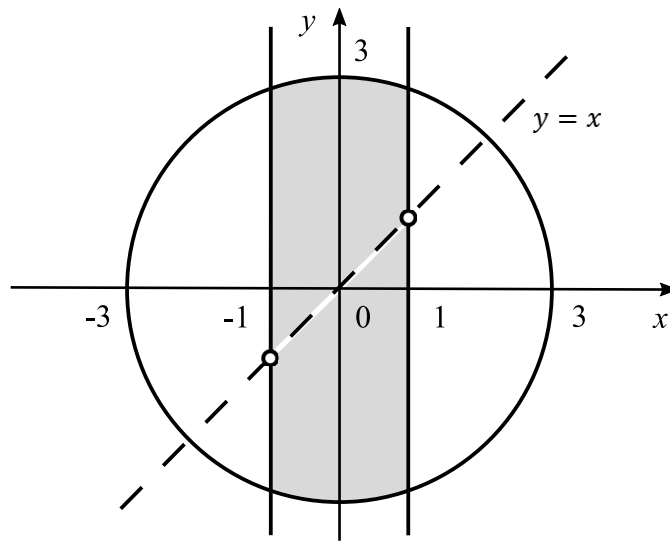
18. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 9, |x| \leq 1\}$



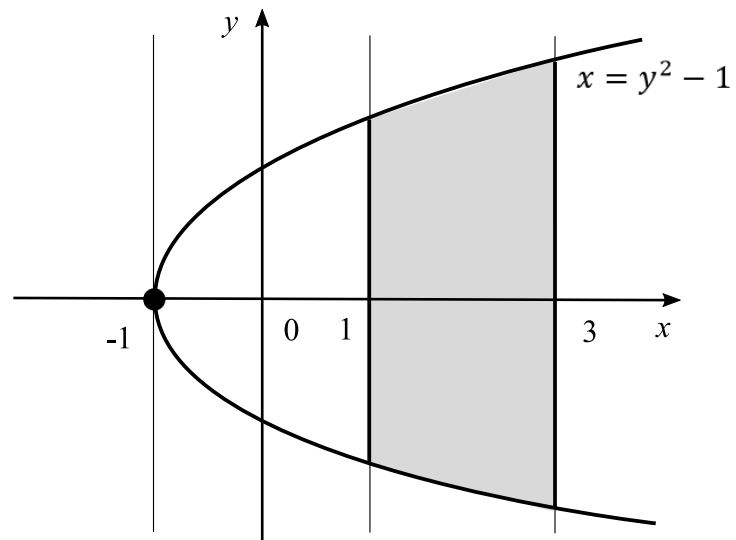
19. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y^2 + 1, y \neq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < -y^2 - 1, y \neq 0\}$



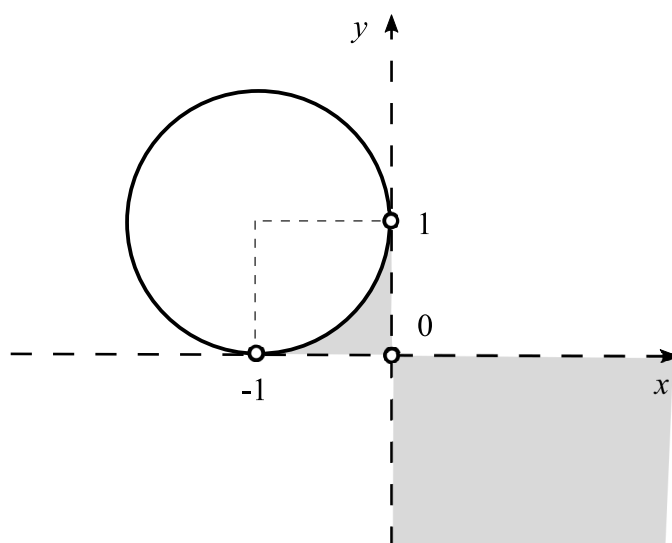
20. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, x^2 + y^2 \leq 9, x \neq y\}$



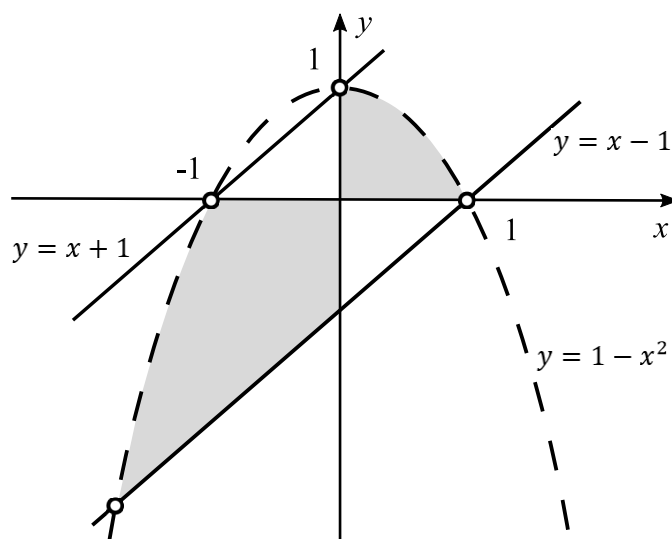
21. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 3, x \geq y^2 - 1, |x| \geq 1\}$



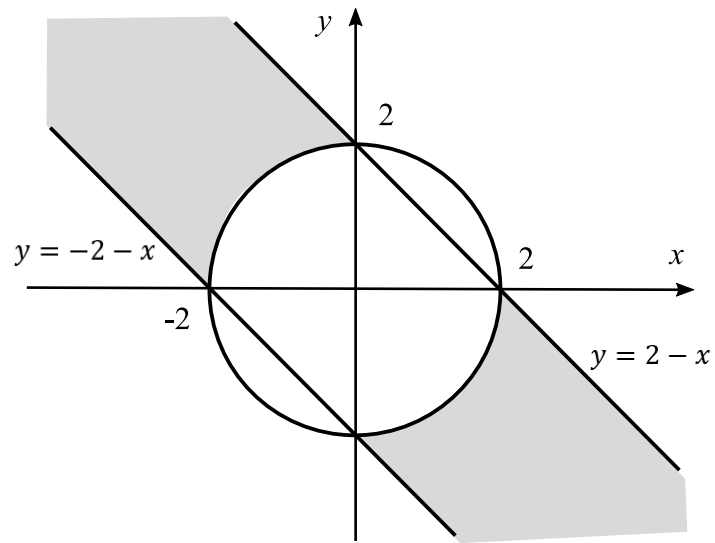
$$22. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 1, x+1 > y, \frac{x}{y} < 0 \right\}$$



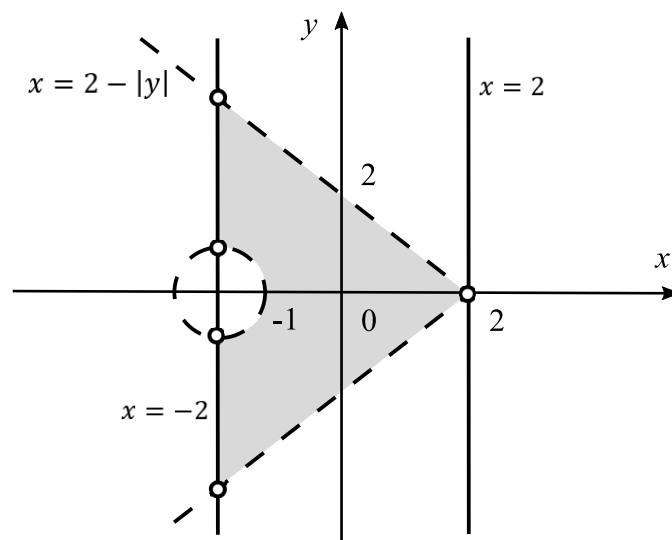
$$23. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 0, x+1 \geq y \geq x-1, 1-x^2 > y \right\}$$



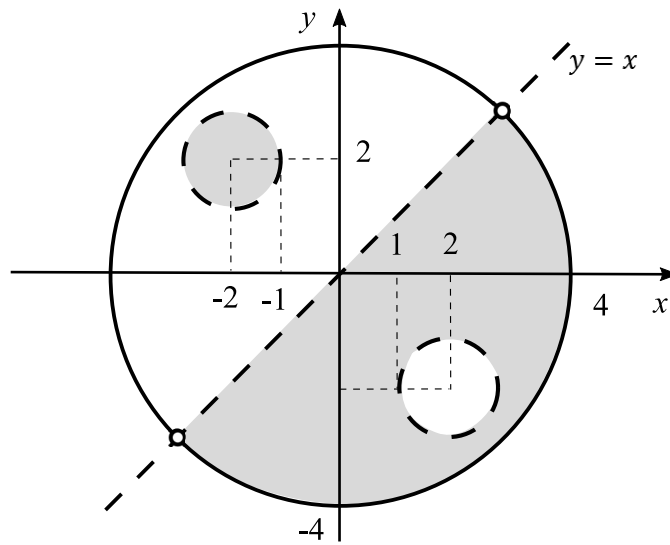
24. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 4, -2 - x \leq y \leq 2 - x\}$



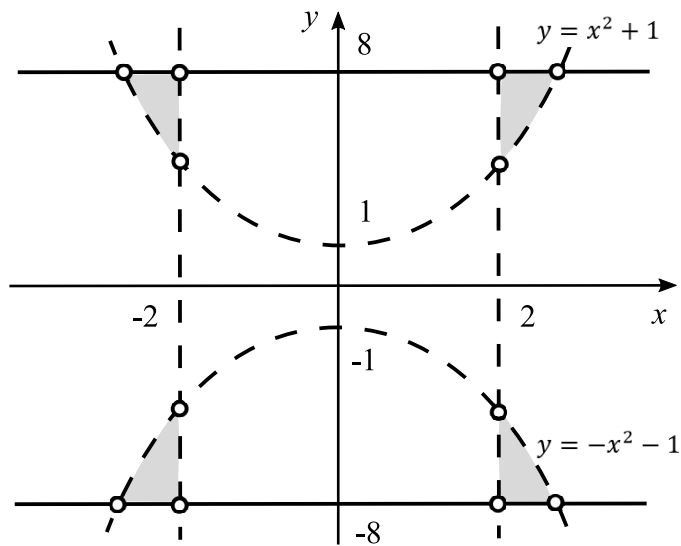
25. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 - |y| > x, y^2 + (x + 2)^2 > 1, |x| \leq 2\}$



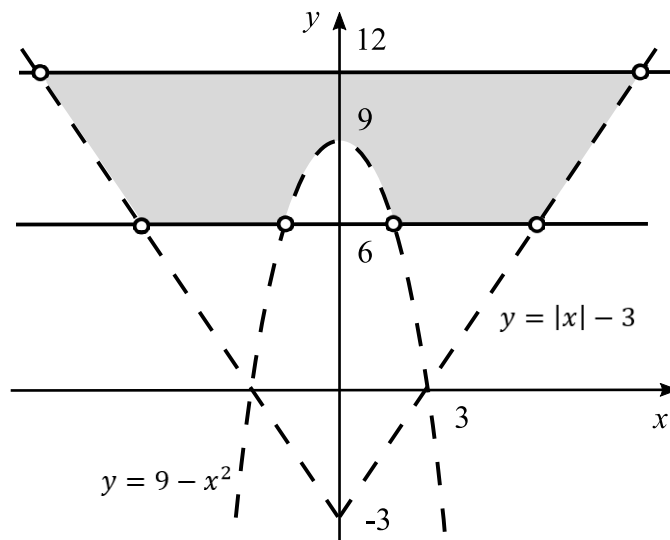
26. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16, (x-2)^2 + (y+2)^2 > 1, (x+2)^2 + (y-2)^2 > 1, x > y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16, (x-2)^2 + (y+2)^2 > 1, (x+2)^2 + (y-2)^2 < 1, x < y\}$



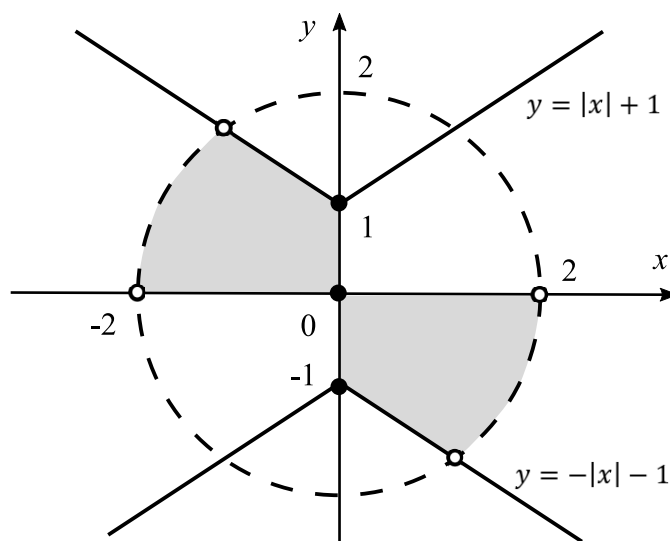
27. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > 2, |y| > x^2 + 1, |y| \leq 8\}$



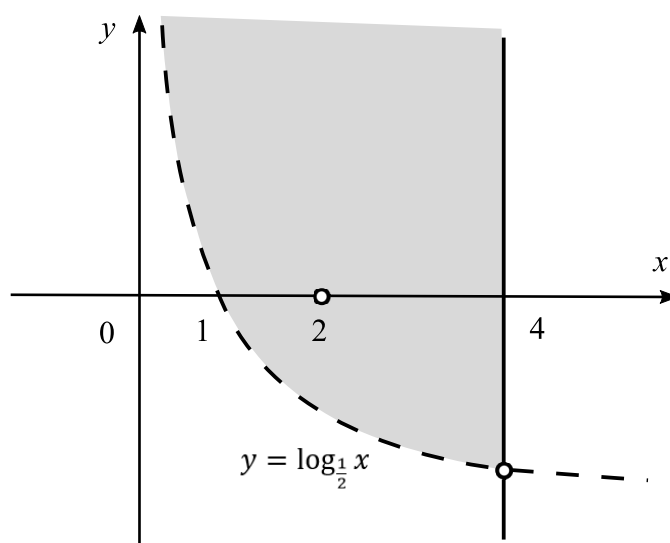
28. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y - 9| \leq 3, y > |x| - 3, y > 9 - x^2\}$



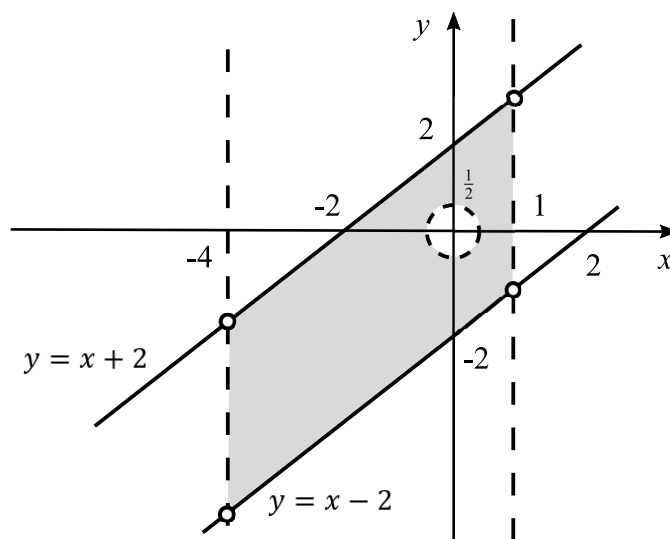
29. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 4, xy \leq 0, |y| \leq |x| + 1\}$



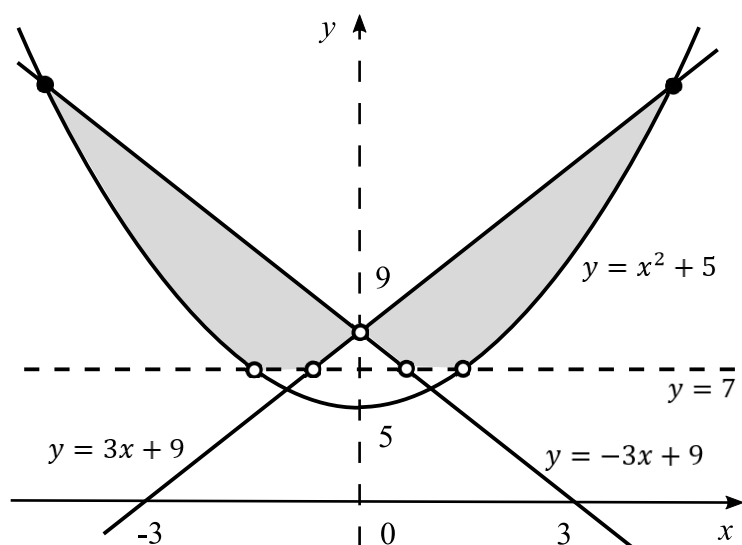
$$30. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y > \log_{\frac{1}{2}} x, x > 0, |x| \leq 4 \right\} \setminus \{(2, 0)\}$$



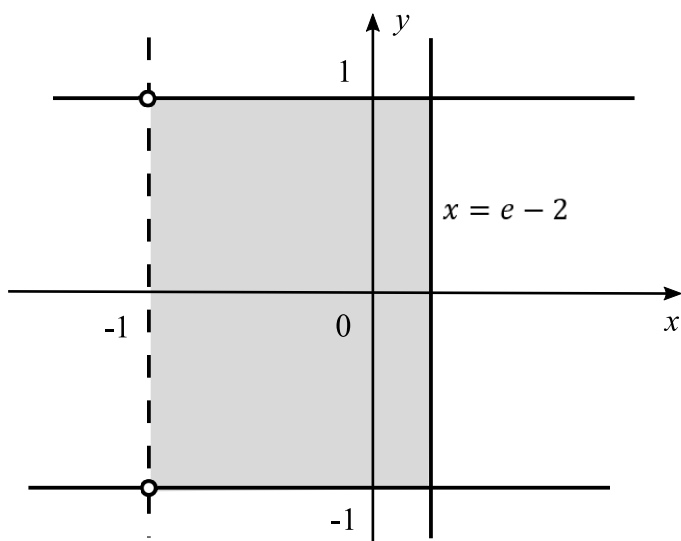
$$31. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 + x \leq y \leq 2 + x, -4 < x < 1, x^2 + y^2 > \frac{1}{4} \right\}$$



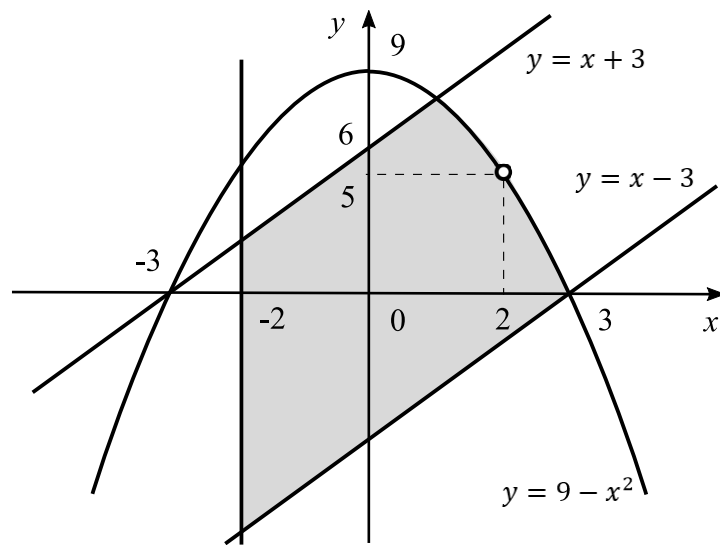
$$32. D_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x^2 + 5, (y - 7)(y + 1) > 0, x \neq 0, -1 \leq \frac{y - 9}{3x} \leq 1 \right\}$$



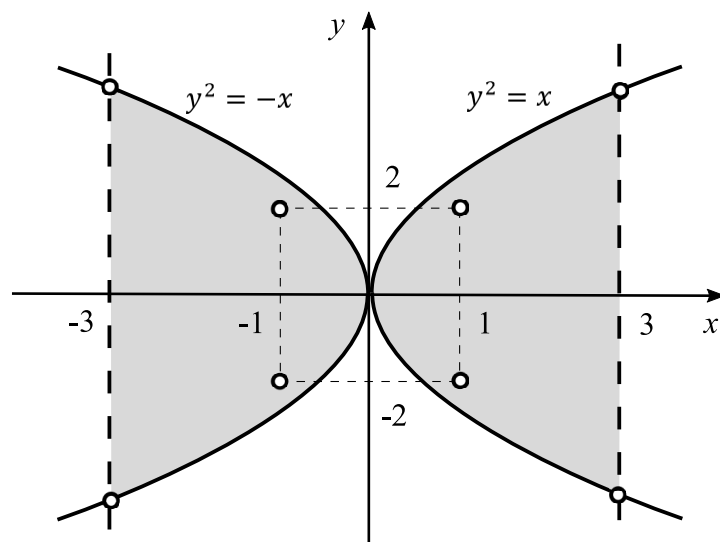
$$33. D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq e - 2, -1 \leq y \leq 1\}$$



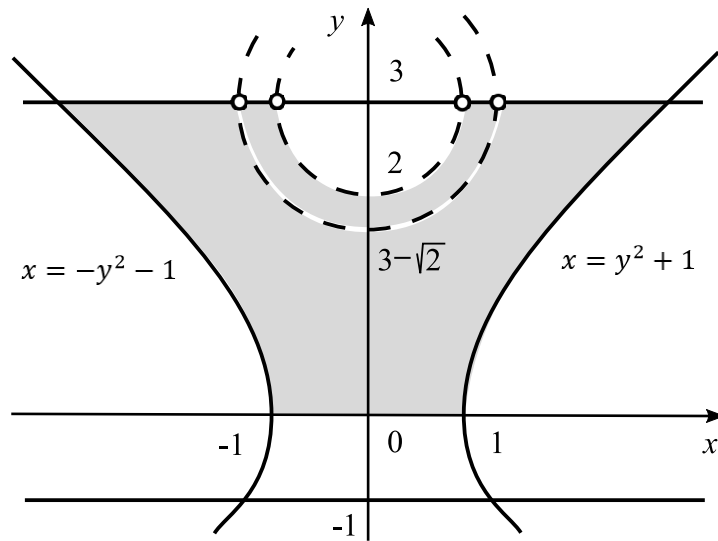
34. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq -2, y \leq 9 - x^2, -3 + x \leq y \leq 3 + x\} \setminus \{(2, 5)\}$



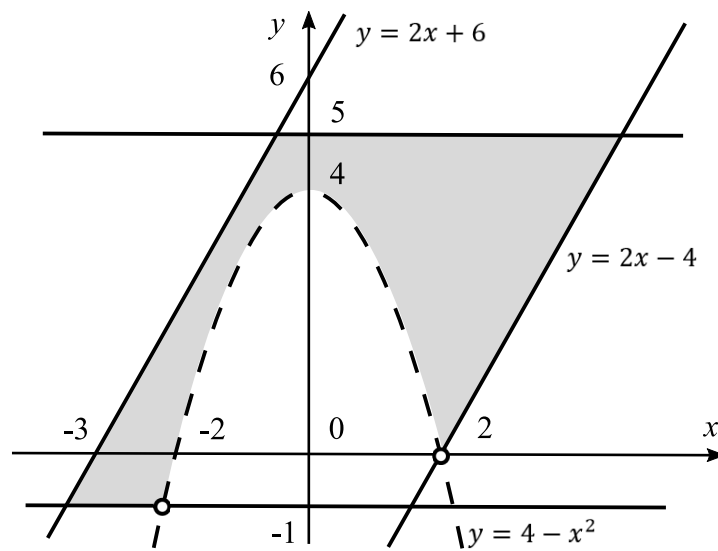
35. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \geq y^2, |x| < 3, (x^2 - 4)^2 + (y^2 - 1)^2 \neq 0\}$



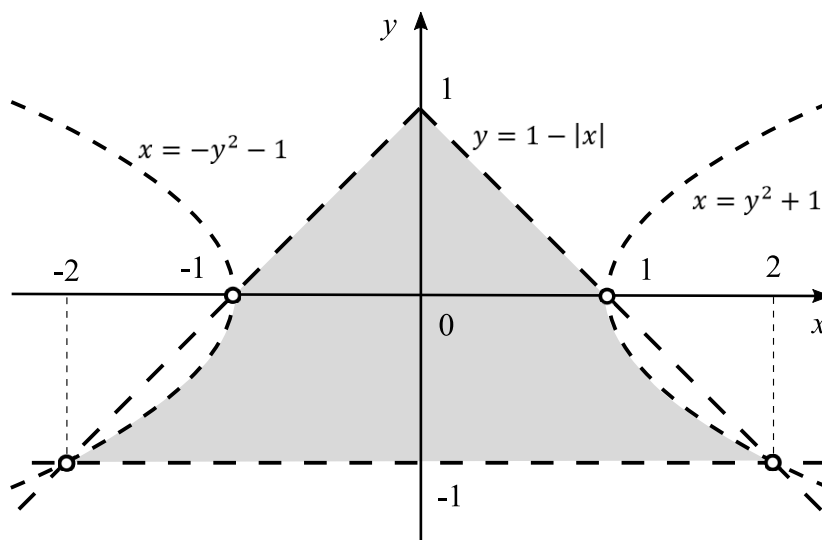
36. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq y^2 + 1, -1 \leq y \leq 3, x^2 + (y - 3)^2 > 1, x^2 + (y - 3)^2 \neq 2\}$



37. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x - 4 \leq y \leq 2x + 6, y > 4 - x^2, -1 \leq y \leq 5\}$



38. $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < y < 3, y < 1 - |x|, -y^2 - 1 < x < y^2 + 1\}$



2.8 Parita funkce

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, funkce f je lichá
2. $D_f = (-1, 1)$, funkce f je lichá
3. $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je lichá
4. $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je lichá
5. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je sudá
6. $D_f = (-2, 2) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, funkce f je lichá
7. $D_f = \langle -4, 4 \rangle \setminus \{-\pi, 0, \pi\}$, funkce f je sudá
8. $D_f = (-4, 4) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, funkce f je sudá
9. $D_f = \langle -2, 2 \rangle \setminus \{-1, 1\}$, funkce f je lichá
10. $D_f = \langle -7, 7 \rangle \setminus \{-2\pi, 0, 2\pi\}$, funkce f je sudá
11. $D_f = \langle -\pi, \pi \rangle \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
12. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, funkce f je lichá
13. $D_f = (-1, 1)$, funkce f je sudá
14. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, funkce f je lichá
15. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
16. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
17. $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je sudá

18. $D_f = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \setminus \{-2, 2\}$, funkce f je lichá
19. $D_f = (-1, 1) \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
20. $D_f = (-2, 2)$, funkce f je lichá
21. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, funkce f je sudá
22. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
23. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$, funkce f je lichá
24. $D_f = (-1, 1)$, funkce f je lichá
25. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, funkce f je lichá
26. $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, funkce f je sudá
27. $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je lichá
28. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, funkce f je lichá
29. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, funkce f je lichá
30. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je sudá
31. $D_f = (-1, 1) \setminus \{0\}$, funkce f není ani sudá ani lichá
32. $D_f = (-1, 1)$, funkce f je lichá
33. $D_f = (-1, 1)$, funkce f je sudá
34. $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je lichá
35. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, funkce f je lichá
36. $D_f = (-1, 0) \cup (0, 1)$, funkce f je lichá
37. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, funkce f je lichá
38. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je sudá
39. $D_f = \mathbb{R}$, funkce f je lichá
40. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right\}$, funkce f je lichá
41. $D_f = (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{10}, -3) \cup (3, \sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty)$, funkce f je sudá
42. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
43. $D_f = \langle -1, 1 \rangle$, funkce f je lichá
44. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{2k\pi\}$, funkce f je sudá

45. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$, funkce f je lichá
46. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je lichá
47. $D_f = \langle -2, 0 \rangle \cup (0, 2)$, funkce f je sudá
48. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \frac{\pi}{8} \right\}$, funkce f je sudá
49. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 0, (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}$, funkce f je lichá
50. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, funkce f je sudá
51. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}$, funkce f je lichá
52. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \right\}$, funkce f je sudá
53. $D_f = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, funkce f je lichá
54. $D_f = (-2, 2)$, funkce f je sudá
55. $D_f = (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle$, funkce f je sudá
56. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, funkce f je sudá

2.9 Inverzní funkce

1. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{6}, -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{1-x}{2} \right) - \frac{2}{3}, \quad D_{f^{-1}} = \langle -1, 3 \rangle$
2. $D_f = \langle 2, 3 \rangle$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{x-4}{3} \right), \quad D_{f^{-1}} = \langle 4, 4 + 3\pi \rangle$
3. $D_f = \left\langle -\frac{2}{3}, 0 \right\rangle$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \sin \left(\frac{2-x}{3} \right) - \frac{1}{3}, \quad D_{f^{-1}} = \left\langle 2 - \frac{3}{2}\pi, 2 + \frac{3}{2}\pi \right\rangle$
4. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{x-3}{2} \right), \quad D_{f^{-1}} = \langle 1, 5 \rangle$

5. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{3-x}{2} \right) - \frac{5}{2}$, $D_{f^{-1}} = \langle 1, 5 \rangle$
6. $D_f = \left\langle 0, \frac{2}{3} \right\rangle$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sin \left(\frac{x-2}{3} \right)$, $D_{f^{-1}} = \left\langle 2 - \frac{3}{2}\pi, 2 + \frac{3}{2}\pi \right\rangle$
7. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\pi+1) \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{x-3}{4} \right)$, $D_{f^{-1}} = \langle -1, 7 \rangle$
8. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \left(\frac{x-3}{2} \right)$, $D_{f^{-1}} = (-\pi+3, \pi+3)$
9. $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3} \right)$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} e^{\frac{x-5}{4}}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
10. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{x-1}{2} \right)$, $D_{f^{-1}} = \langle -1, 3 \rangle$
11. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = -2 + \log_3 \left(\frac{4-x}{7} \right)$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)$
12. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 4 + \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, f je prostá na intervalu $\left(4 - \frac{\pi}{2}, 4 + \frac{\pi}{2} \right)$
 $f^{-1}(x) = 4 + \operatorname{arctg} \left(\frac{x-5}{2} \right)$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
13. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle \frac{2-\pi}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \arccos \left(\frac{x-5}{7} \right)$, $D_{f^{-1}} = \langle -2, 12 \rangle$
14. $D_f = \mathbb{R}^+$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = 3 \cdot e^{\frac{1-x}{2}}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
15. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4} + 3, \frac{\pi}{4} + 3 \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = 3 + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x-4}{2} \right)$, $D_{f^{-1}} = \langle 2, 6 \rangle$
16. $D_f = (2, \infty)$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x-5}{4}}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

17. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2 + \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, f je prostá na intervalu $\left(2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2} \right)$
 $f^{-1}(x) = 2 + \operatorname{arctg} \left(\frac{x-5}{4} \right)$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
18. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle 2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = 2 - \arcsin \left(\frac{x-4}{8} \right)$, $D_{f^{-1}} = \langle -4, 12 \rangle$
19. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\langle -3, -3 + \pi \rangle$
 $f^{-1}(x) = \arccos \left(\frac{7-x}{2} \right) - 3$, $D_{f^{-1}} = \langle 5, 9 \rangle$
20. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-12}{6} \right)$, $D_{f^{-1}} = (12, \infty)$
21. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \arccos(x-5)$, $D_{f^{-1}} = \langle 4, 6 \rangle$
22. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-4}{5} \right) - \frac{\pi}{2}$, $D_{f^{-1}} = (4, \infty)$
23. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{3}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{4} \right\}$, f je prostá na intervalu $\left(-\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}, -\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(36-4x) - \frac{3}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
24. $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3} \right)$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{9} (6 - 7^{4(x-5)})$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
25. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \left(\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x-1}{2} \right) - 1 \right)$, $D_{f^{-1}} = (1, \infty)$
26. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{3^4}{2}, \frac{\pi - 3^4}{2} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} (3^4 + \arccos(36-4x))$, $D_{f^{-1}} = \left\langle \frac{35}{4}, \frac{37}{4} \right\rangle$
27. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{1}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{4} \right\}$, f je prostá na intervalu $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{5-x}{3} \right) - \frac{1}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

28. $D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \left(2 - 10^{\frac{2-x}{7}}\right)$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
29. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \log_2(4 - x) - 4$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)$
30. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\left\langle 2 - \frac{7}{2}\pi, 2 + \frac{7}{2}\pi \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = 2 - 7\arcsin\left(\frac{x-5}{3}\right)$, $D_{f^{-1}} = \langle 2, 8 \rangle$
31. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na intervalu $\langle 3, 3 + 2\pi \rangle$
 $f^{-1}(x) = 3 + 2\arccos\left(\frac{4-x}{2}\right)$, $D_{f^{-1}} = \langle 2, 6 \rangle$
32. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{(5k+1)\frac{\pi}{4}\right\}$, f je prostá na intervalu $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\pi\right)$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\operatorname{arccotg}\left(\frac{2-x}{3}\right)$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
33. $D_f = \mathbb{R}$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = 2 + \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5-2x}{8}\right)$, $D_{f^{-1}} = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$
34. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f je prostá na intervalu $\left\langle \frac{3}{\pi}, \infty \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \frac{3}{\arccos\left(\frac{5-x}{3}\right)}$, $D_{f^{-1}} = (2, 8)$
35. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{\log_3\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right\}$, f je prostá na intervalu $\left(-\infty, \log_3 \frac{\pi}{4}\right)$
 $f^{-1}(x) = \log_3\left(\arctg\left(\frac{5-x}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, 1)$
36. $D_f = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, f je prostá na D_f
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \left(4 - 5^{\frac{7-x}{2}}\right)$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
37. $D_f = (0, \infty)$, f je prostá na intervalu $\langle 3^{-\pi}, 1 \rangle$
 $f^{-1}(x) = 3^{\arcsin\left(\frac{x-5}{2}\right) - \frac{\pi}{2}}$, $D_{f^{-1}} = \langle 3, 7 \rangle$
38. $D_f = (0, \infty)$, f je prostá na intervalu $\left\langle \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\pi}{2}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\pi}{2}} \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\arccos\left(\frac{3-x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}}$, $D_{f^{-1}} = \langle 1, 5 \rangle$

39. $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5 - \frac{\pi}{2} + k\pi}{4} \right) \right\},$
 f je prostá na intervalu $\left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{5 - \frac{\pi}{2}}{4} \right), \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5 + \frac{\pi}{2}}{4} \right) \right)$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} \left(5 - \operatorname{arctg} \left(\frac{2-x}{3} \right) \right) \right), \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
40. f je prostá na $D_f = (-\infty, -1)$
 $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{x-5}{4}} + 2 \right), \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
41. f je prostá na $D_f = \mathbb{R}$
 $f^{-1}(x) = -\ln \left(5^{\frac{x-5}{2}} - \pi \right), \quad D_{f^{-1}} = (5 + 2 \log_5 \pi, \infty)$
42. $D_f = \mathbb{R}, f$ je prostá na intervalu $\left\langle \log_{\frac{1}{5}} \pi, \infty \right\rangle$
 $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} \left(\pi - \arccos \left(\frac{2-x}{4} \right) \right), \quad D_{f^{-1}} = \langle -2, 6 \rangle$

2.10 Limita

1. 0
2. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
3. $\frac{1}{2}$
4. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
5. 2
6. $-\infty$
7. 4
8. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
9. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
10. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
11. -12
12. $-\frac{\pi}{4}$
13. $\frac{1}{20}$
14. $-\frac{1}{32}$
15. 0
16. 0

- 17. $-\frac{2}{35}$
- 18. 1
- 19. -12
- 20. $\frac{5}{2}$
- 21. 0
- 22. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 23. ∞
- 24. $-\infty$
- 25. ∞
- 26. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 27. 0
- 28. ∞
- 29. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 30. 0
- 31. ∞
- 32. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 33. $\frac{12}{5}$
- 34. ∞
- 35. e^5
- 36. $\frac{1}{2}$
- 37. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 38. $\frac{4}{\pi}$
- 39. 0
- 40. $\frac{1}{3}$
- 41. $-\frac{\pi}{2}$
- 42. $\frac{e}{5}$
- 43. ∞

- 44. $-\infty$
- 45. 0
- 46. ∞
- 47. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 48. 0
- 49. e
- 50. $-\infty$
- 51. 0
- 52. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 53. $-\infty$
- 54. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 55. -1
- 56. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 57. ∞
- 58. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 59. ∞
- 60. $-\infty$
- 61. 0
- 62. $-\infty$
- 63. 0
- 64. $-\infty$
- 65. 0
- 66. $\frac{4}{\pi}$
- 67. -4
- 68. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 69. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
- 70. 0
- 71. $-\frac{1}{2}$
- 72. $-\infty$

73. ∞
74. 0
75. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
76. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
77. $\frac{1}{2}$
78. 0
79. 0
80. ∞
81. neex.; jednostranné limity $\pm\infty$
82. $-\infty$
83. 0
84. 0
85. -2
86. 1
87. ∞

2.11 Vlastnosti funkce

1. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, funkce f je sudá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$
 $P_x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$; P_y není
2. $D_f = (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, funkce f není sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$
 $P_x = (0, \ln 3)$, $P_y = (2, 0)$
3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f není ani sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = neex.$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 $P_x = (2 - k\pi, 0)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, P_y není
4. $D_f = (-1, 1) \setminus \{0\}$, funkce f je sudá
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 P_x není, P_y není

5. $D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, funkce f je sudá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty$
 $P_x = (-\sqrt{3}, 0)$, $P_x = (\sqrt{3}, 0)$, P_y není
6. $D_f = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \langle 7, \infty \rangle$, funkce f není sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, $\lim_{x \rightarrow -(\frac{1}{2})^-} f(x) = \infty$
 $P_x = (7, 0)$, $P_y =$ není
7. $D_f = \langle -2, 0 \rangle \cup (0, \infty)$, funkce f není sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 $P_x = (k^2\pi^2 - 2, 0)$, kde $k \in \mathbb{Z}$; P_y není
8. $D_f = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup \langle 1, \infty \rangle$, funkce f není sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(x) = \infty$
 $P_x = (1, 0)$, P_y není
9. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, funkce f je lichá
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,
 $P_x = (0, 0)$, $P_y = (0, 0)$
10. $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, funkce f je sudá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$
 P_x, P_y nejsou
11. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, funkce f není sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$
 $P_x = (0, 0)$, $P_y = (0, 0)$
12. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f není sudá ani lichá
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty$
 P_x, P_y nejsou

2.12 Derivace funkce

1. $f'(x) = 12 \cdot \frac{x^2 + 4}{x(x^2 - 4)} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x}\right)$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 4}{x} > 0\right\}$; $D_{f'} = D_f$
2. $f'(x) = \frac{x(6 - x)}{(3 - x)^2} \cdot e^{\frac{x^2}{3-x}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 3\}$; $D_{f'} = D_f$

3. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}; D_{f'} = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$
4. $f'(x) = \frac{9}{(x+1)(2-x)} \cdot \ln^2 \left(\frac{x+1}{2-x} \right)$
 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{x+1}{2-x} > 0 \right\}; D_{f'} = D_f \setminus \{-1\}$
5. $f'(x) = \frac{e^x ((x^2-1)(\cos 2x - 2 \sin 2x) - x \cos 2x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; |x| > 1\}; D_{f'} = D_f$
6. $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[3]{\pi}} \cdot \frac{1}{x(x+1)}$
 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{x}{x+1} > 0 \right\}; D_{f'} = D_f$
7. $f'(x) = e^{\log 4} \cdot \frac{2x^2}{(1-x^3)^2} \cdot \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right)^{-\frac{2}{3}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x^3 \neq 1\}; D_{f'} = D_f \setminus \{-1\}$
8. $f'(x) = -\frac{2}{\cos x}$
 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{1-\sin x}{1+\sin x} > 0, \sin x \neq -1 \right\}; D_{f'} = D_f$
9. $f'(x) = \sqrt{\cos \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} \cos x \cdot \sin \sqrt{x} - |\sin x| \cdot \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{\sin x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; \sin x \geq 0, \sin \sqrt{x} \neq 0\}; D_{f'} = \{x \in \mathbb{R}; \sin x > 0, x > 0, \sin \sqrt{x} > 0\}$
10. $f'(x) = (\sin 3 \cdot (1+x^2))^{-\frac{1}{2}}$
 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; x + \sqrt{1+x^2} > 0 \right\}; D_{f'} = D_f$
11. $f'(x) = -\sqrt{\cos(\pi-1)} \cdot \sqrt{\frac{x}{\cos(\ln x)}} \cdot \frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{2x^2}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x > 0, \cos(\ln x) \geq 0\}; D_{f'} = \{x \in \mathbb{R}; x > 0, \cos(\ln x) > 0\}$
12. $f'(x) = \sqrt[5]{\left(\frac{1-2x^2}{\sin x+1} \right)^4} \cdot \frac{(1-2x^2) \cos x + 4x(\sin x+1)}{(1-2x^2)^2}$
 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 \neq \frac{1}{2} \right\}; D_{f'} = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 \neq \frac{1}{2}, \sin x+1 \neq 0 \right\}$
13. $f'(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{1-4x^3}{\cos x-2} \right)^2} \cdot \frac{(4x^3-1) \sin x + 12x^2(\cos x-2)}{(1-4x^3)^2}$
 $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^3 \neq \frac{1}{4} \right\}; D_{f'} = D_f$

14. $f'(x) = 6x \cdot \sqrt{\ln\left(\frac{1}{3x}\right)} - \frac{3x}{2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{3x}\right)}}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x > 0, \ln\left(\frac{1}{3x}\right) \geq 0\right\}; D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R}; x > 0, \ln\left(\frac{1}{3x}\right) > 0\right\}$
15. $f'(x) = 4 \sin \sqrt{4x+1} + 8x \cdot \frac{\cos \sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; 4x+1 \geq 0\}; D_{f'} = \{x \in \mathbb{R}; 4x+1 > 0\}$
16. $f'(x) = 1$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; \sin x + \cos x \neq 0\}; D_{f'} = D_f$
17. $f'(x) = -1$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; \sin x \neq \cos x\}; D_{f'} = D_f$
18. $f'(x) = \frac{-4x^2 + 5x + 3}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}(x+1)^3}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}; D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}\right\}$
19. $f'(x) = \frac{e^{-x^2}(4x^3 + 10x^2 + 6x + 7)}{(2x+1)^3}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}\right\}; D_{f'} = D_f$
20. $f'(x) = \frac{-2e^{-x}(x^2 + 4x + 5)}{(2x+2)^3}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1\}; D_{f'} = D_f$
21. $f'(x) = \frac{e^x(9x^2 + 6x - 2)}{9\sqrt[3]{x^5}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}; D_{f'} = D_f$
22. $f'(x) = \frac{1}{5}(1-2x)\sqrt[5]{\frac{1}{x^4(2x+1)^7}}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}\right\}; D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 0\right\}$
23. $f'(x) = -\frac{4}{3}(8x^2 - 6x + 1)\sqrt[3]{\frac{1}{x^5(1-2x)^{10}}}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}\right\}; D_{f'} = D_f$
24. $f'(x) = \frac{-20x^2 + 17x + 4}{3\sqrt[3]{(x-x^2)^2}(4-5x)^3}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{4}{5}\right\}; D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{4}{5}, x \neq 0, x \neq 1\right\}$

25. $f'(x) = e^{\frac{1}{4} + \sin \sqrt{\pi}} \cdot \frac{-3 - 2x}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}; D_{f'} = D_f$
26. $f'(x) = \frac{-12x^2 + 2x + 18}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} \cdot (3x + 1)^3}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{3}\right\}; D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{1}{3}, x \neq 1, x \neq -1\right\}$
27. $f'(x) = \frac{10x + 1}{(2x - 5)^3 \sqrt[3]{(1 - 3x)^2}}$
 $D_f = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{5}{2}\right\}; D_{f'} = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{5}{2}, x \neq \frac{1}{3}\right\}$
28. $f'(x) = \frac{\sin(2\sqrt[3]{x-3})}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}} - \frac{2x^2 - 18x + 8}{(2x - 9)(4 - x^2)}$
 $D_f = (-\infty, -2) \cup \left(2, \frac{9}{2}\right); D_{f'} = D_f \setminus \{3\}$
29. $f'(x) = \frac{9x + 2 - 12\sqrt[4]{x^3}}{4(1 - \sqrt[4]{x})(3x - 2)\sqrt[4]{x^3}}$
 $D_f = \left(\frac{2}{3}, 1\right); D_{f'} = D_f$
30. $f'(x) = \frac{5x^2 - 48x\sqrt[3]{x^2} - 2}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot (8 - \sqrt[3]{x})(2 + x^2)}$
 $D_f = (-\infty, 8^3); D_{f'} = D_f \setminus \{0\}$
31. $f'(x) = \frac{5x^3 + 6x^2 - 20}{2\sqrt{x^3 - 1} \cdot (2 - 5x)^3} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{\pi}\right)$
 $D_f = (1, \infty); D_{f'} = (1, \infty)$
32. $f'(x) = \frac{3}{2(x + 1)(2 - x)\sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)}}$
 $D_f = \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle; D_{f'} = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$
33. $f'(x) = \frac{2\left(e^{x^2}(x^2 \ln(x^2) - 1) + 4\right)}{3x\sqrt[3]{\ln^4(x^2)} \cdot (e^{x^2} - 4)^2}$
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1, -\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4}\}$
34. $f'(x) = 2 \frac{12 - 2x^2 - 3x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2} \cdot (x - 3)^3}$
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3, -2, 2\}$

2.13 Stacionární body funkce

$$1. f'(x) = \frac{6x - 16}{(1 - 2x)^3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}; D_{f'} = D_f; SB = \left\{ \frac{8}{3} \right\}$$

$$2. f'(x) = \frac{-2(4x + 1)}{3\sqrt[3]{x} \cdot (2x - 1)^3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}; SB = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$$

$$3. f'(x) = \frac{1 - 25x}{3\sqrt[3]{(5x - 1)^2} \cdot (x - 1)^3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 1, \frac{1}{5} \right\}; SB = \left\{ \frac{1}{25} \right\}$$

$$4. f'(x) = \frac{2(1 + 12x)}{5\sqrt[5]{x^3} \cdot (1 - 3x)^3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{3} \right\}; SB = \left\{ -\frac{1}{12} \right\}$$

$$5. f'(x) = \frac{-2(12x^2 + 2x - 9)}{3\sqrt[3]{(1 - 2x)^2} \cdot (1 - 3x)^3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}; SB = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{109}}{12} \right\}$$

$$6. f'(x) = \frac{2x^3 \cdot e^{\frac{1}{1-x^2}} \cdot (3 - x^2)}{(1 - x^2)^2 \cdot (1 + x^2)^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; D_{f'} = D_f; SB = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

$$7. f'(x) = \frac{2x(11x^2 - 15)}{\sqrt[3]{(4 - 3x^2)^2} \cdot (x^2 - 1)^5}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1, 1, \frac{4}{3} \right\}; SB = \left\{ 0, \sqrt{\frac{15}{11}}, -\sqrt{\frac{15}{11}} \right\}$$

$$8. f'(x) = \frac{2(2x - 8) \ln^3(x^2 - 8x - 9)}{(x^2 - 8x - 9)(1 + \ln^2(x^2 - 8x - 9))}$$

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (9, \infty); D_{f'} = D_f; SB = \{4, 4 + \sqrt{26}, 4 - \sqrt{26}\}$$

$$9. f'(x) = \frac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; D_{f'} = D_f; SB = \{-3, 0, 3\}$$

$$10. f'(x) = \frac{2e^{x^2}(2x^2 - x - 2)}{(2x - 1)^3}$$

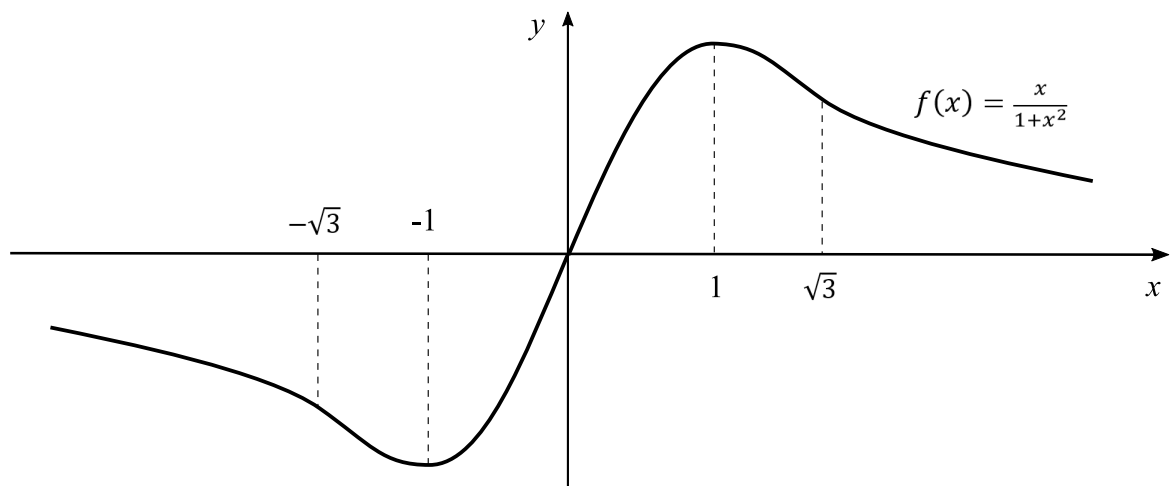
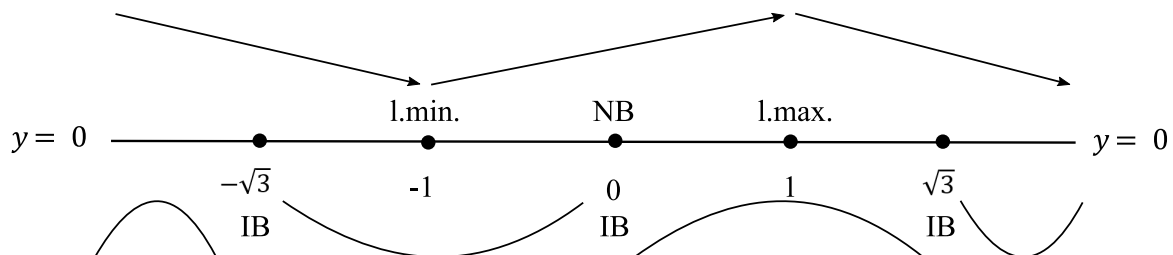
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}; D_{f'} = D_f; SB = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \right\}$$

2.14 Průběh funkce

1. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$, f je lichá

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}, \quad Df' = Df$$

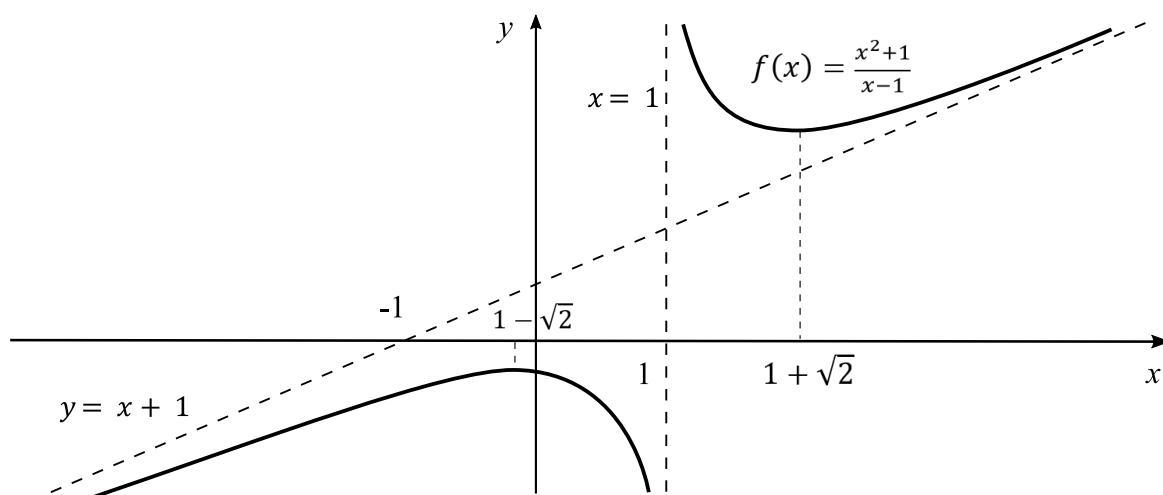
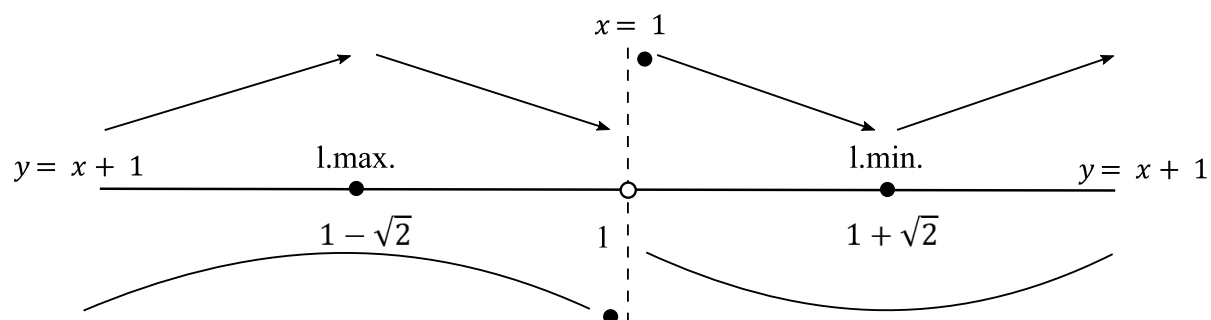
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}, \quad Df'' = Df$$



$$2. Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}, Df' = Df$$

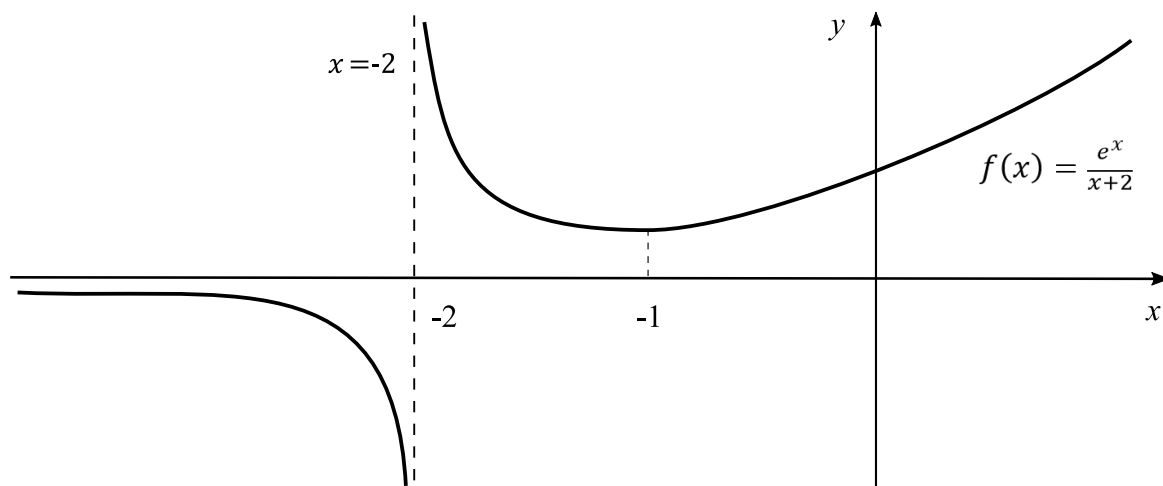
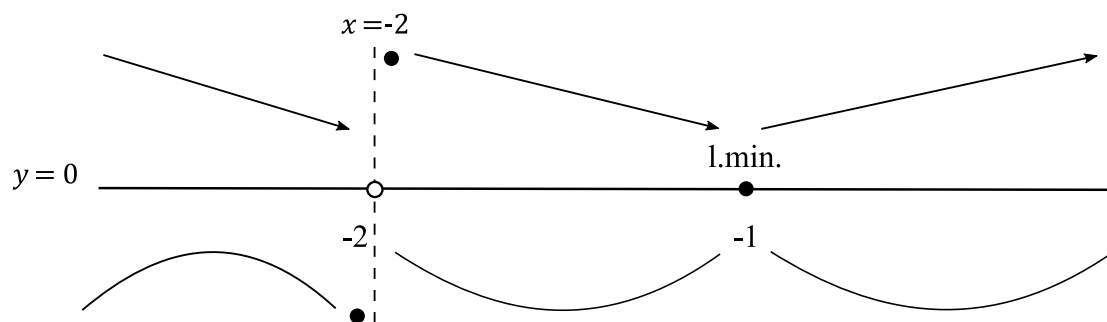
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}, Df'' = Df$$



$$3. Df = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, P_y : \left(0, \frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = e^x \frac{x+1}{(x+2)^2}, Df' = Df,$$

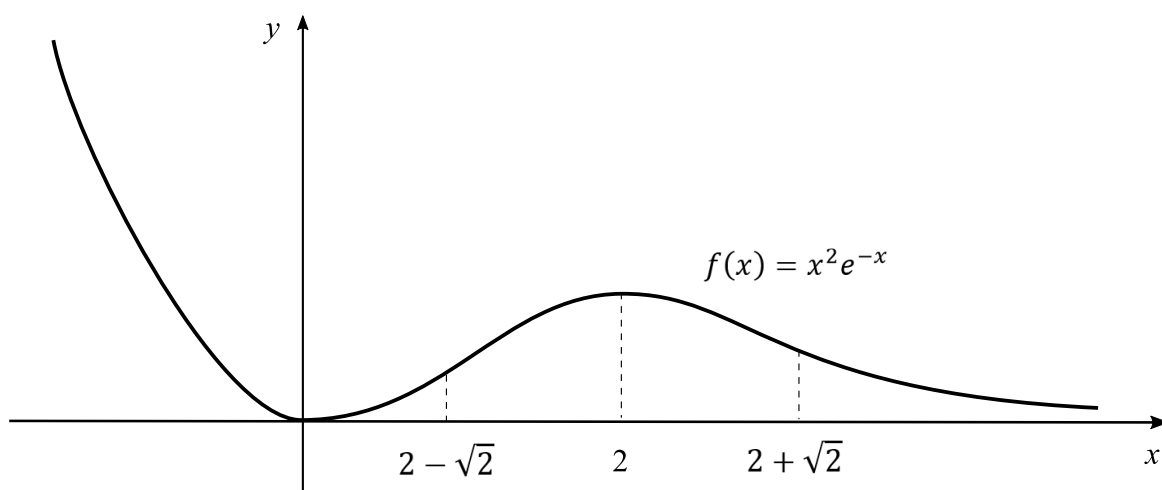
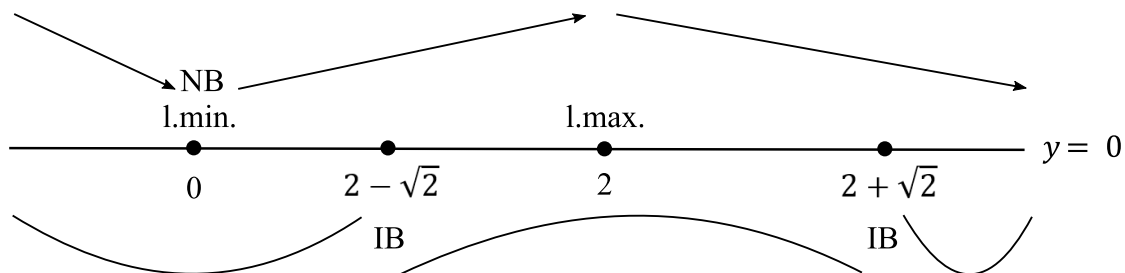
$$f''(x) = \frac{e^x}{(x+2)^3} (x^2 + 2x + 2), Df'' = Df$$



4. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

$$f'(x) = e^{-x}x(2-x), Df' = Df$$

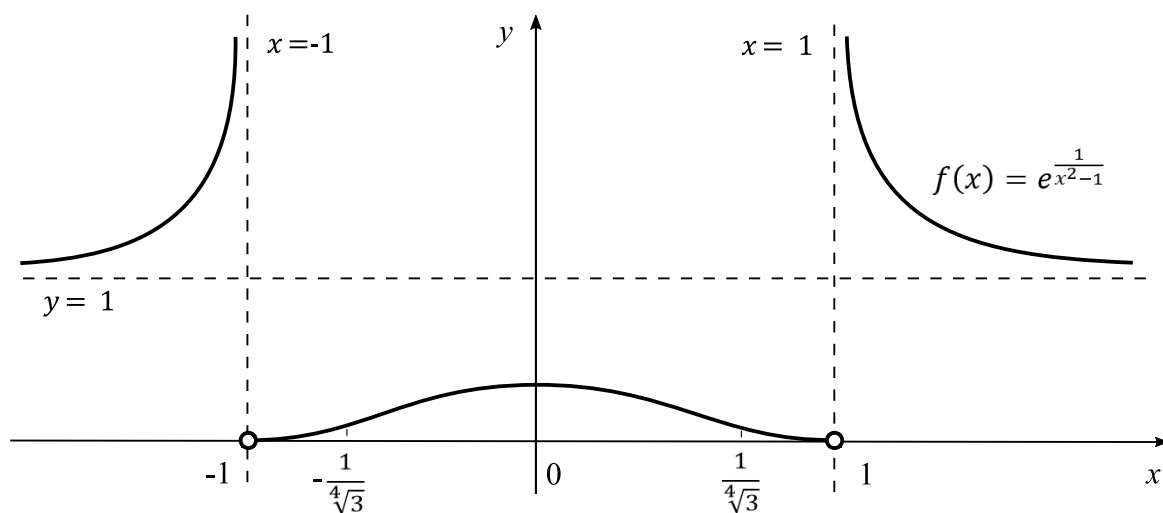
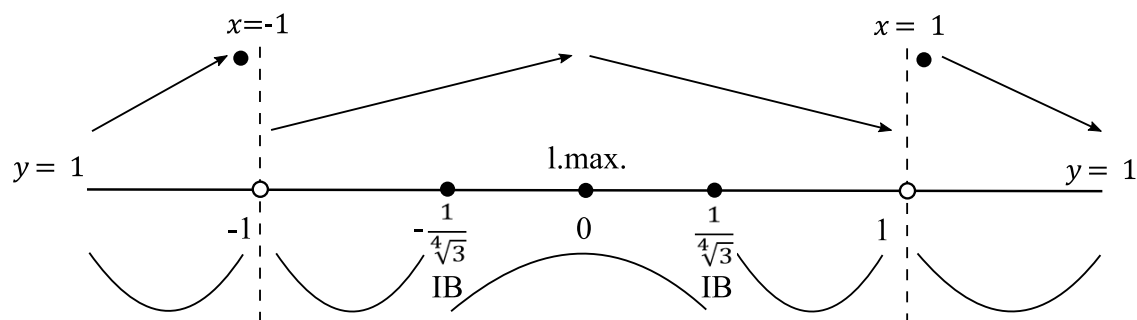
$$f''(x) = e^{-x}(2-4x+x^2), Df'' = Df$$



5. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, f je sudá

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{-2x}{(x^2-1)^2}, \quad Df' = Df$$

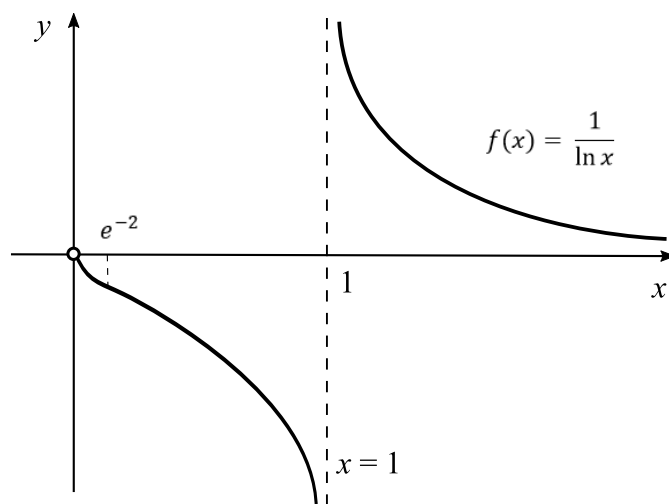
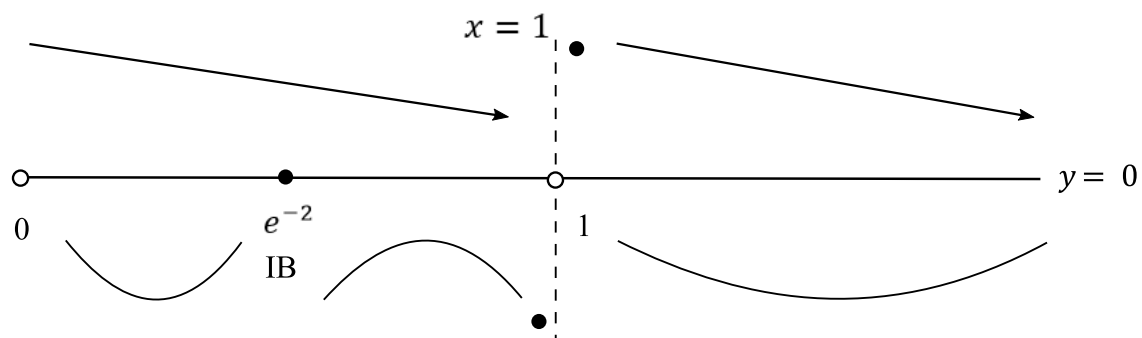
$$f''(x) = 2e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{3x^4-1}{(x^2-1)^4}, \quad Df'' = Df$$



6. $Df = (0, \infty) \setminus \{1\}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-1}{x \ln^2 x}, \quad Df' = Df$$

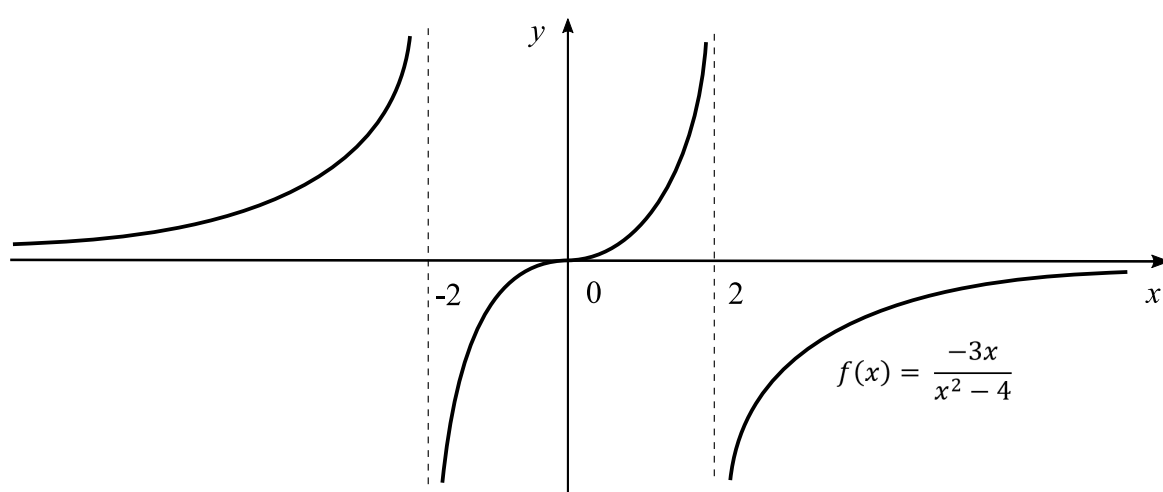
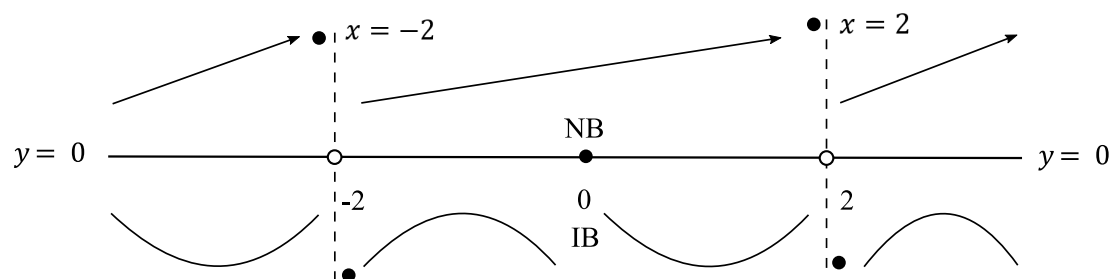
$$f''(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}, \quad Df'' = Df$$



7. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$; f je lichá

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}, \quad Df' = Df$$

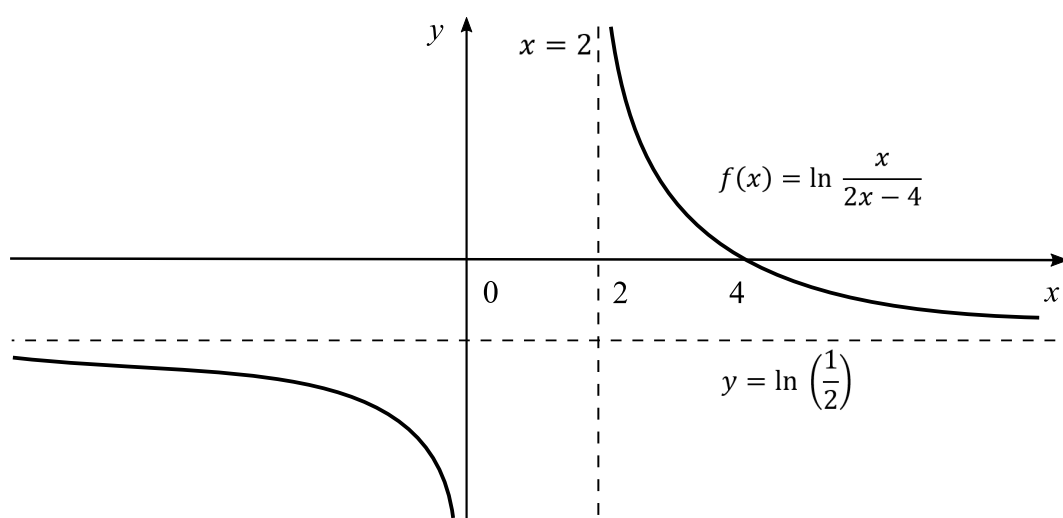
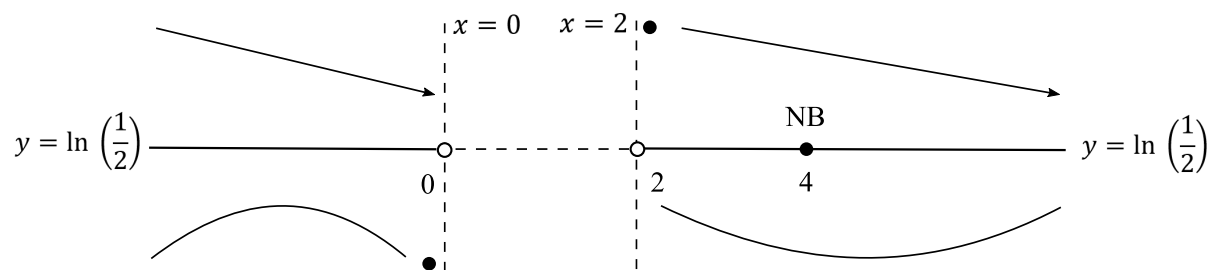
$$f''(x) = \frac{-6x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}, \quad Df'' = Df$$



8. $Df = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $P_x : (4, 0)$

$$f'(x) = \frac{-4}{x(2x-4)}, Df' = Df$$

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2}, Df'' = Df$$



9. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (k\pi, 0)$, kde $k \in \mathbb{Z}$; f není periodická, limita v $-\infty$ neexistuje

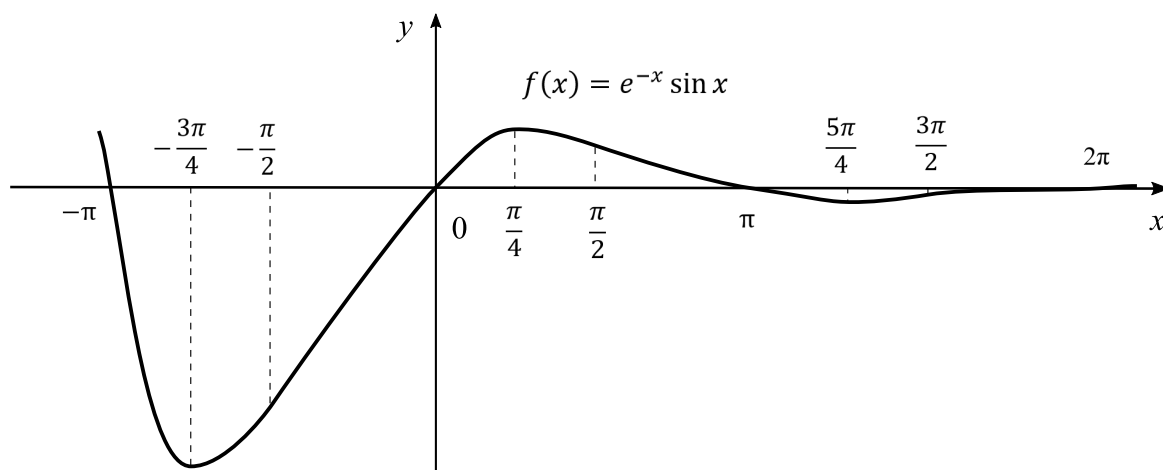
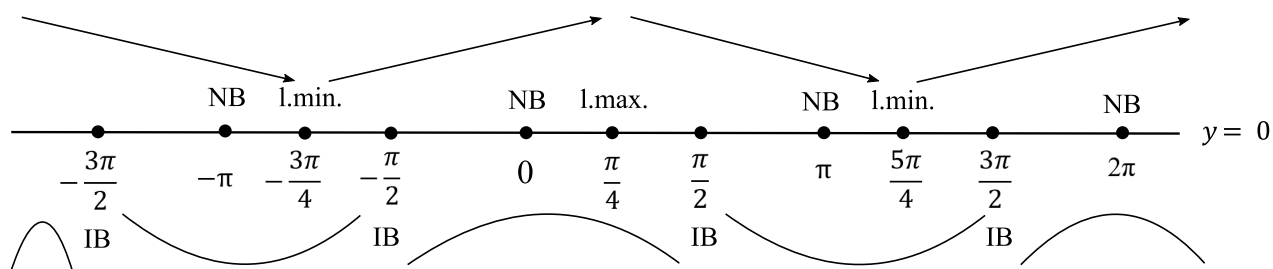
$$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x), Df' = Df$$

$$f''(x) = -2e^{-x} \cos x, Df'' = Df$$

lok. maximum v $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$

lok. minimum v $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$

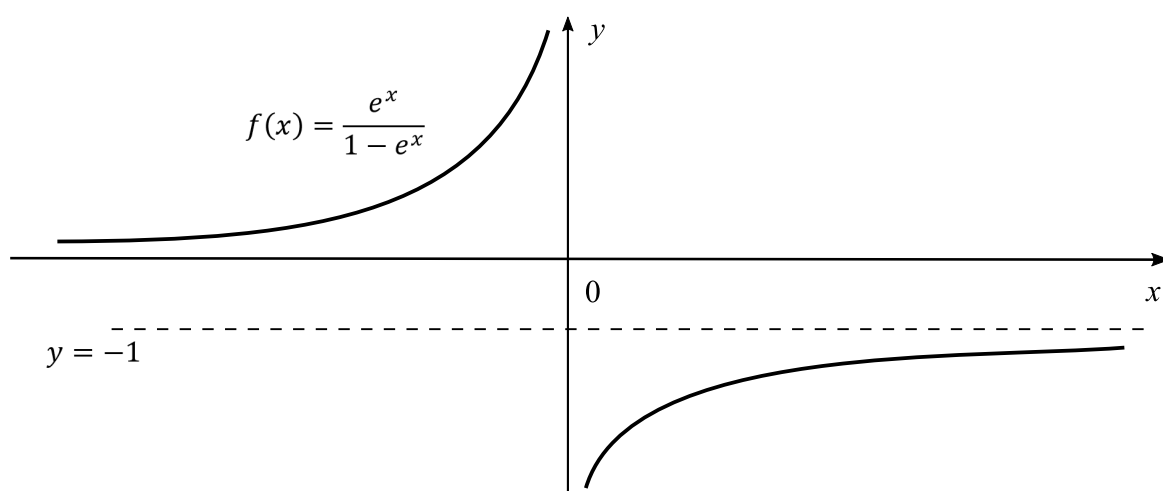
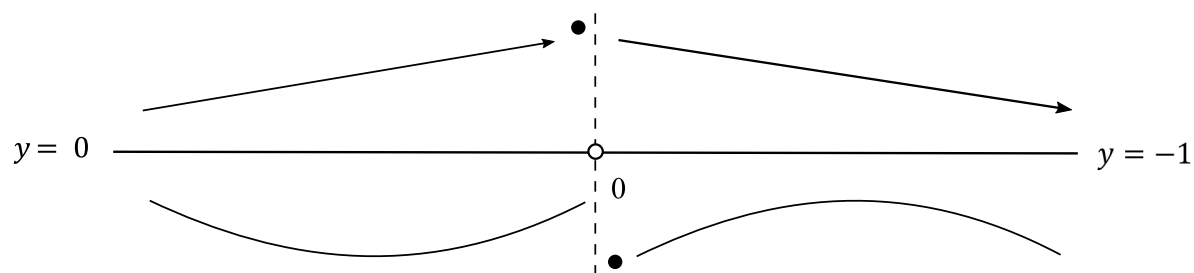
inflexní body $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$



10. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1 - e^x)^2}, \quad Df' = Df$$

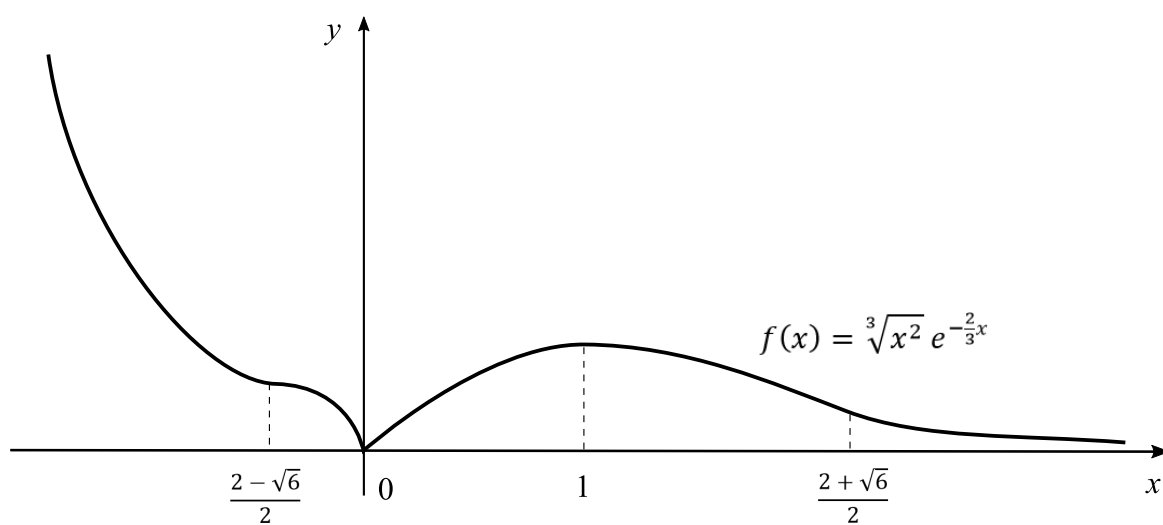
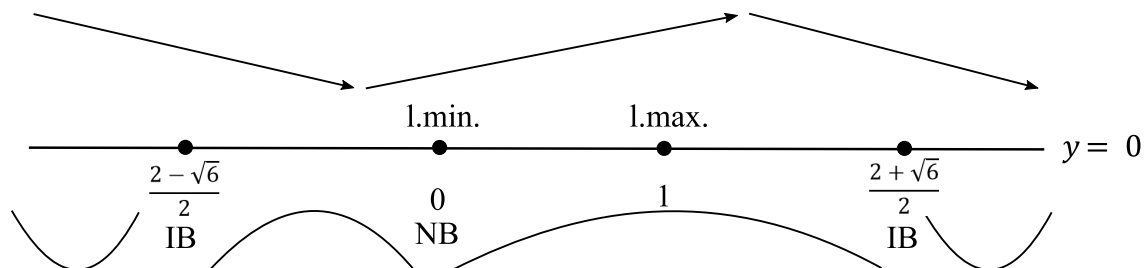
$$f''(x) = \frac{e^x(1 + e^x)}{(1 - e^x)^3}, \quad Df'' = Df$$



11. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} \left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}} \right), \quad Df' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

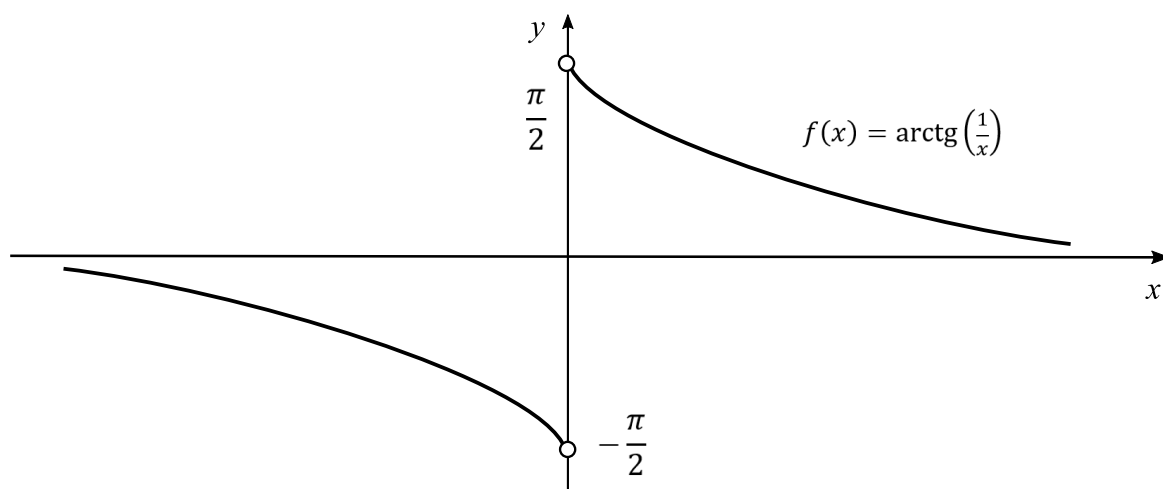
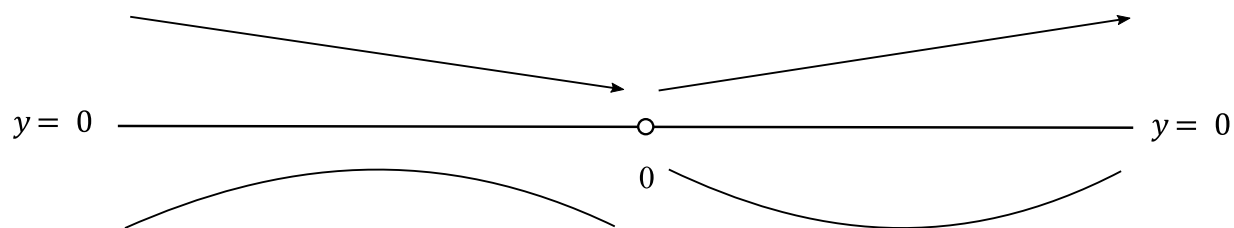
$$f''(x) = \frac{2}{9}e^{-\frac{2}{3}x} \frac{2x^2 - 4x - 1}{x\sqrt[3]{x}}, \quad Df'' = Df'$$



12. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkce f je lichá

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad Df' = Df$$

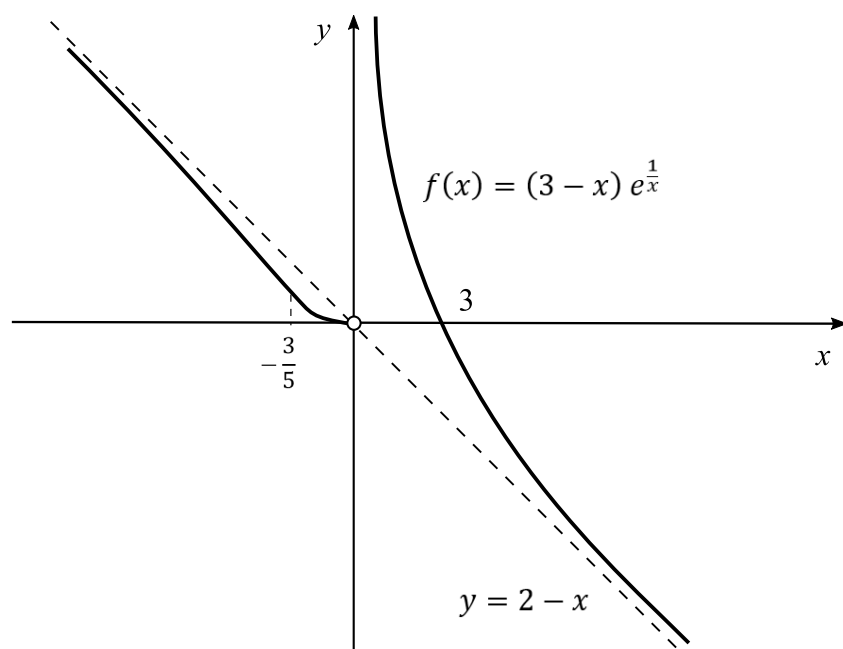
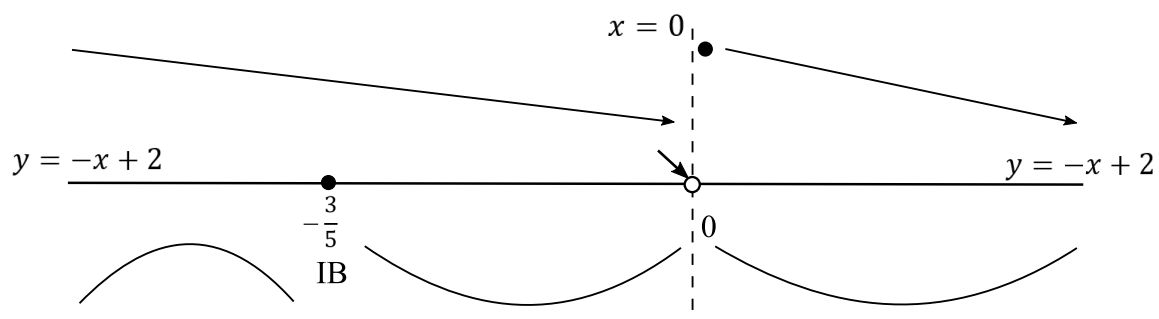
$$f''(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad Df'' = Df$$



13. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $P_x : (3, 0)$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} \right), \quad Df' = Df$$

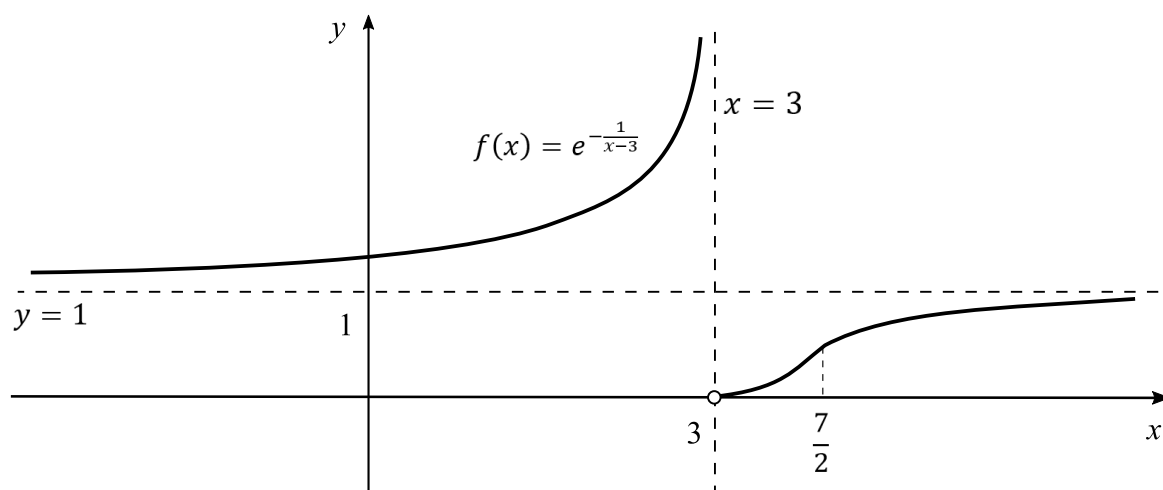
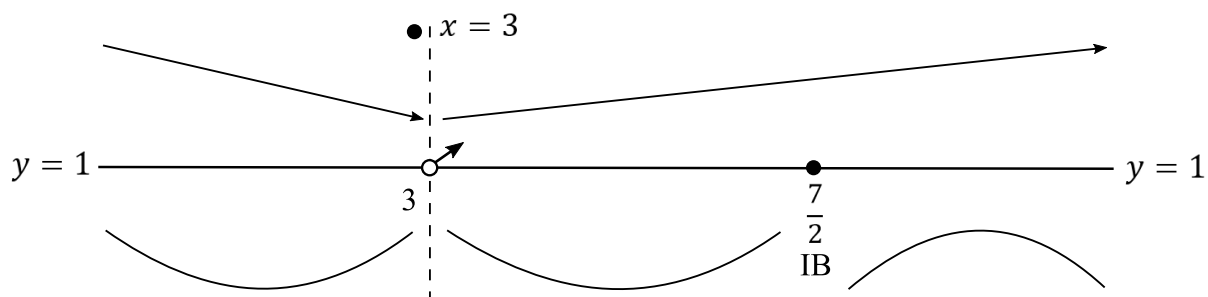
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{3 + 5x}{x^4}, \quad Df'' = Df$$



14. $Df = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $P_y : (0, e^{\frac{1}{3}})$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x-3}} \frac{1}{(x-3)^2}, \quad Df' = Df$$

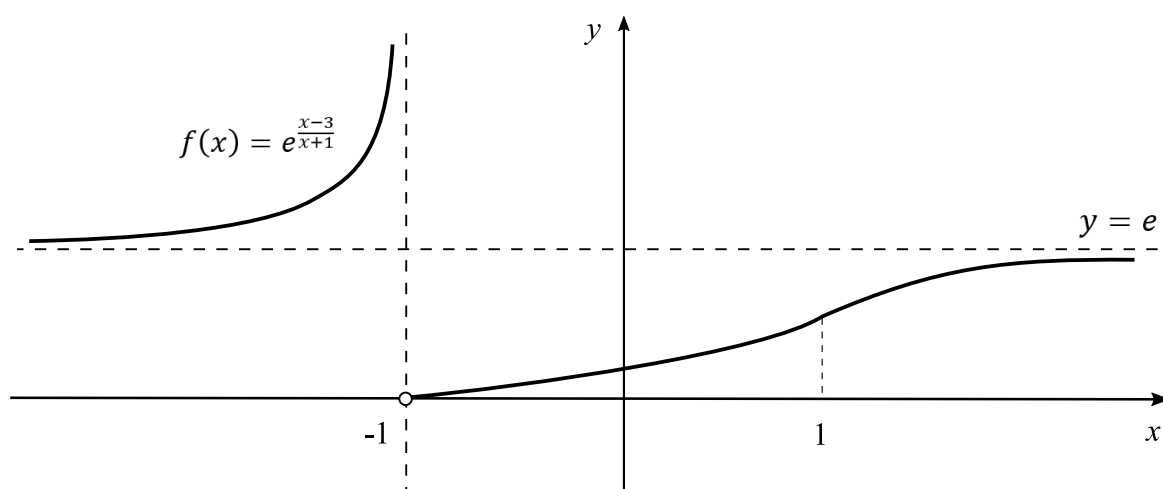
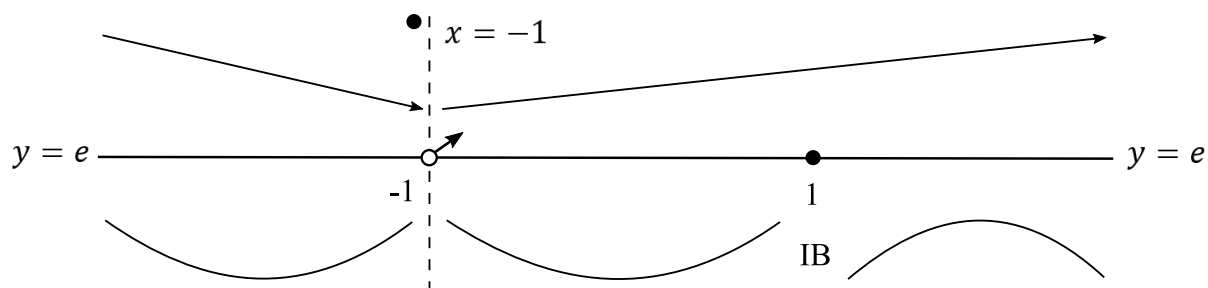
$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x-3}} \frac{7-2x}{(x-3)^4}, \quad Df'' = Df$$



15. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $P_y : (0, e^{-3})$

$$f'(x) = e^{\frac{x-3}{x+1}} \frac{4}{(x+1)^2}, \quad Df' = Df$$

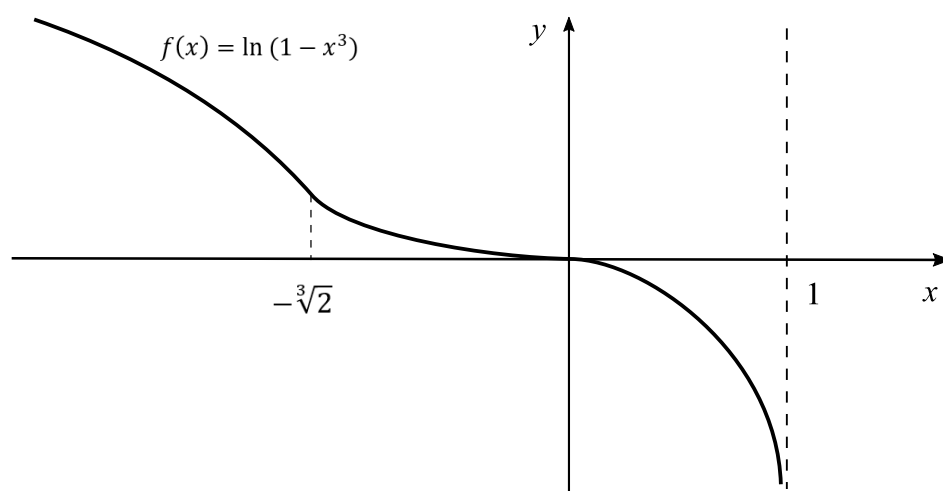
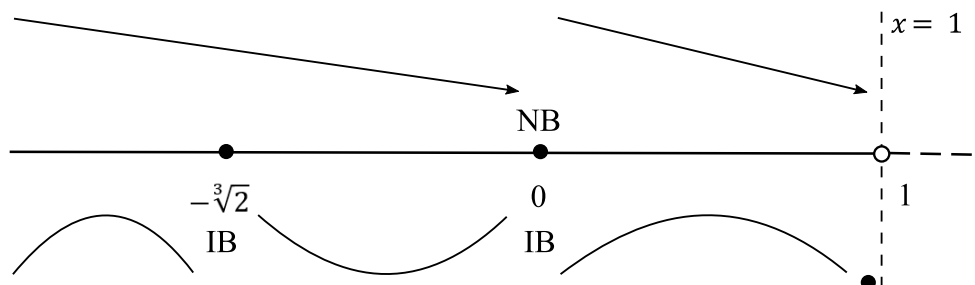
$$f''(x) = e^{\frac{x-3}{x+1}} \frac{8(1-x)}{(x+1)^4}, \quad Df'' = Df$$



16. $Df = (-\infty, 1)$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{1-x^3}, \quad Df' = Df$$

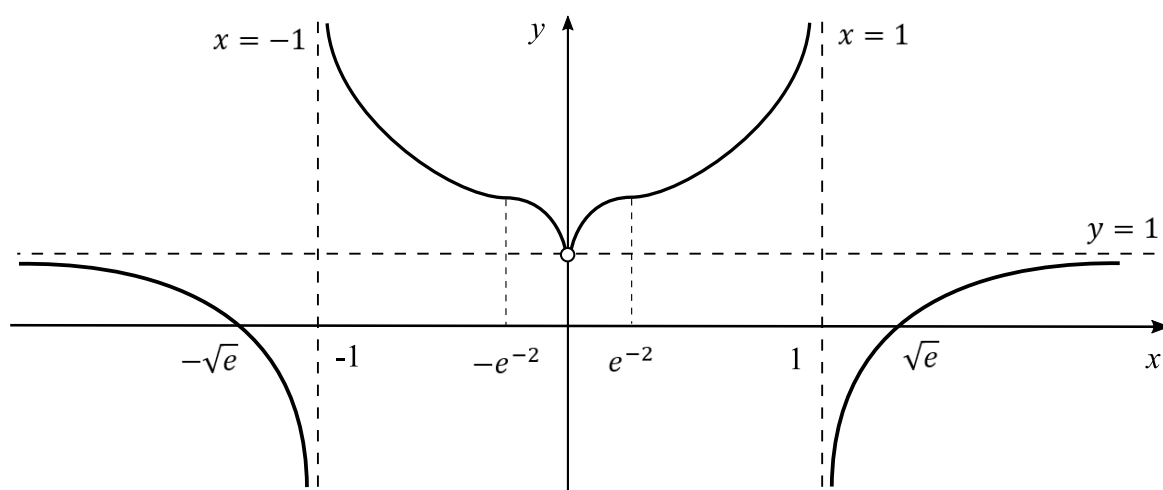
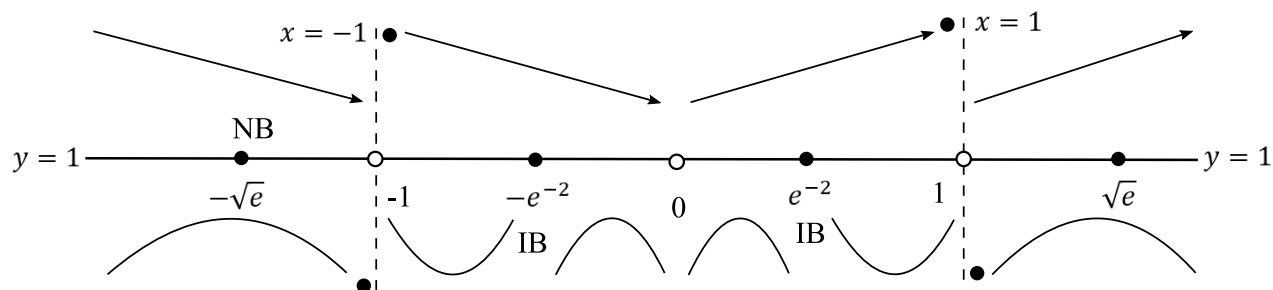
$$f''(x) = -\frac{3x(x^3+2)}{(1-x^3)^2}, \quad Df'' = Df$$



17. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $P_x : (-\sqrt{e}, 0)$, $P_x : (\sqrt{e}, 0)$, funkce f je sudá

$$f'(x) = \frac{2}{x \ln^2(x^2)}, \quad Df' = Df$$

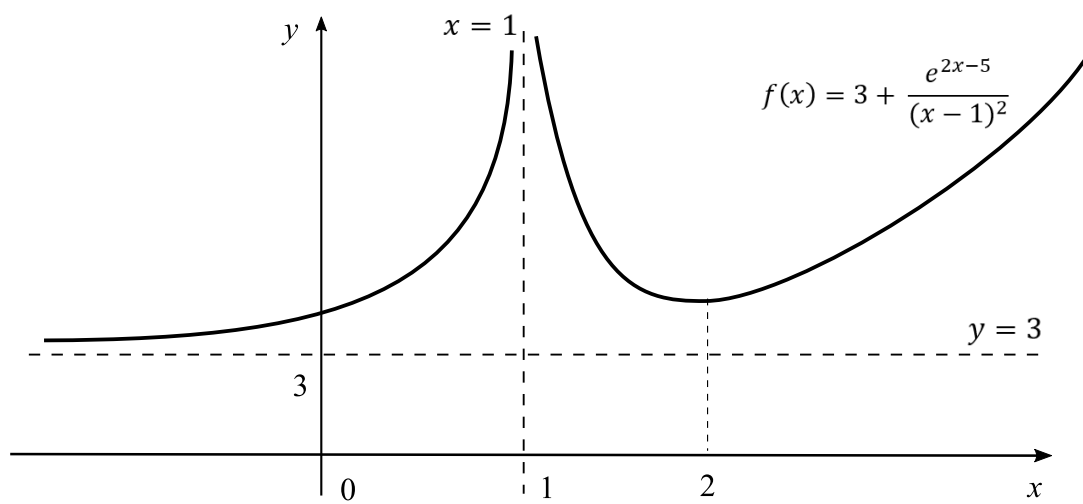
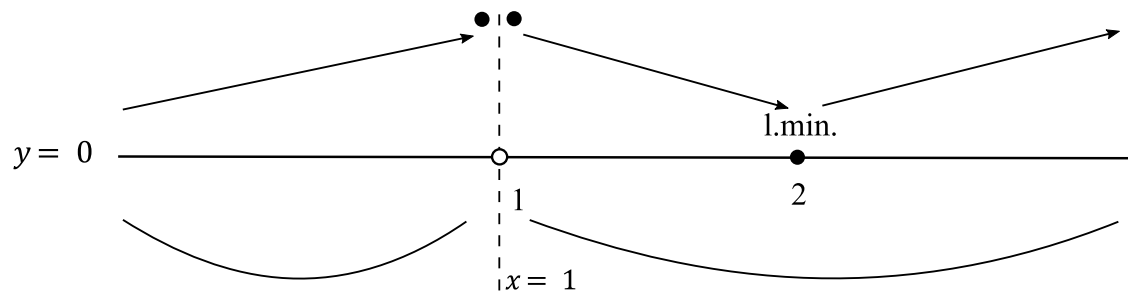
$$f''(x) = \frac{-2}{x^2 \ln^3(x^2)} (\ln(x^2) + 4), \quad Df'' = Df$$



18. $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $P_y : (0, 3 + e^{-5})$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x-5}(x-2)}{(x-1)^3}, \quad Df' = Df$$

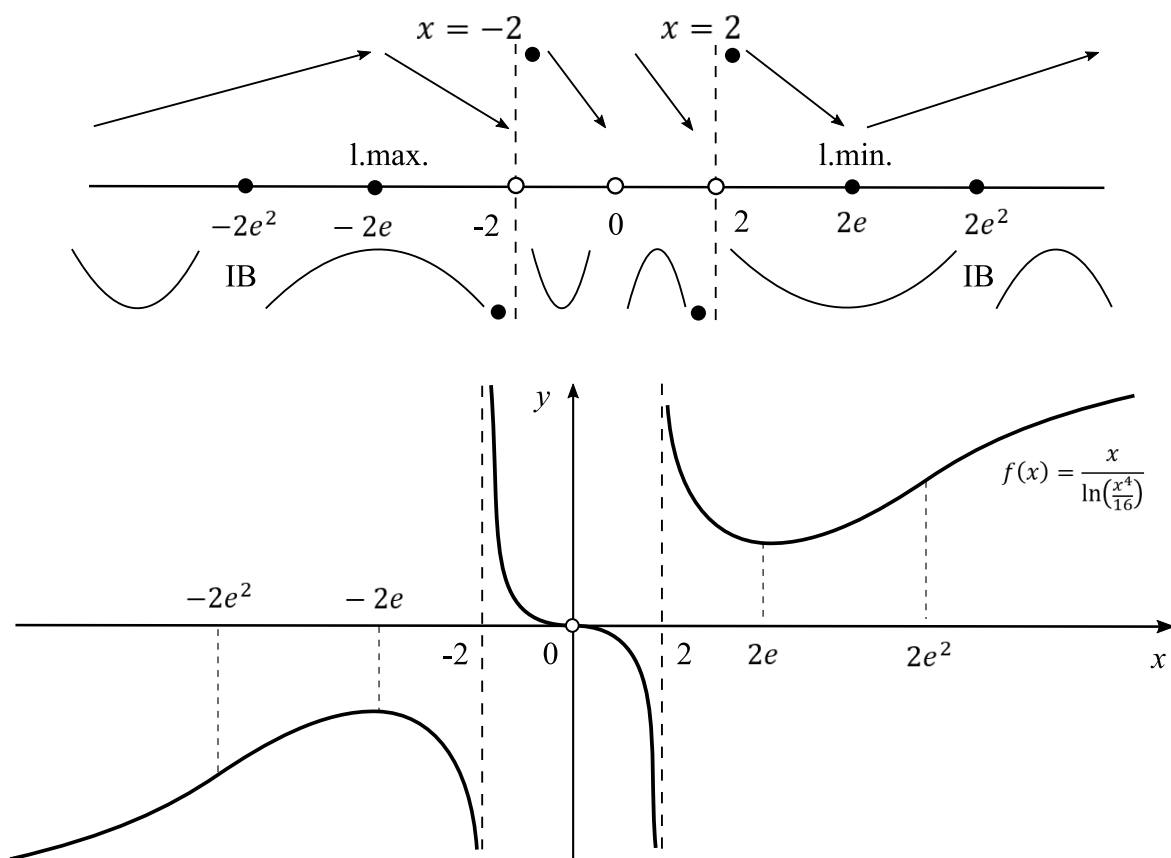
$$f''(x) = \frac{2e^{2x-5}(2x^2 - 8x + 9)}{(x-1)^4}, \quad Df'' = Df$$



19. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, funkce f je lichá

$$f'(x) = \frac{\ln\left(\frac{x^4}{16}\right) - 4}{\ln^2\left(\frac{x^4}{16}\right)}, \quad Df' = Df$$

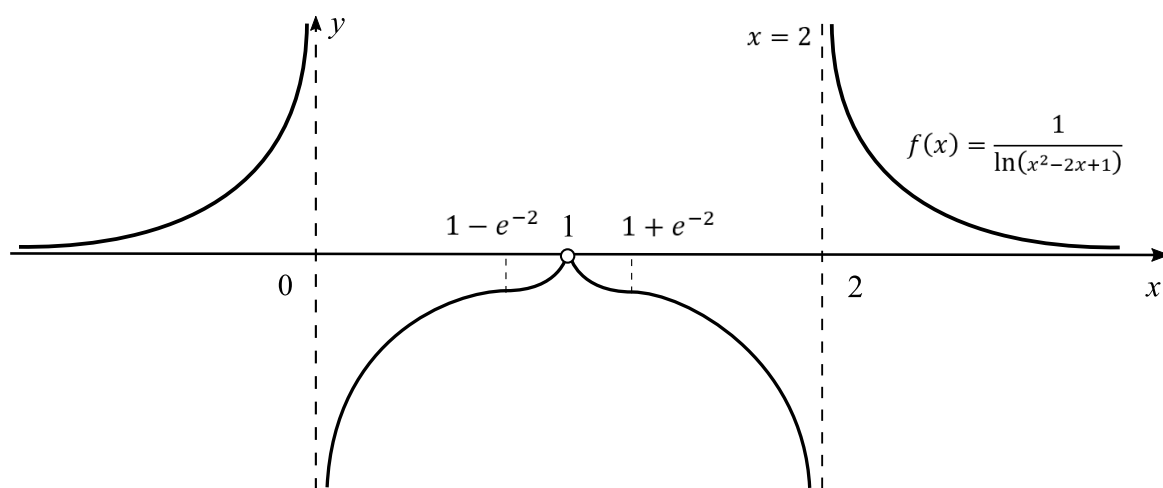
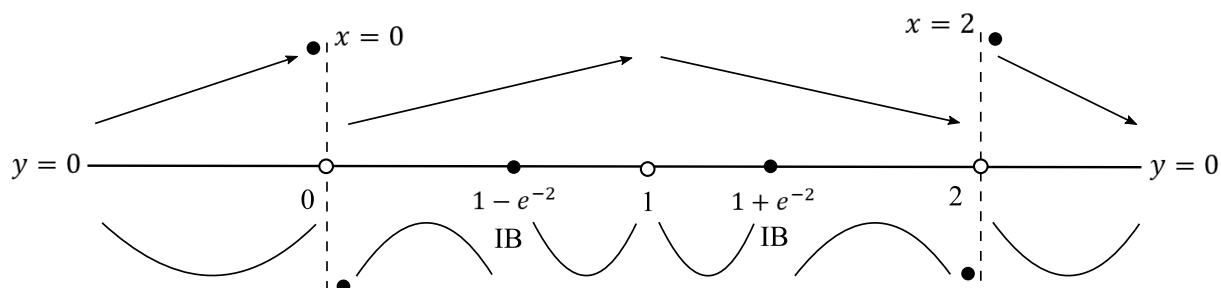
$$f''(x) = \frac{4 \cdot \left(8 - \ln\left(\frac{x^4}{16}\right)\right)}{x \ln^3\left(\frac{x^4}{16}\right)}, \quad Df'' = Df$$



20. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)\ln^2(x^2-2x+1)}, \quad Df' = Df$$

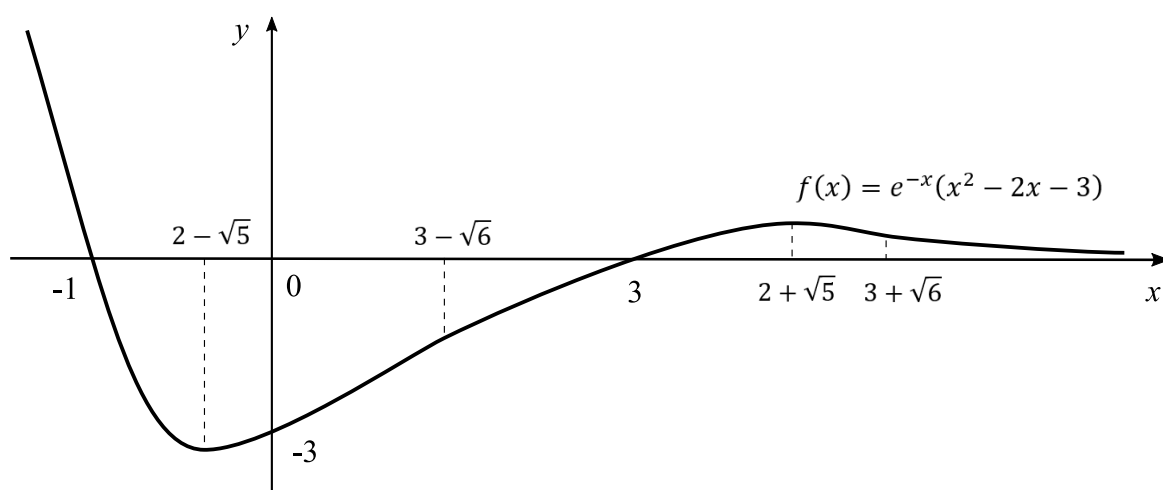
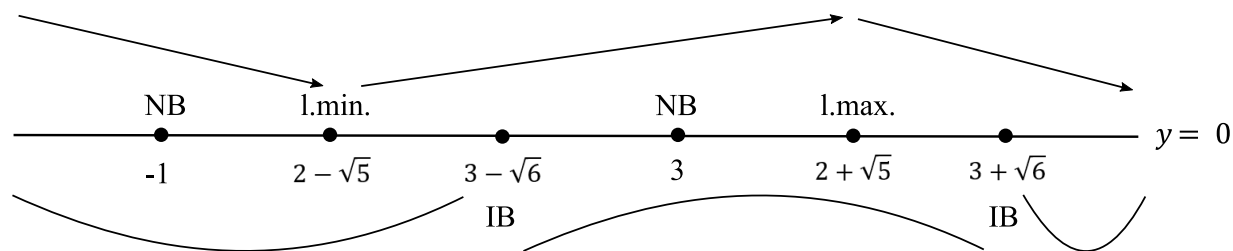
$$f''(x) = \frac{2(4 + \ln(x^2 - 2x + 1))}{(x-1)^2 \ln^3(x^2 - 2x + 1)}, \quad Df'' = Df$$



21. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (-1, 0)$, $P_x : (3, 0)$, $P_y : (0, -3)$

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x + 1), Df' = Df$$

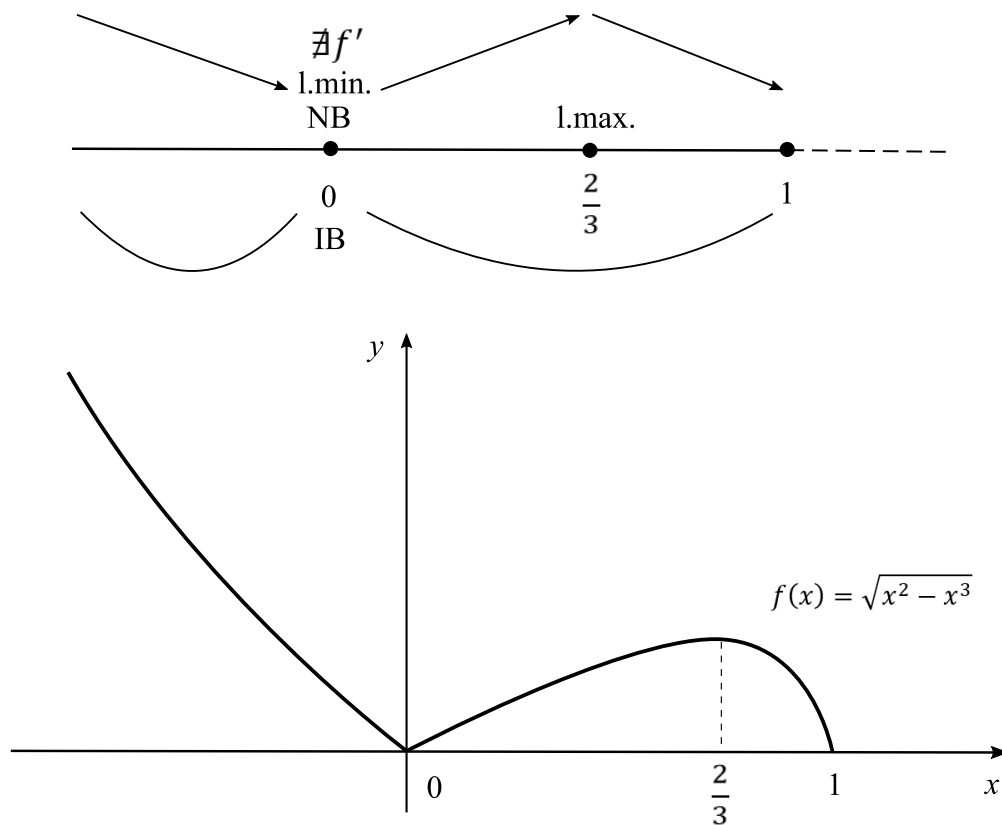
$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 6x + 3), Df'' = Df$$



22. $Df = (-\infty, 1]$, $P_x : (0, 0)$, $P_x : (1, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^2}{2\sqrt{x^2 - x^3}}, \quad Df' = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

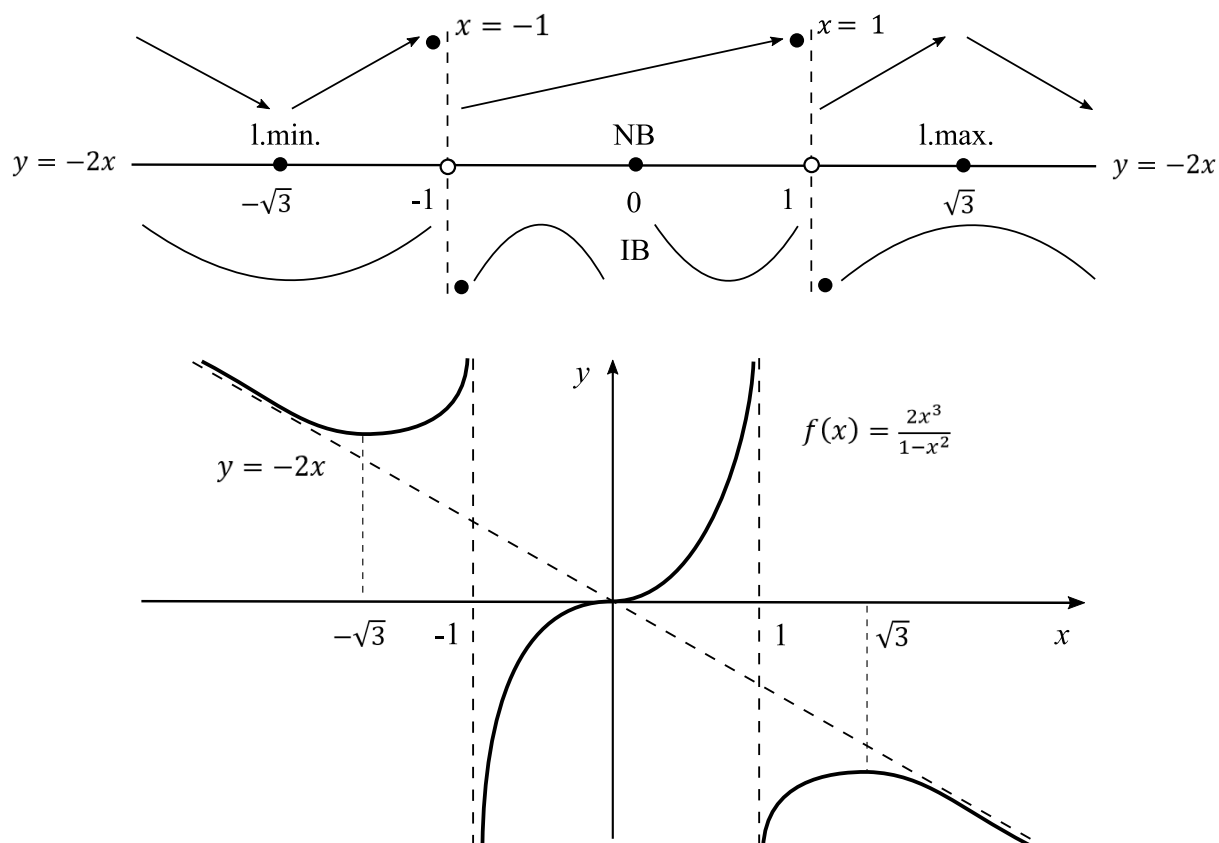
$$f''(x) = \frac{3x^4 - 4x^3}{4(\sqrt{x^2 - x^3})^3}, \quad Df'' = Df'$$



23. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$; funkce f je lichá

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x^4}{(1 - x^2)^2}, \quad Df' = Df$$

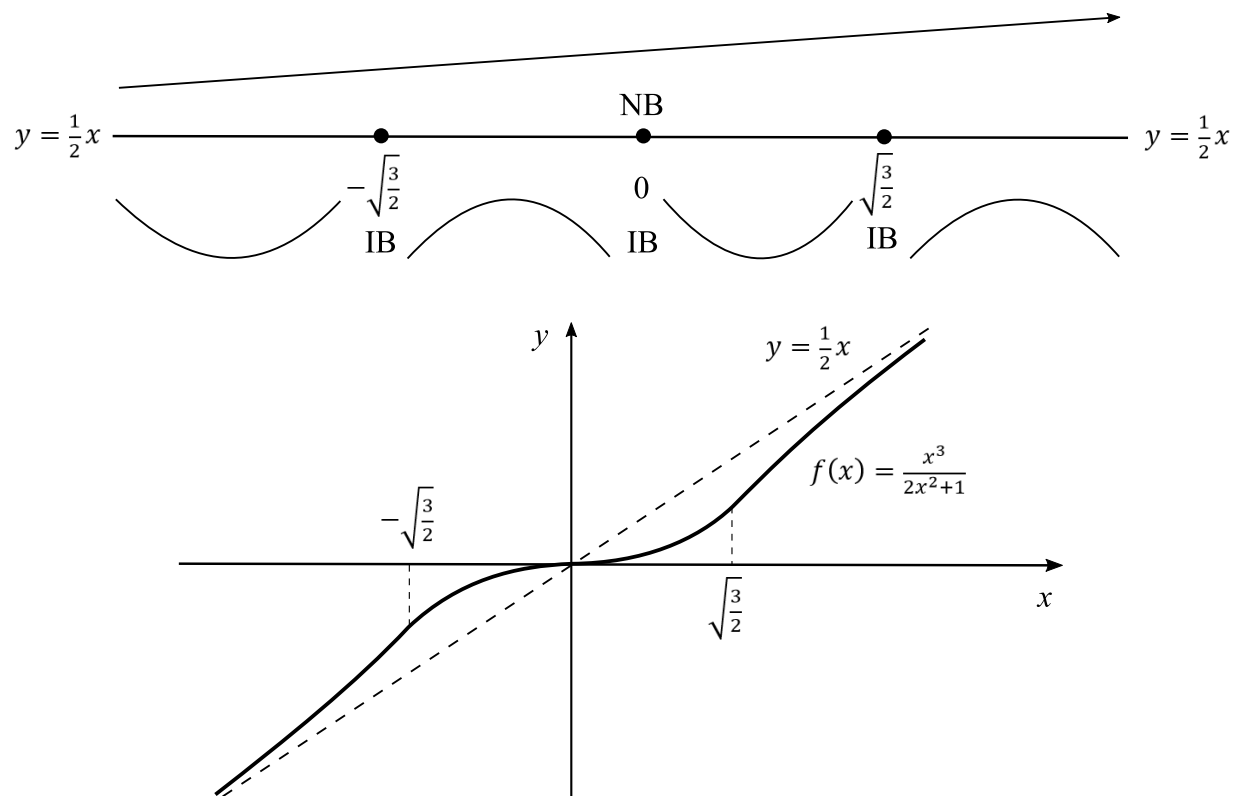
$$f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}, \quad Df'' = Df$$



24. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$; funkce f je lichá

$$f'(x) = \frac{x^2(2x^2 + 3)}{(2x^2 + 1)^2}, \quad Df' = Df$$

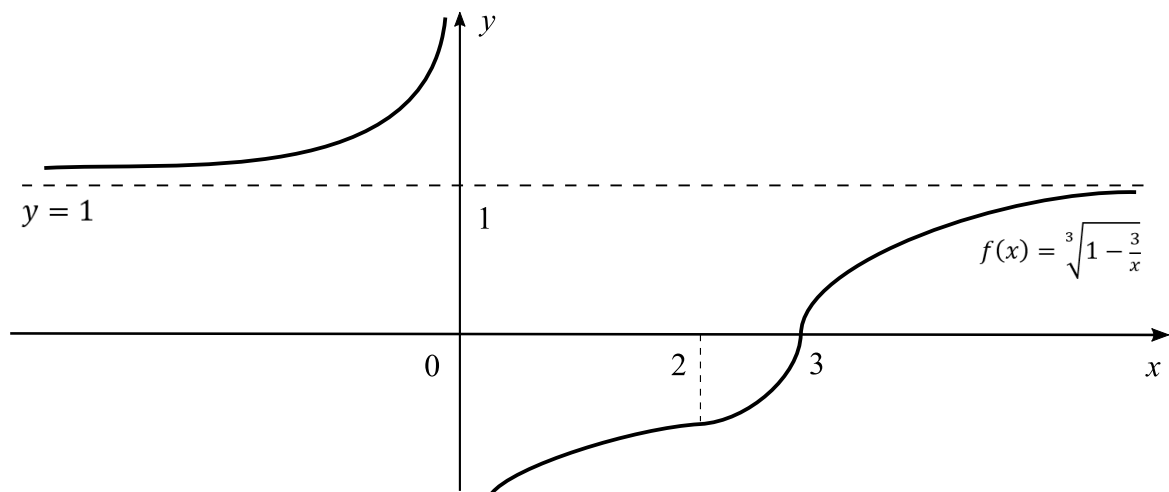
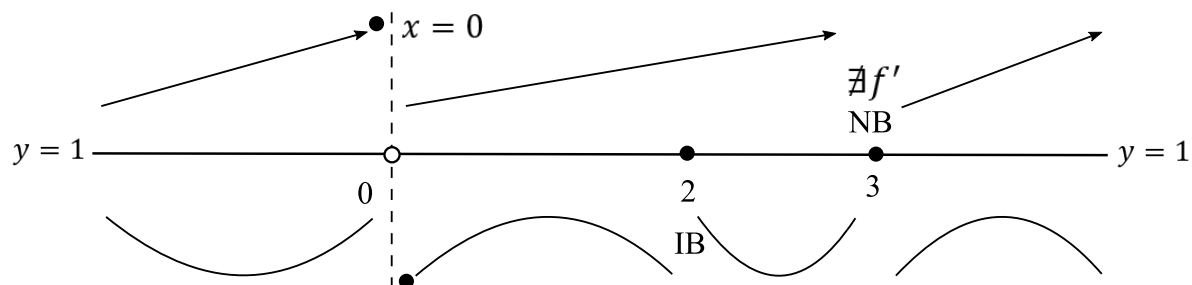
$$f''(x) = \frac{-2x(2x^2 - 3)}{(2x^2 + 1)^3}, \quad Df'' = Df$$



25. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $P_x : (3, 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - \frac{3}{x})^2}}, \quad Df' = Df \setminus \{3\}$$

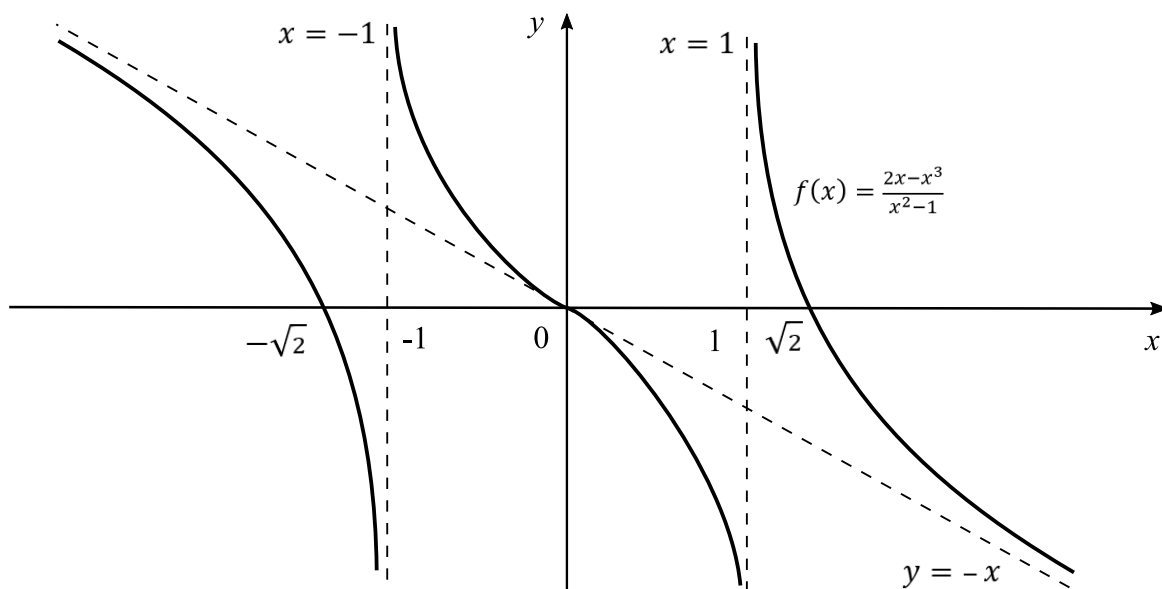
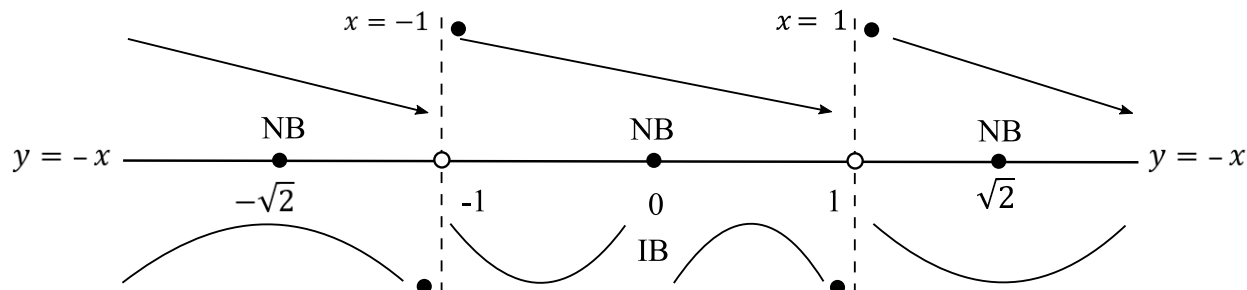
$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - \frac{3}{x})^2}} \cdot \frac{x-4}{x-3}, \quad Df'' = Df'$$



26. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $P_x : (0, 0)$, $P_x : (-\sqrt{2}, 0)$, $P_x : (\sqrt{2}, 0)$, $P_y : (0, 0)$; funkce f je lichá

$$f'(x) = \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}, \quad Df' = Df$$

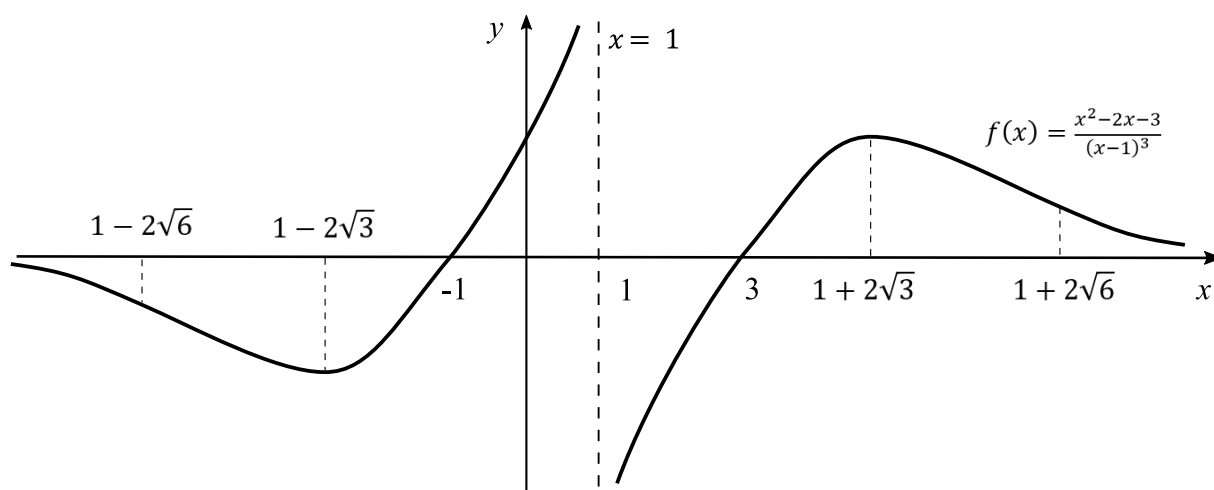
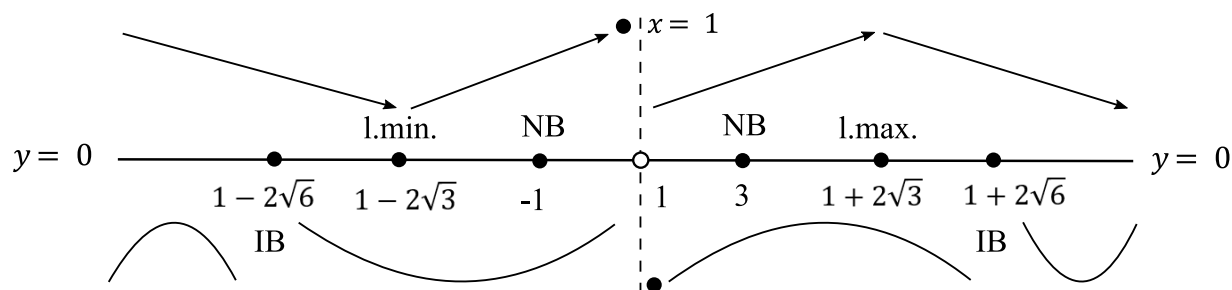
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad Df'' = Df$$



27. $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $P_x : (3, 0)$, $P_x : (-1, 0)$, $P_y : (0, 3)$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{(x-1)^4}, \quad Df' = Df$$

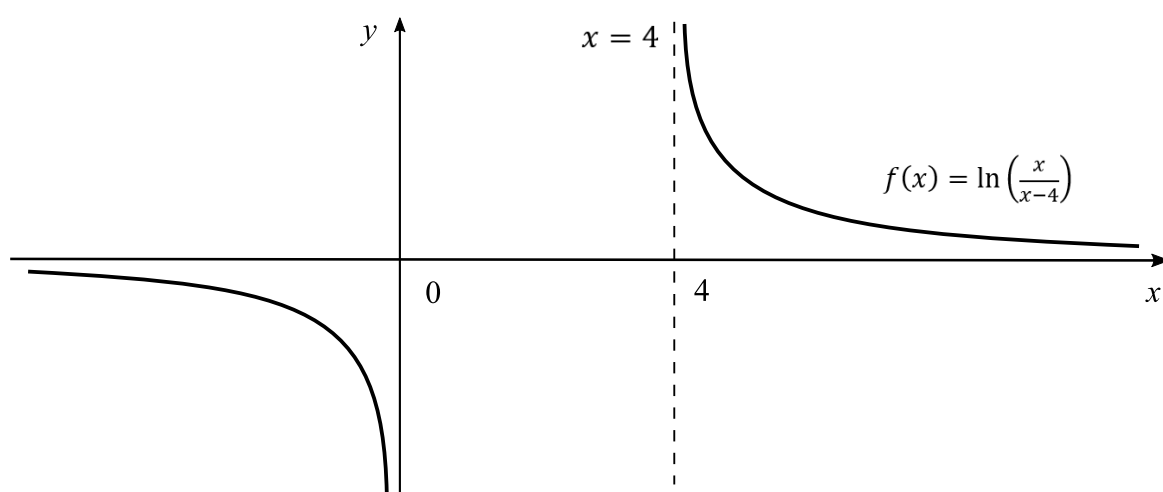
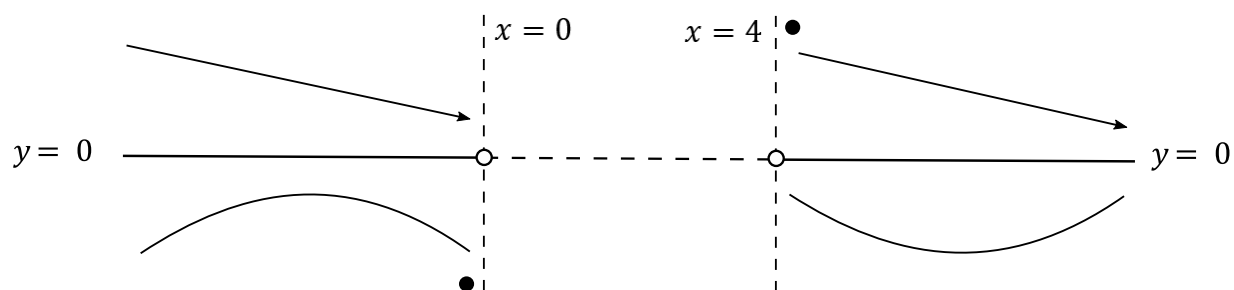
$$f''(x) = 2 \frac{x^2 - 2x - 23}{(x-1)^5}, \quad Df'' = Df$$



28. $Df = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

$$f'(x) = \frac{-4}{x(x-4)}, \quad Df' = Df$$

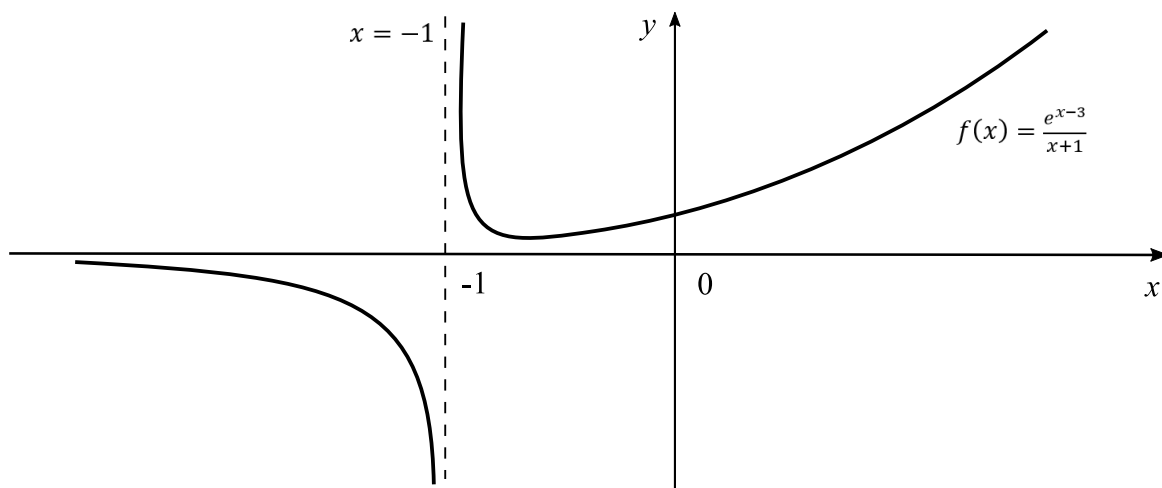
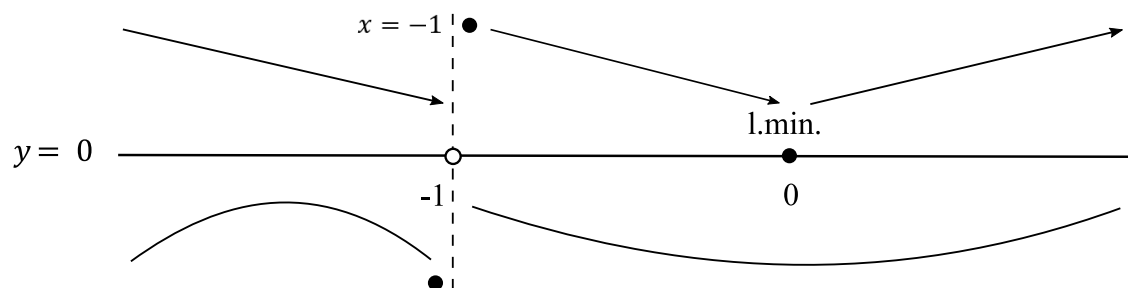
$$f''(x) = \frac{4(2x-4)}{x^2(x-4)^2}, \quad Df'' = Df$$



29. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{xe^{x-3}}{(x+1)^2}, \quad Df' = Df$$

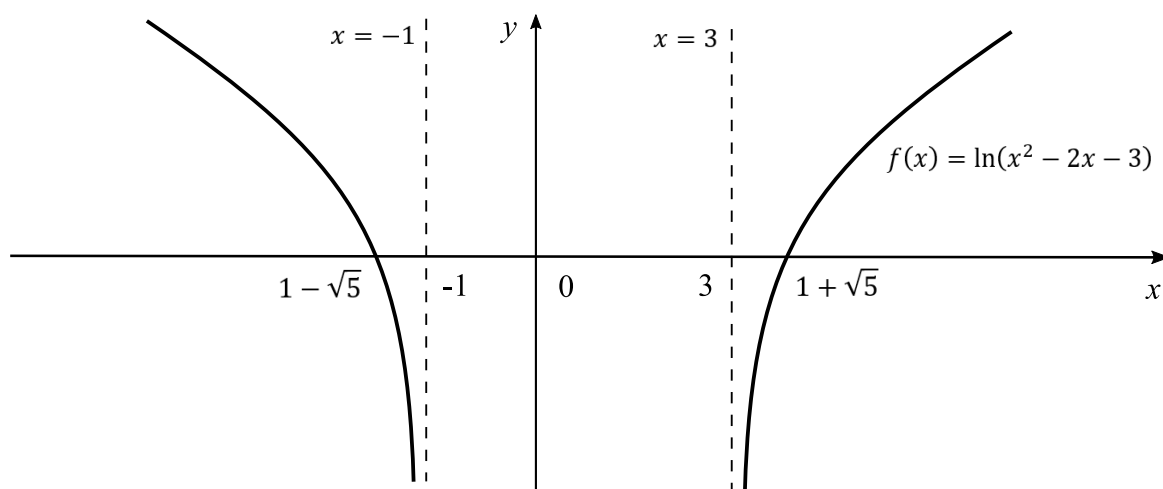
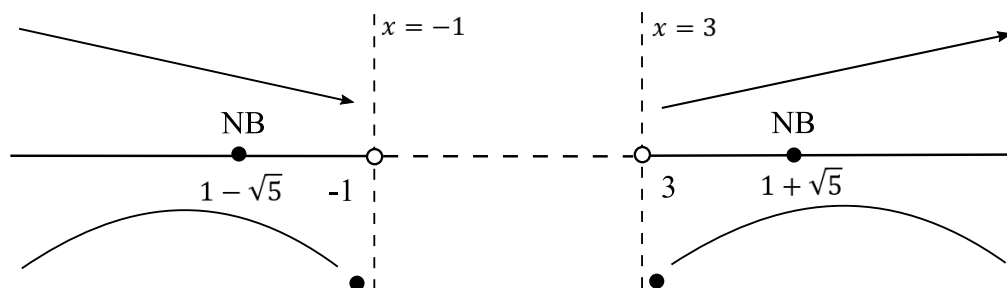
$$f''(x) = \frac{(x^2+1)e^{x-3}}{(x+1)^3}, \quad Df'' = Df$$



30. $Df = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $P_x : (1 - \sqrt{5}, 0)$, $P_x : (1 + \sqrt{5}, 0)$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}, \quad Df' = Df$$

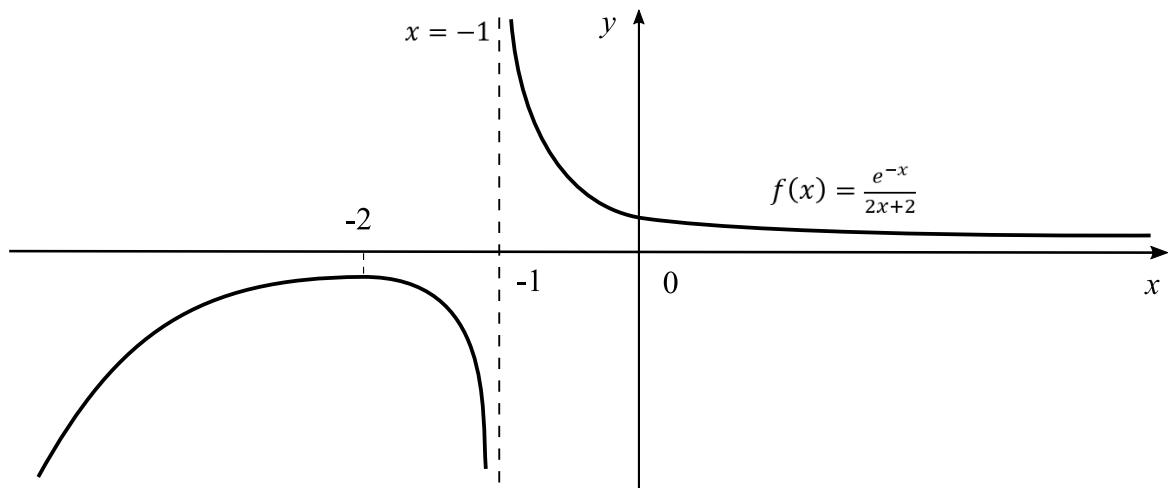
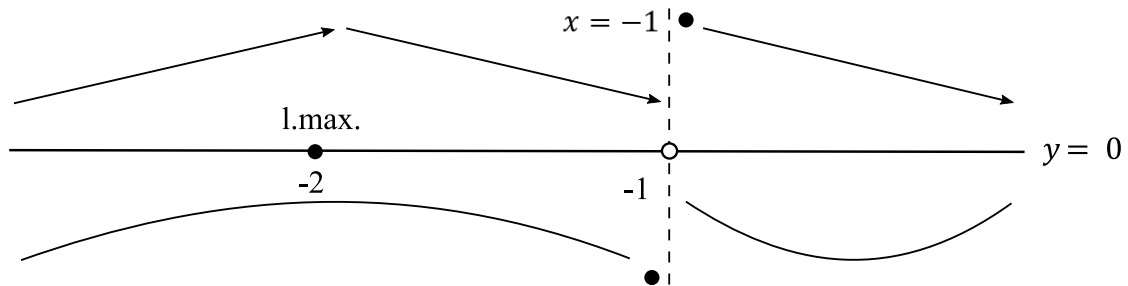
$$f''(x) = -2 \frac{x^2 - 2x + 5}{(x^2 - 2x - 3)^2}, \quad Df'' = Df$$



31. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $P_y : (0, \frac{1}{2})$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+2)}{2(x+1)^2}, \quad Df' = Df$$

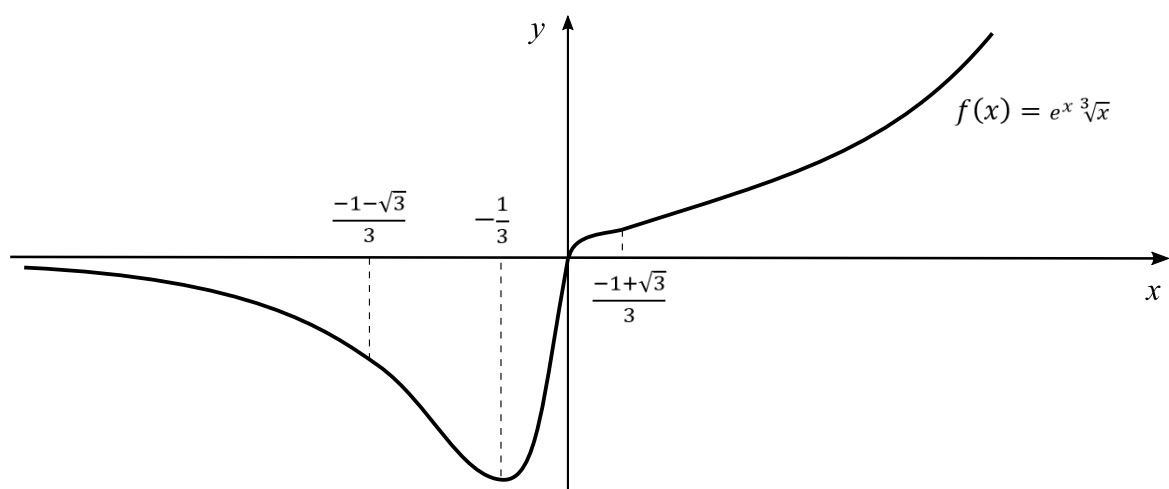
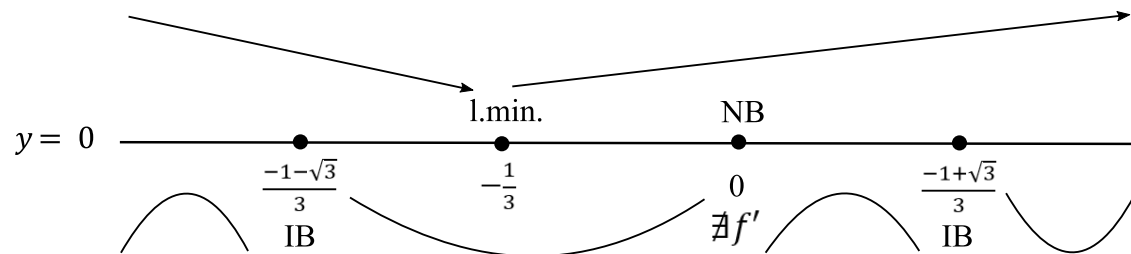
$$f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2 + 4x + 5)}{2(x+1)^3}, \quad Df'' = Df$$



32. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = \frac{e^x(3x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad Df' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

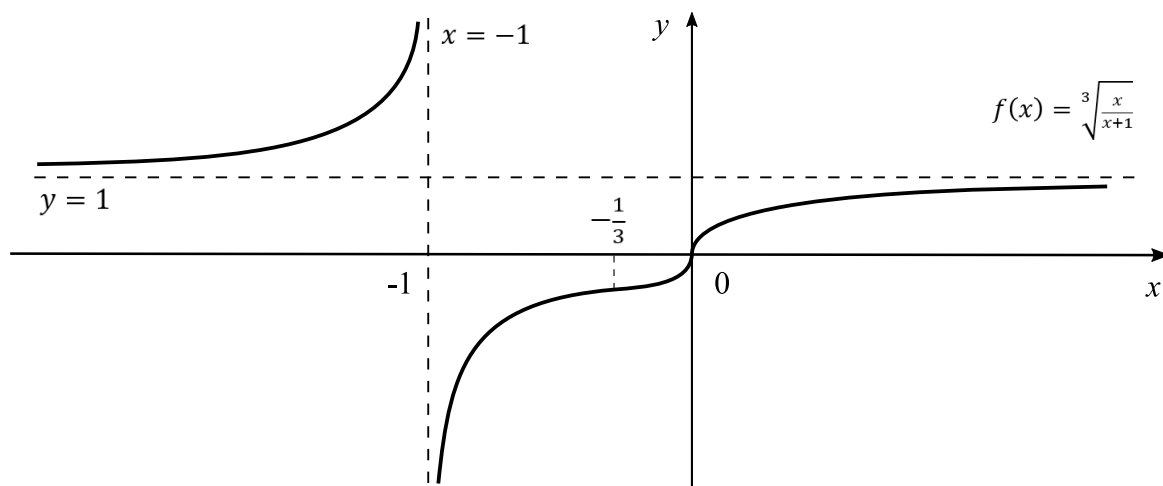
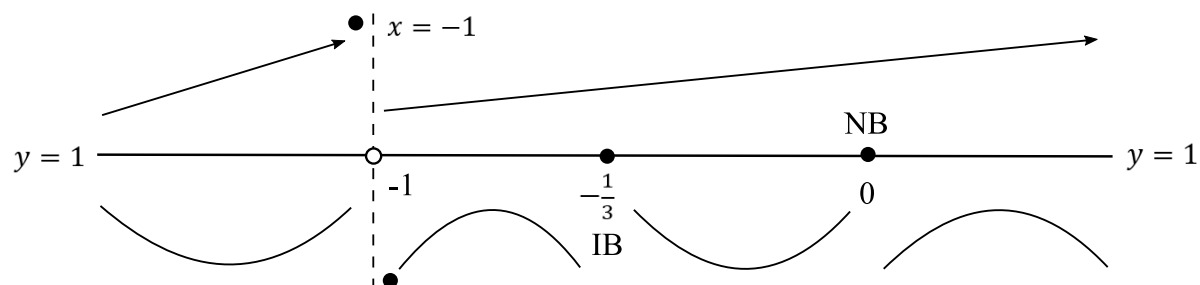
$$f''(x) = \frac{e^x(9x^2+6x-2)}{9\sqrt[3]{x^5}}, \quad Df'' = Df'$$



33. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2(x+1)^4}}, \quad Df' = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

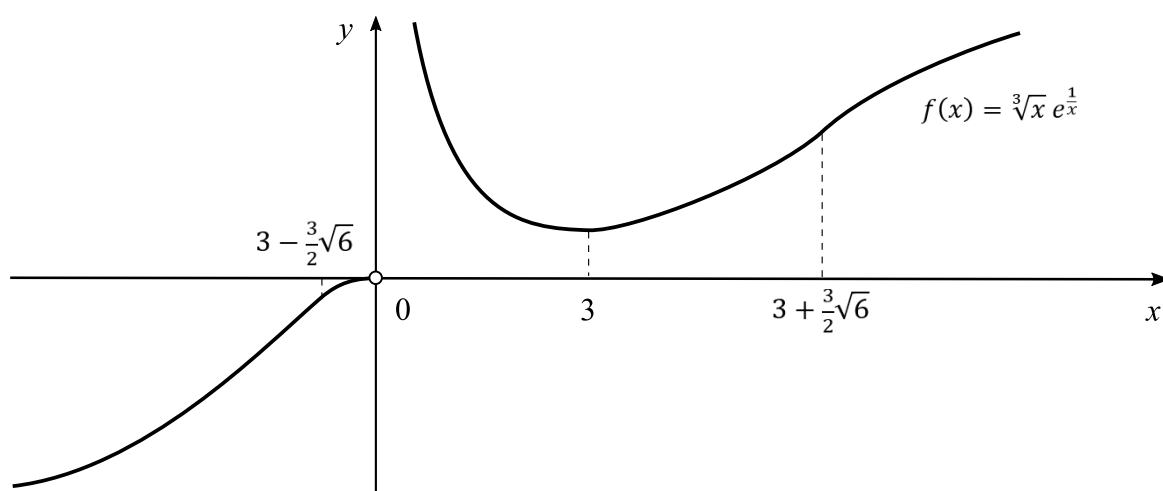
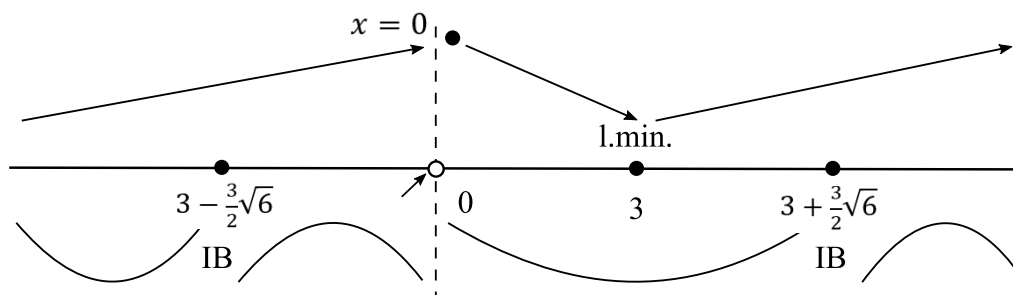
$$f''(x) = -\frac{2}{9} \sqrt[3]{\frac{1}{x^5(x+1)^7}} \cdot (3x+1), \quad Df'' = Df'$$



34. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-3}{3x\sqrt[3]{x^2}}, \quad Df' = Df$$

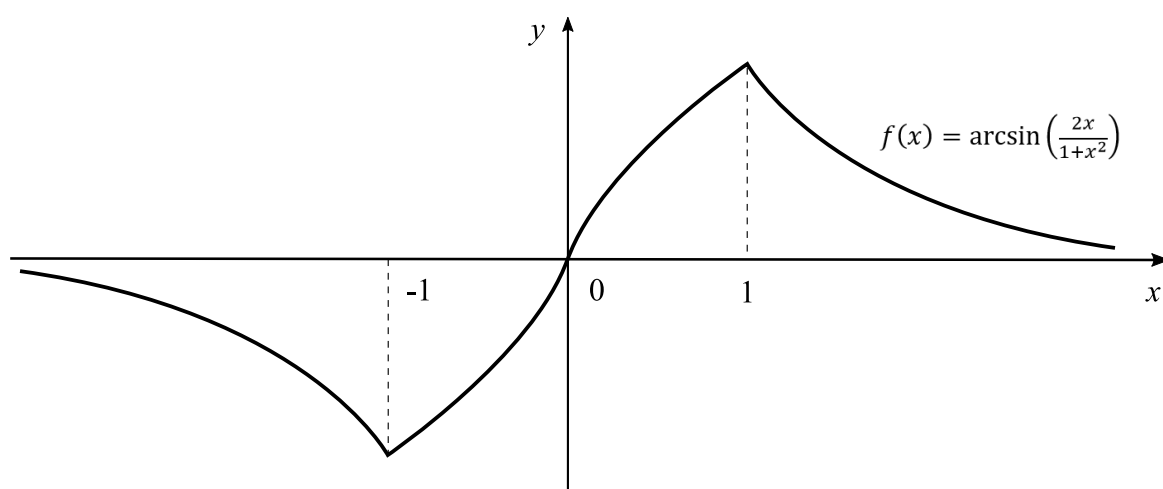
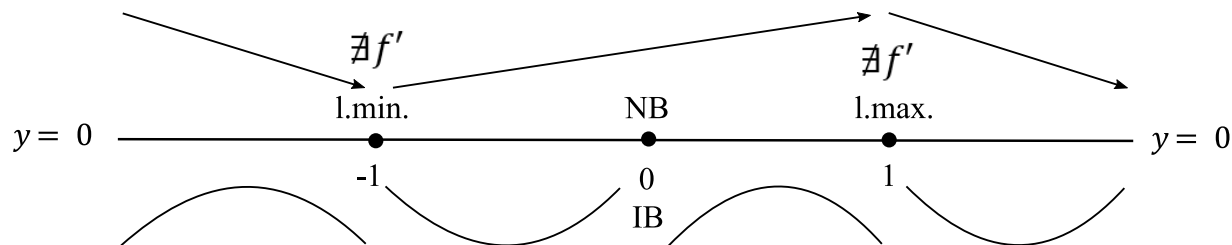
$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{-2x^2 + 12x + 9}{9\sqrt[3]{x^{11}}}, \quad Df'' = Df$$



35. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$; funkce f je lichá

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^2(1 + x^2)}} = \frac{-2\operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{1 + x^2}, \quad Df' = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

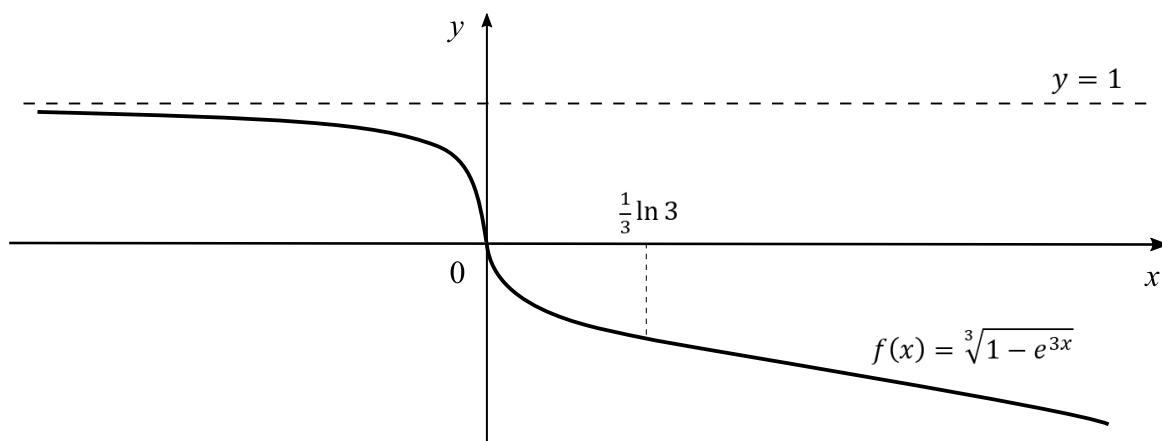
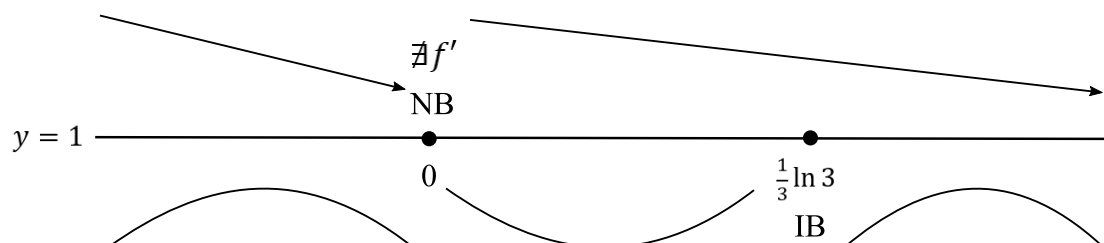
$$f''(x) = \frac{4x \cdot \operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^2}, \quad Df'' = Df'$$



36. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (0, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = \frac{-e^{3x}}{\sqrt[3]{(1 - e^{3x})^2}}, Df' = Df \setminus \{0\}$$

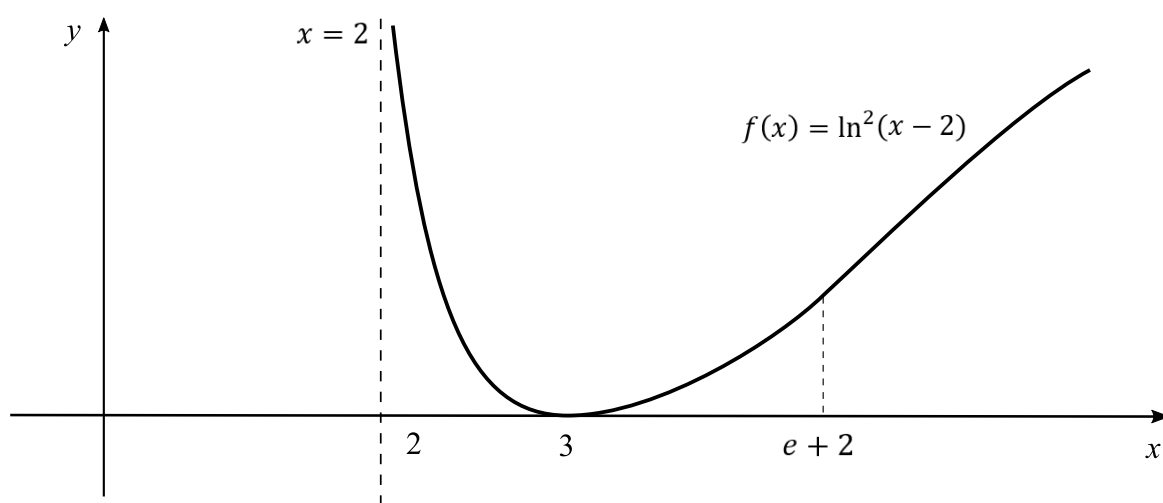
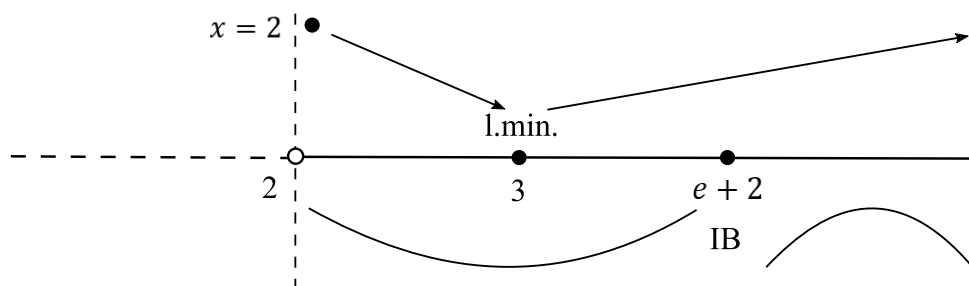
$$f''(x) = \frac{-e^{3x}(3 - e^{3x})}{\sqrt[3]{(1 - e^{3x})^5}}, Df'' = Df'$$



37. $Df = (2, \infty)$, $P_x : (3, 0)$

$$f'(x) = \frac{2 \ln(x-2)}{x-2}, \quad Df' = Df$$

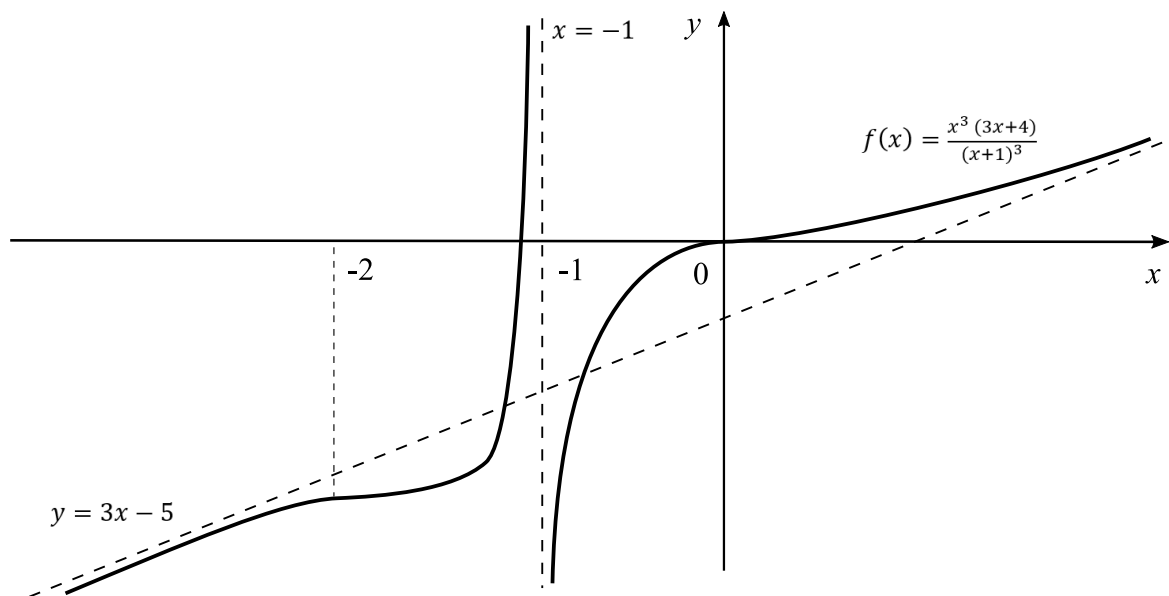
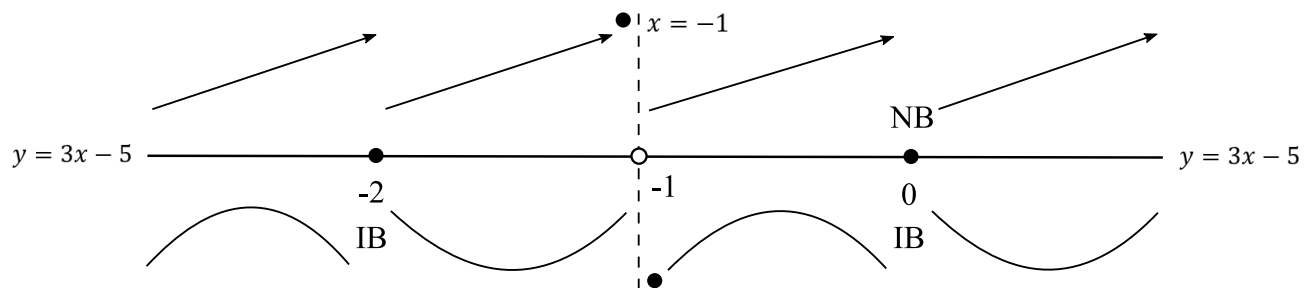
$$f''(x) = \frac{2 - 2 \ln(x-2)}{(x-2)^2}, \quad Df'' = Df$$



38. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $P_x : (0, 0)$, $P_x : (-\frac{4}{3}, 0)$, $P_y : (0, 0)$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2)^2}{(x+1)^4}, \quad Df' = Df$$

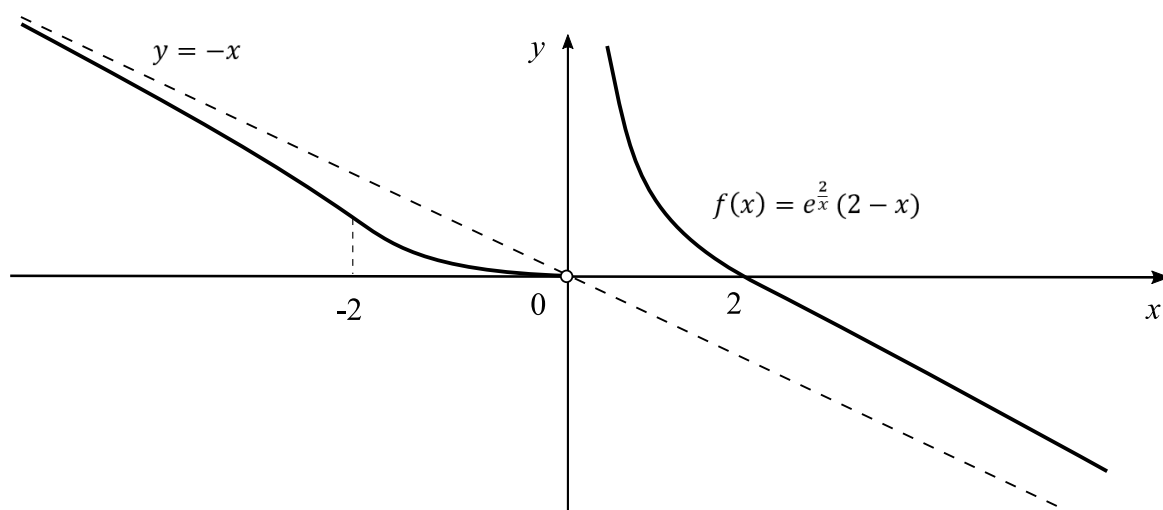
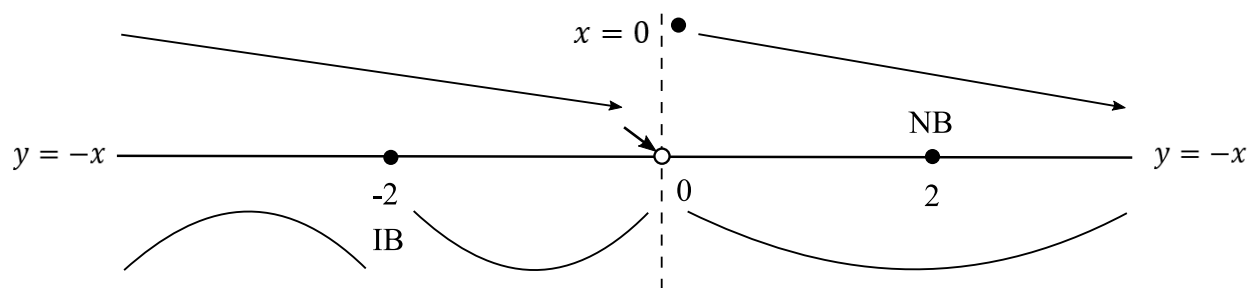
$$f''(x) = \frac{12x(x+2)}{(x+1)^5}, \quad Df'' = Df$$



39. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $P_x : (2, 0)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{2}{x}}(x^2 - 2x + 4), \quad Df' = Df$$

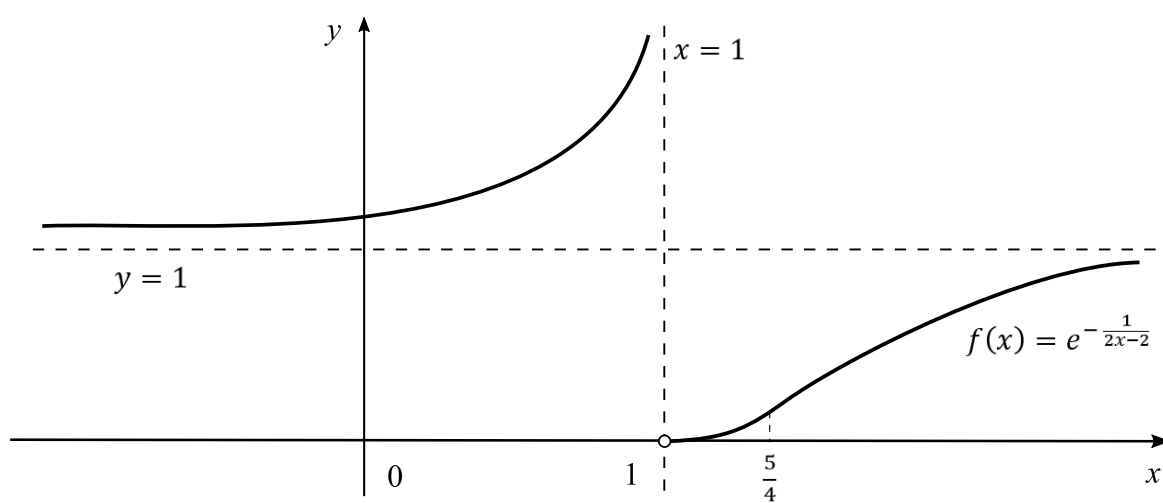
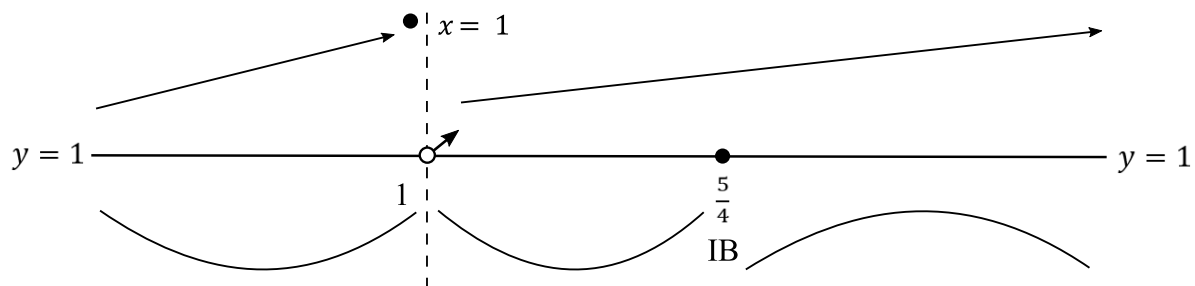
$$f''(x) = \frac{1}{x^4}e^{\frac{2}{x}}(4x + 8), \quad Df'' = Df$$



40. $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $P_y : (0, \sqrt{e})$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2x-2}} \frac{1}{2(x-1)^2}, \quad Df' = Df$$

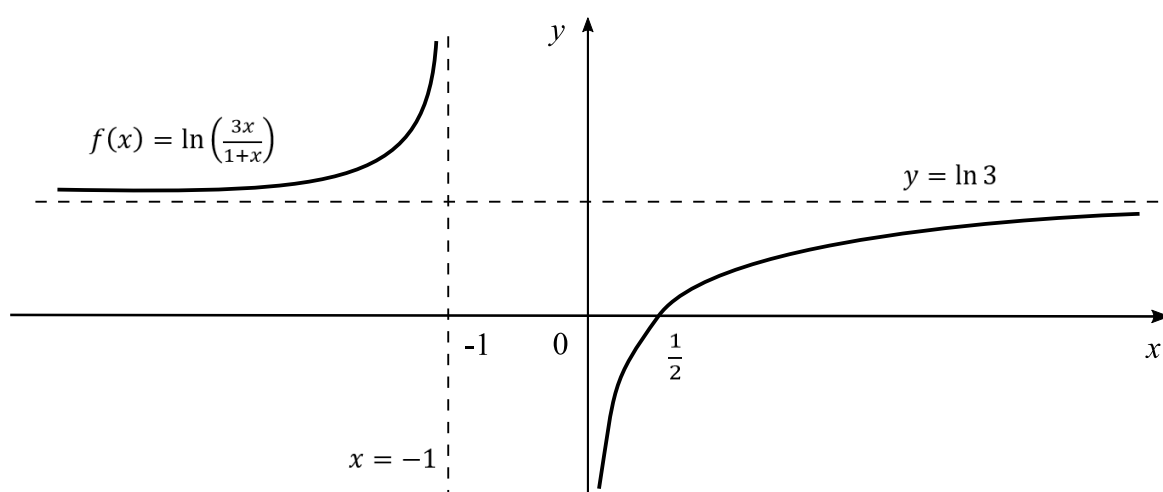
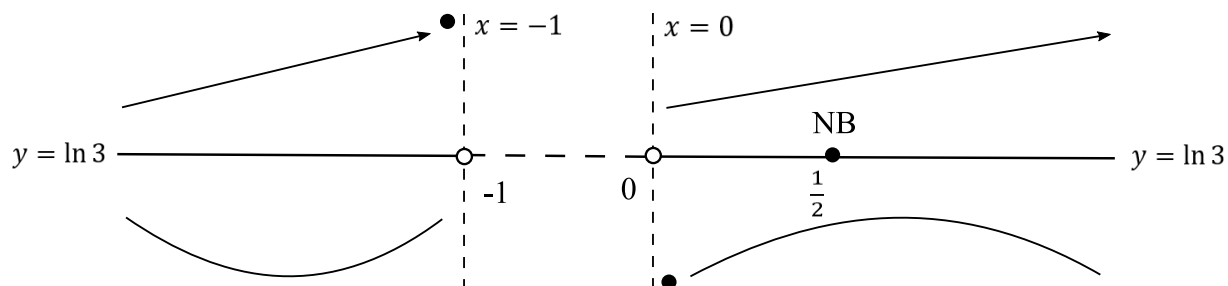
$$f''(x) = e^{-\frac{1}{2x-2}} \frac{5-4x}{4(x-1)^4}, \quad Df'' = Df$$



41. $Df = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$, $P_x : (\frac{1}{2}, 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}, Df' = Df$$

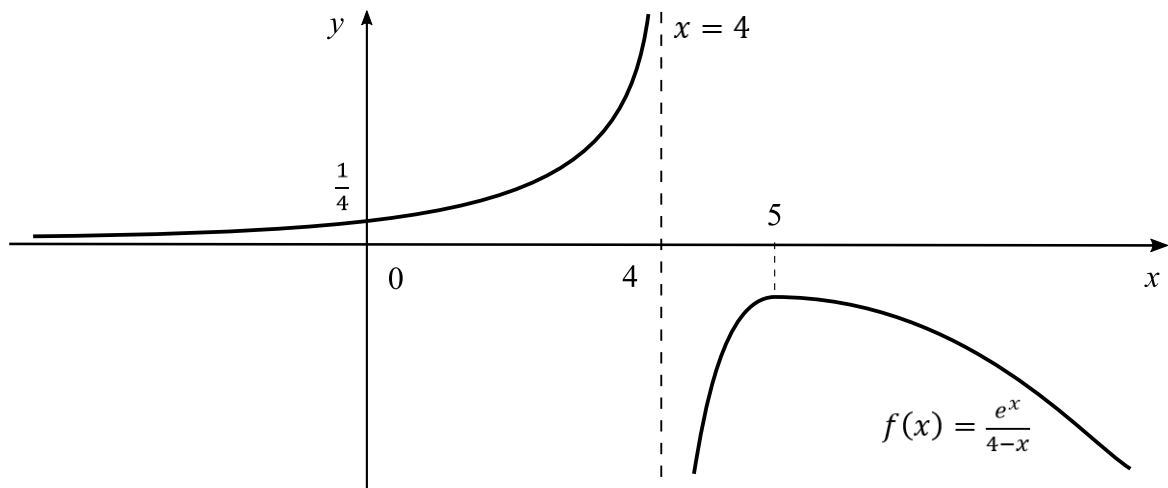
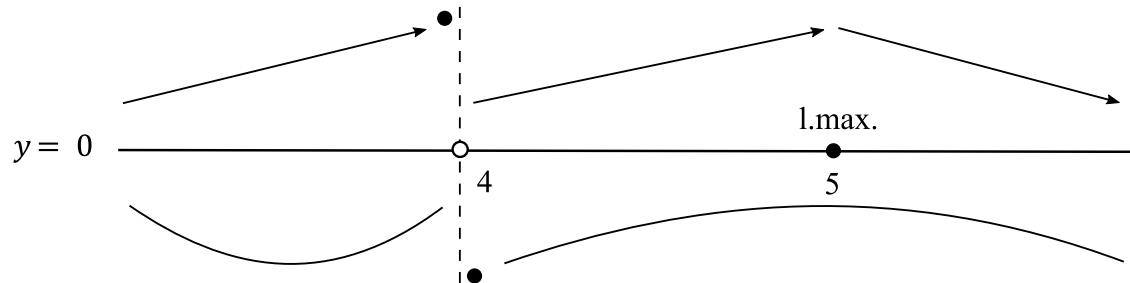
$$f''(x) = -\frac{1+2x}{x^2(1+x)^2}, Df'' = Df$$



42. $Df = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $P_y : (0, \frac{1}{4})$

$$f'(x) = \frac{e^x(5-x)}{(4-x)^2}, \quad Df' = Df$$

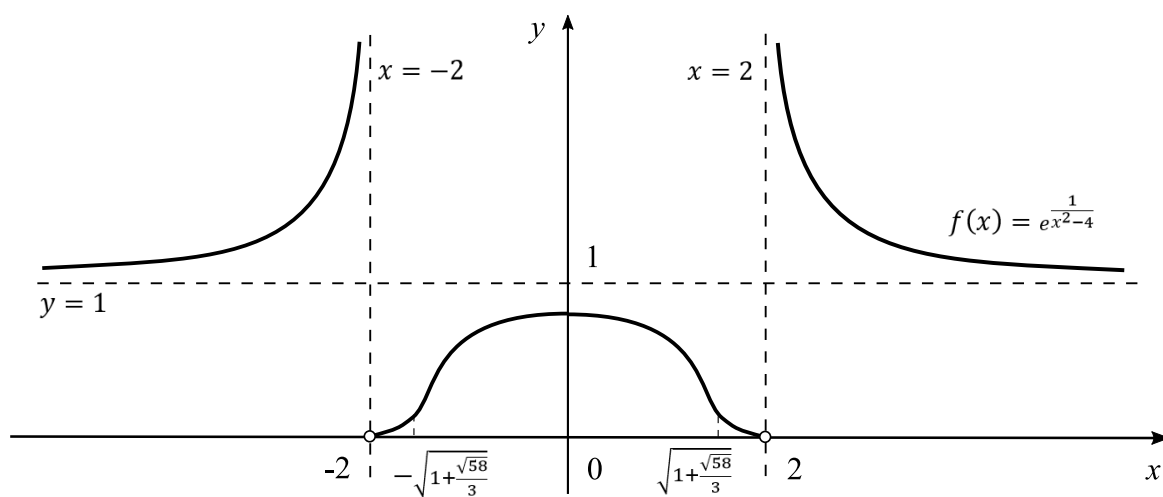
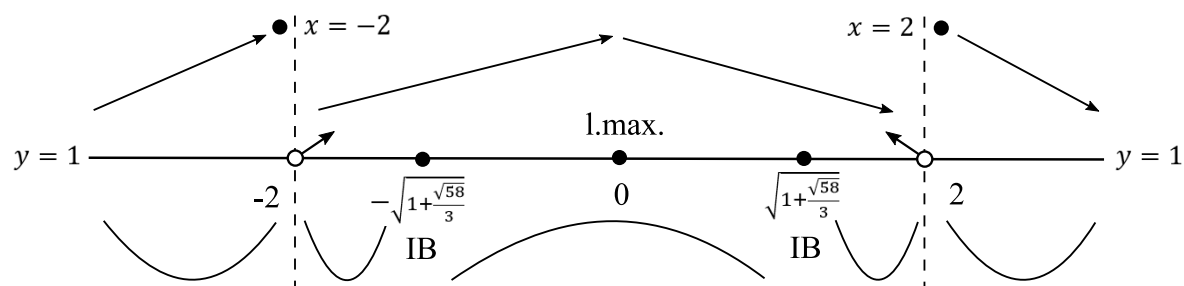
$$f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 10x + 26)}{(4-x)^3}, \quad Df'' = Df$$



43. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $P_y : (0, e^{-\frac{1}{4}})$; funkce f je sudá

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2 - 4}}, Df' = Df$$

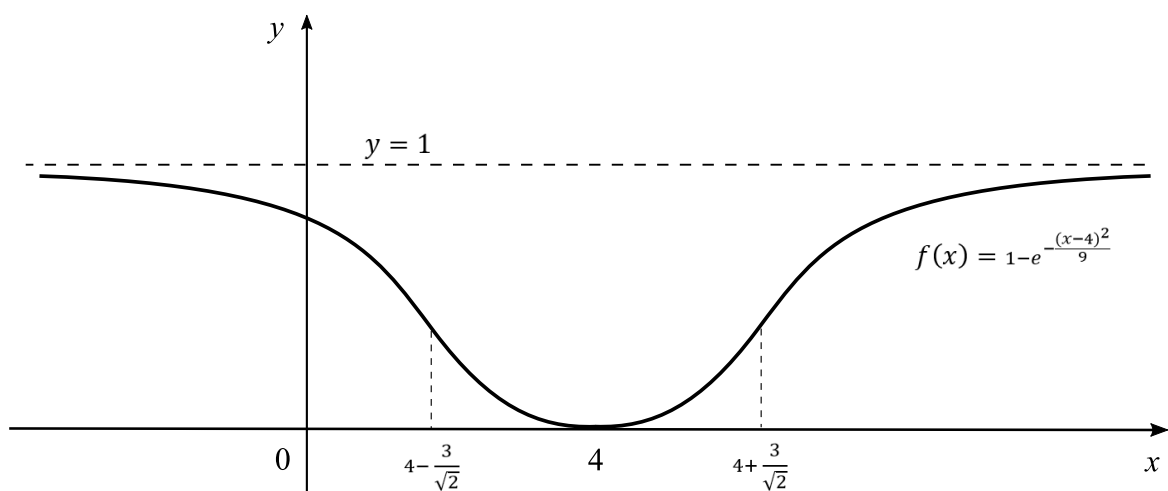
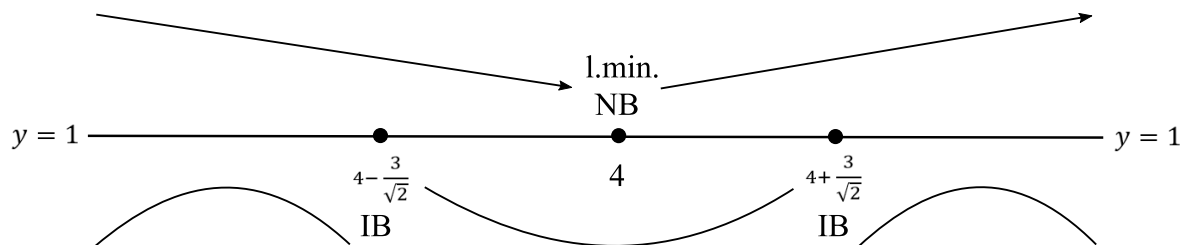
$$f''(x) = \frac{2(3x^4 - 6x^2 - 16)}{(x^2 - 4)^4} \cdot e^{\frac{1}{x^2 - 4}}, Df'' = Df$$



$$44. Df = \mathbb{R}, P_x : (4, 0), P_y : \left(0, 1 - e^{-\frac{16}{9}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{9}(x-4) \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{9}}, Df' = Df$$

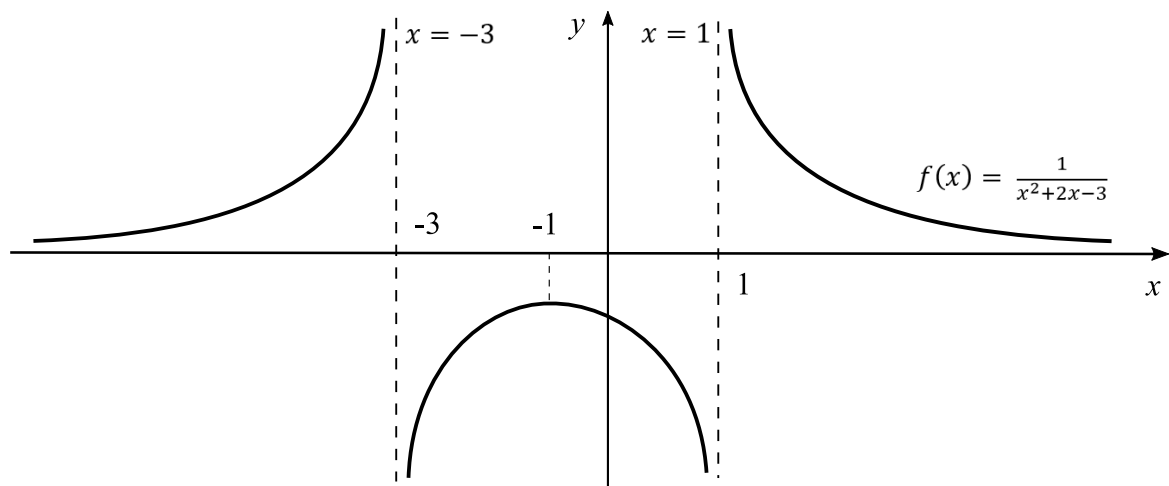
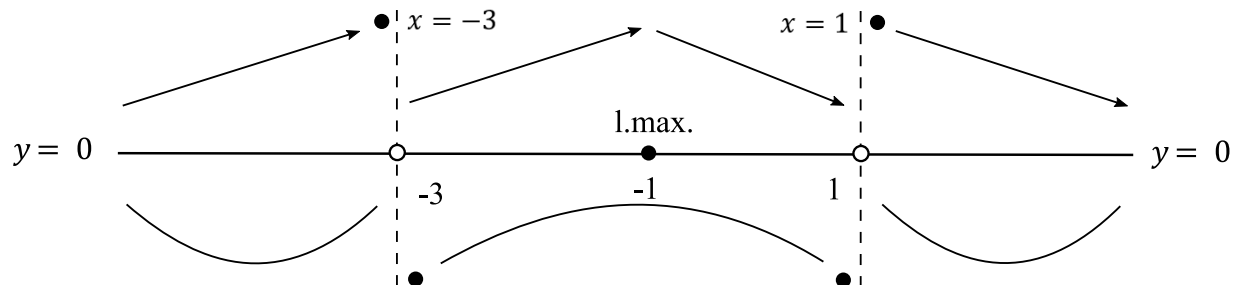
$$f''(x) = -\frac{2}{81}(2x^2 - 16x + 23) \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{9}}, Df'' = Df$$



45. $Df = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, $P_y : (0, -\frac{1}{3})$

$$f'(x) = \frac{-(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}, \quad Df' = Df$$

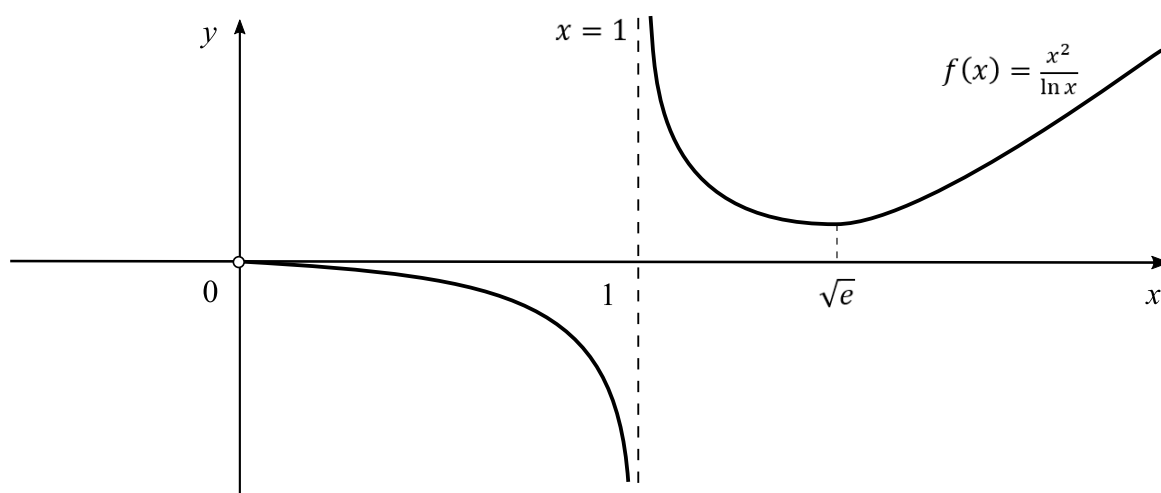
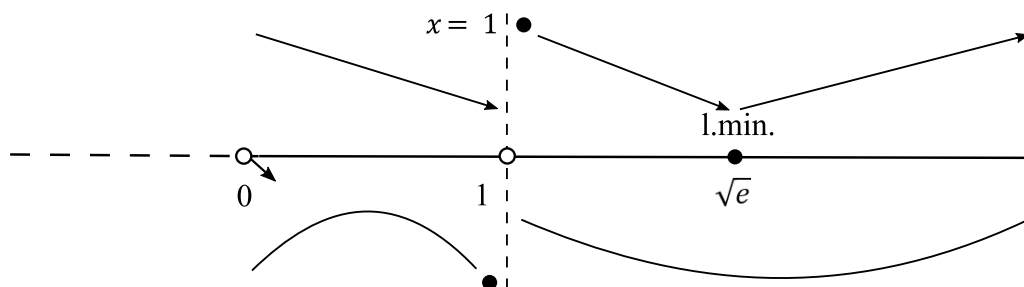
$$f''(x) = \frac{2(3x^2+6x+7)}{(x^2+2x-3)^3}, \quad Df'' = Df$$



46. $Df = (0, 1) \cup (1, \infty)$

$$f'(x) = \frac{x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}, \quad Df' = Df$$

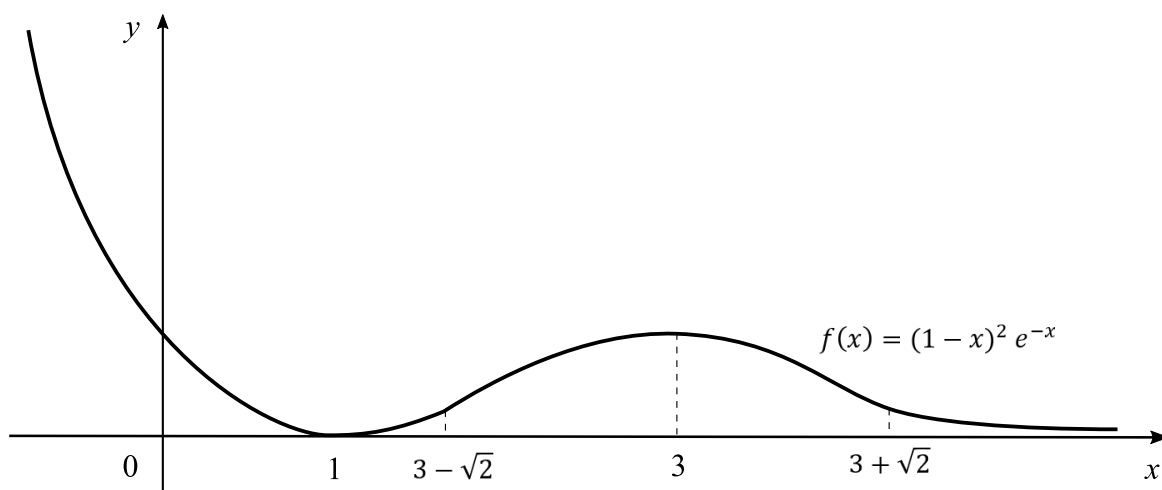
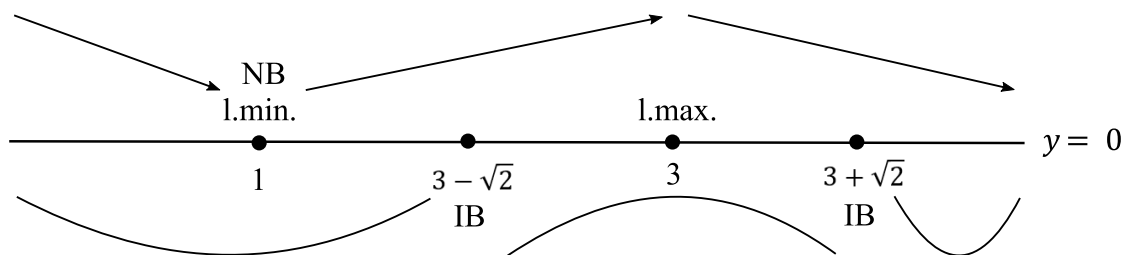
$$f''(x) = \frac{2 \ln^2 x - 3 \ln x + 2}{\ln^3 x}, \quad Df'' = Df$$



47. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (1, 0)$, $P_y : (0, 1)$

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 4x + 3), Df' = Df$$

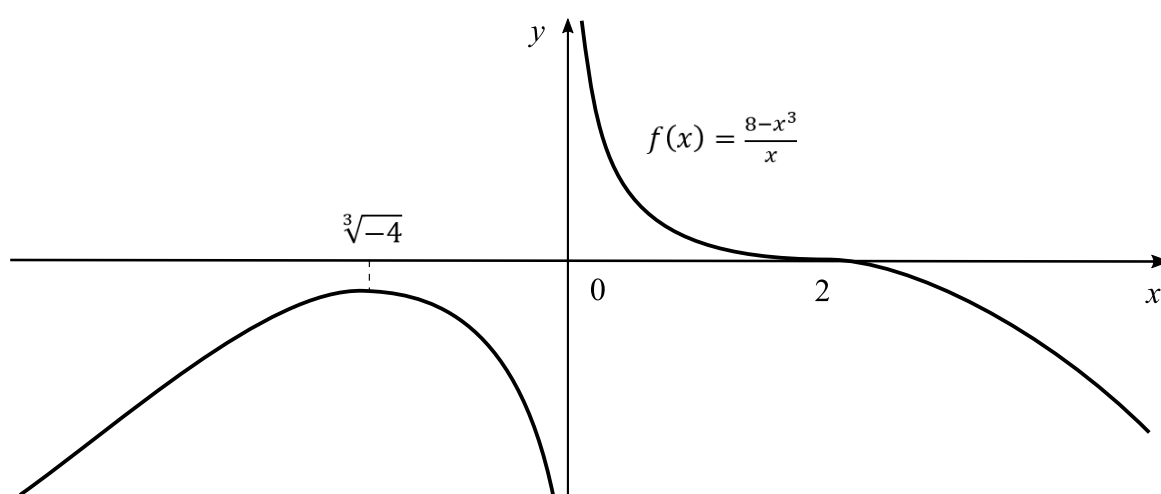
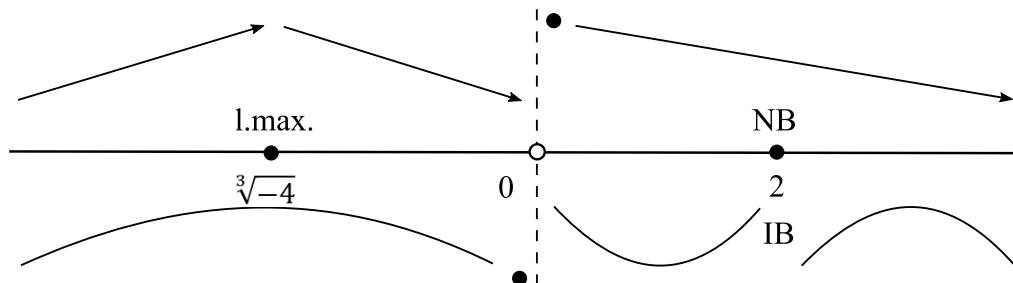
$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 6x + 7), Df'' = Df$$



48. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $P_x : (2, 0)$

$$f'(x) = -2\frac{x^3 + 4}{x^2}, Df' = Df$$

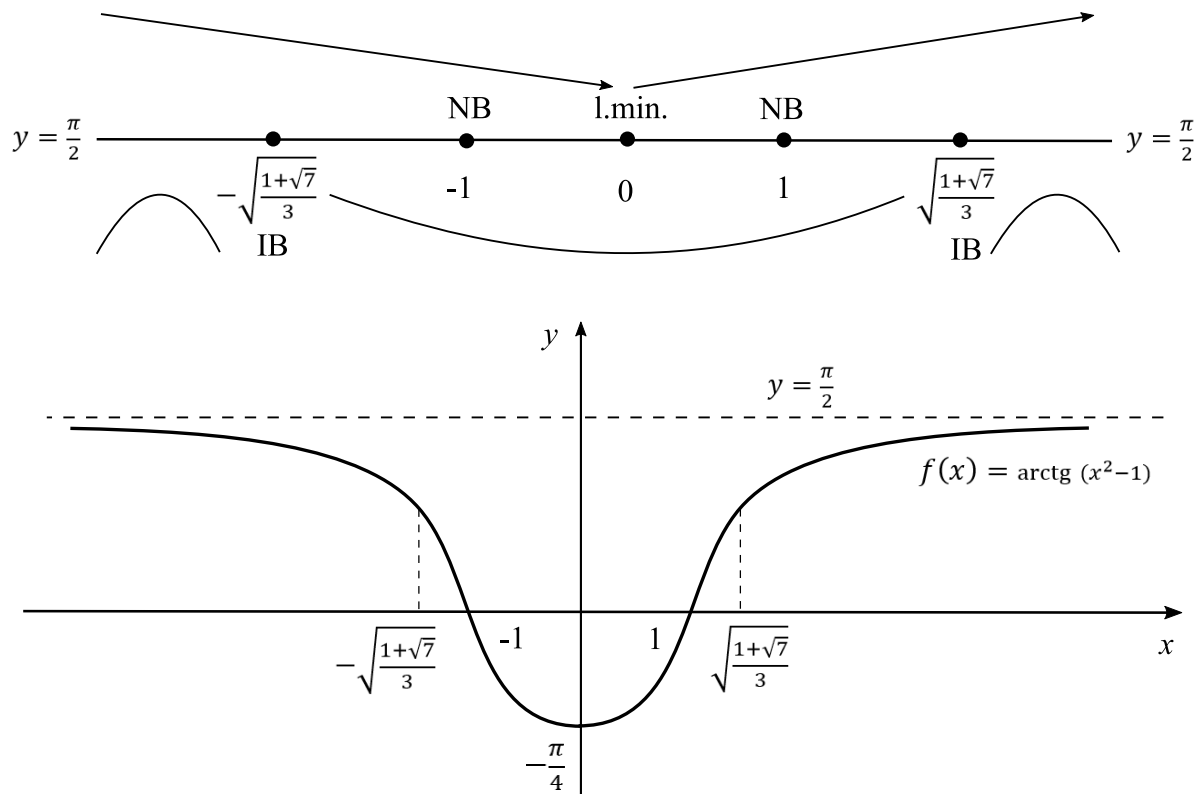
$$f''(x) = -2\frac{x^3 - 8}{x^3}, Df'' = Df$$



49. $Df = \mathbb{R}$, $P_x : (-1, 0)$, $P_x : (1, 0)$, $P_y : (0, -\frac{\pi}{4})$, funkce f je sudá

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + (x^2 - 1)^2}, \quad Df' = Df$$

$$f''(x) = \frac{-2(3x^4 - 2x^2 - 2)}{(1 + (x^2 - 1)^2)^2}, \quad Df'' = Df$$



2.15 Primitivní funkce

Reálná konstanta „+ c“ ve funkčním předpisu primitivní funkce F pouze naznačuje, že primitivních funkcí k dané funkci f existuje nekonečně mnoho. Za středníkem je uveden možný postup (metoda) pro výpočet primitivní funkce, přičemž PP označuje metodu *per partes*, PZ použití rozkladu racionální funkce na parciální zlomky a „subs.“ pak použitou substituci.

$$1. \quad F(x) = \frac{1}{4} \left(x^2 - x \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) + c; \quad \text{PP}$$

$$2. \quad F(x) = \frac{1}{2} \left(\ln(x^2 + 2x + 3) + \frac{3}{x^2 + 2x + 3} \right) + c; \quad \text{subs. } t = x^2 + 2x + 3$$

$$3. \quad F(x) = -x + \frac{1}{2} \ln|x + 2| - \frac{5}{2} \ln|x - 4| + c; \quad \text{vydělit a PZ}$$

$$4. \quad F(x) = x^3 \left(\ln(x^2) - \frac{2}{3} \right) + c; \quad \text{PP}$$

$$5. \quad F(x) = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 - \cos x}{3 + \cos x} \right| + c; \quad \text{subs. } t = \cos x \text{ a PZ}$$

6. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 8 \left(\frac{23}{9} \ln |x - 6| + \frac{4}{9} \ln |x + 3| \right) + c$; vydělit a PZ
7. $F(x) = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + c$; PP
8. $F(x) = 2\sqrt{1 + \ln x} + c$; subs. $t = 1 + \ln x$
9. $F(x) = -2 \ln |x - 1| + \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{2(x - 1)^2} + c$; PZ
10. $F(x) = 2 \left(\frac{(1 + \sqrt{x})^2}{2} - 2(1 + \sqrt{x}) + \ln(1 + \sqrt{x}) \right) + c$; subs. $t = 1 + \sqrt{x}$
11. $F(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c$; PP
12. $F(x) = 4x + \frac{1}{5} \ln |x - 1| + \frac{19}{10} \ln(x^2 + 9) - \frac{161}{15} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c$; vydělit a PZ
13. $F(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{32} \right) \sin(4x - 1) + \frac{x}{8} \cos(4x - 1) + c$; PP
14. $F(x) = 2 \left(-\frac{x + 3}{3} \sqrt{x + 3} + 8\sqrt{x + 3} + \frac{15}{\sqrt{x + 3}} \right) + c$; subs. $t = \sqrt{x + 3}$
15. $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{20} \sin 10x + \frac{1}{200} \cos 10x + c$; PP
16. $F(x) = -2 \ln |1 - x| + \frac{1}{1 - x} - \operatorname{arctg} x + c$; PZ
17. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + c$; subs. $t = 1 + x^2$
18. $F(x) = -\frac{1}{13} (3e^{-2x} \cos 3x + 2e^{-2x} \sin 3x) + c$; PP
19. $F(x) = 5 \ln |x + 1| - 4 \ln |x - 3| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + c$; PZ
20. $F(x) = 3x \operatorname{tg}(x + 3) + 3 \ln |\cos(x + 3)| + c$; PP
21. $F(x) = \frac{1}{4} \left(\arcsin(2x) + 2x\sqrt{1 - 4x^2} \right) + c$; subs. $x = \frac{1}{2} \sin t$
22. $F(x) = \ln |x| + \frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{arctg} x + c$; PZ
23. $F(x) = \ln |x - 2| - \ln(x^2 + 1) - \operatorname{arctg} x + c$; PZ
24. $F(x) = \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + c$; subs. $t = \frac{x}{3}$
25. $F(x) = 2\sqrt{x - 1} \cdot \ln \frac{\sqrt{x - 1}}{e} + c$; subs. $t = \sqrt{x - 1}$
26. $F(x) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) + c$; subs. $t = \frac{x}{\sqrt{5}}$

27. $F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c; \quad \text{PP}$
28. $F(x) = 3 \ln |x| + \frac{1}{x} + \ln |x - 2| + c; \quad \text{PZ}$
29. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}} \right) + c; \quad \text{subs. } t = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$
30. $F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) + c; \quad \text{PP}$
31. $F(x) = -\ln |x| + 3 \ln |x + 1| - \frac{1}{x + 1} + c; \quad \text{PZ}$
32. $F(x) = \ln |x| + \frac{1}{x} + 2 \ln |x - 1| + c; \quad \text{PZ}$
33. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{5}} \right) + c; \quad \text{subs. } t = \sin x$
34. $F(x) = \frac{e^{3x}}{34} (3 \sin(5x + 1) - 5 \cos(5x + 1)) + c; \quad \text{PP}$
35. $F(x) = -\ln |x| + 2 \ln |x - 3| - \frac{3}{x - 3} + c; \quad \text{PZ}$
36. $F(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x) + c; \quad \text{subs. } t = \sqrt{2}x$
37. $F(x) = \ln x \cdot \arcsin (\ln x) + \sqrt{1 - \ln^2 x} + c; \quad \text{subs. } t = \ln x \text{ a PP}$
38. $F(x) = -\frac{x^2}{3} \cos(3x + 3) + \frac{2}{9}x \sin(3x + 3) + \frac{2}{27} \cos(3x + 3) + c; \quad \text{PP}$
39. $F(x) = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c; \quad \text{subs. } t = \sqrt{x}$
40. $F(x) = 5 \ln |x| + 2 \ln |x - 2| + \frac{1}{x - 2} + c; \quad \text{PZ}$
41. $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{2} \right) + c; \quad \text{subs. } t = \sin x$
42. $F(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + x \right) \ln(7x) - \frac{3}{4}x^2 - x + c; \quad \text{PP}$
43. $F(x) = \frac{2}{x - 3} + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 3) + c; \quad \text{PZ}$
44. $F(x) = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3x - 2}}{\sqrt{2}} \right) + c; \quad \text{subs. } t = \sqrt{3x - 2}$
45. $F(x) = \ln |x - 6\sqrt{x} + 14| + \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{5}} \right) + c; \quad \text{subs. } t = \sqrt{x}$

46. $F(x) = \left(-\frac{2}{5}x^3 + \frac{12}{125}x\right) \sin(1-5x) + \left(\frac{6}{25}x^2 - \frac{12}{625}\right) \cos(1-5x) + c;$ PP
47. $F(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{5}{6} \ln(3x^2+1) + c;$ PZ
48. $F(x) = 2x + 3 \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + c;$ vydělit a PZ
49. $F(x) = \frac{1}{12} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{4x}-3}{3}\right) + c;$ subs. $t = e^{4x}$, $u = \frac{t-3}{3}$
50. $F(x) = \frac{e^{2x}}{29} (2 \sin 5x - 5 \cos 5x) + c;$ PP
51. $F(x) = 3 \operatorname{arctg} x - \frac{5}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2} \ln|2x-3| + c;$ PZ
52. $F(x) = 3 \arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right) + c;$ subs. $t = \frac{x-3}{2}$
53. $F(x) = -\frac{1}{5} (3 \cos(2x-1) \cos(3x) + 2 \sin(2x-1) \sin 3x) + c;$ PP
54. $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^x-2}{2}\right) + c;$ subs. $t = e^x$
55. $F(x) = \ln|x+3| - \frac{2}{x+3} - \frac{2}{3} \ln|3x^2+5| + c;$ PZ
56. $F(x) = \left(x - \frac{3}{5}\right) \ln^2(3-5x) - 2\left(x - \frac{3}{5}\right) \ln(3-5x) + 2x + c;$ PP
57. $F(x) = \frac{1}{2} x \operatorname{tg}(2x) + \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + c;$ PP
58. $F(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{\sqrt{3}}\right) + c;$ subs. $t = \frac{x-3}{\sqrt{3}}$
59. $F(x) = \frac{3}{4} \ln(2x^2+1) + 2 \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c;$ PZ
60. $F(x) = \frac{3x}{10} \operatorname{tg}(5x) + \frac{3}{50} \ln|\cos 5x| + c;$ PP
61. $F(x) = \frac{10}{3} \sqrt{1+\ln x} + c;$ subs. $t = \ln x$
62. $F(x) = -2 \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{2} \ln(x^2+4) + c;$ PZ
63. $F(x) = 5 \arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right) + c;$ subs. $t = \frac{x+2}{\sqrt{8}}$
64. $F(x) = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{48} (1+4x^2 - \ln(1+4x^2)) + c;$ PP a subs. $t = 1+4x^2$

65. $F(x) = x^2 - \ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + c$; vydělit a PZ
66. $F(x) = -\frac{1}{x} + \ln(5+4x+x^2) - \operatorname{arctg}(x+2) + c$; PZ
67. $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-1}^3 + 3\sqrt{x^2-1} + c$; subs. $t = \sqrt{x^2-1}$
68. $F(x) = \frac{19}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-4}{2}\right) + 2\ln(x^2-8x+20) + c$; subs. $t = x^2-8x+2$, resp. $u = \frac{x-4}{2}$
69. $F(x) = 2\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + 2\ln(x^2+2) + c$; PZ
70. $F(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-5}{5}\right) + c$; subs. $t = \frac{x-5}{5}$
71. $F(x) = 3x + 2\ln|x| - \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + c$; vydělit a PZ
72. $F(x) = \frac{2}{5}x^5 + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+12) + c$; vydělit a PZ
73. $F(x) = -x^2 + 4\ln|x| - \frac{5}{4}\ln(2x^2+1) + c$; vydělit a PZ
74. $F(x) = e^x \arcsin(e^x) + \sqrt{1-e^{2x}} + c$; subs. $t = e^x$ a PP
75. $F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c$; subs. $t = \frac{x-2}{\sqrt{3}}$
76. $F(x) = 2\ln|x| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$; PZ
77. $F(x) = \frac{1}{4}(2x^2-6x-1)\cos(1-2x) + \frac{1}{4}(2x-3)\sin(1-2x) + c$; PP
78. $F(x) = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{8x+1}{\sqrt{15}}\right) + c$; subs. $t = \frac{8x+1}{\sqrt{15}}$
79. $F(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)(1-\ln|1-x^2|) + c$; subs. $t = 1-x^2$ a PP
80. $F(x) = 2\ln|3+x| + \frac{2}{3+x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$; PZ
81. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + c$; PP
82. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+18) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{3}\right) + c$; subs. $t = x^2+6x+18$, resp. $u = \frac{x+3}{3}$
83. $F(x) = \ln|x| + 3\ln|x-3| + \frac{4}{x-3} + c$; PZ
84. $F(x) = \frac{1}{3}(3x+1)\operatorname{arctg}(3x+1) - \frac{1}{6}\ln(9x^2+6x+2) + c$; subs. $t = 3x+1$ a PP a subs.
 $z = 1+t^2$

85. $F(x) = x^2 - \ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + c$; vydělit a PZ
86. $F(x) = \frac{8}{9}x \cos(1-3x) - \frac{4}{3}\left(x^2 - \frac{2}{9}\right) \sin(1-3x) + c$; PP
87. $F(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c$; subs. $t = \frac{x-2}{\sqrt{3}}$
88. $F(x) = 5x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-3| + c$; vydělit a PZ
89. $F(x) = -\frac{1}{4}(1-2x^2) \operatorname{arctg}(1-2x^2) + \frac{1}{8}\ln|4x^4 - 4x^2 + 2| + c$; subs. $t = 1-2x^2$ a PP
90. $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$; subs. $t = \frac{2x+1}{\sqrt{2}}$
91. $F(x) = \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$; PZ
92. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 6x + 13) + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c$; subs. $t = x^2 - 6x + 13$, resp. $z = \frac{x-3}{2}$
93. $F(x) = (2x-3)\operatorname{tg}x + 2\ln|\cos x| + c$; PP
94. $F(x) = -\ln|x+4| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$; PZ
95. $F(x) = \frac{2}{15}\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\ln|\cos\sqrt{x}| + c$; subs. $t = \sqrt{x}$, $z = \cos t$
96. $F(x) = 3\ln|x+4| - \frac{2}{x+4} + \frac{1}{2(x+4)^2} + c$; PZ
97. $F(x) = -\frac{3}{x} - \ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln(9+x^2) + c$; PZ
98. $F(x) = -\frac{1}{2}\cotg(2x) + \frac{1}{2\sin 2x} + c = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x)$; subs. $t = \sin 2x$;
99. $F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + c$; PZ
100. $F(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + c$; subs. $t = \sqrt{x}$
101. $F(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)(1-\ln(1-x^2)) + c$; subs. $t = 1-x^2$ a PP
102. $F(x) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{3x}}{\sqrt{5}}\right) + c$; subs. $t = e^{3x}$
103. $F(x) = -\frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} + \frac{5}{4}\ln(x^2+3) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$; PZ
104. $F(x) = 2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} + 6(x-2)\sin\sqrt{x} + c$; subs. $t = \sqrt{x}$ a PP

105. $F(x) = \frac{1}{4} \ln |x| - \frac{9}{8} \ln (4 + x^2) + c;$ PZ
106. $F(x) = -\ln |x| + \ln (x^2 + 4) + c;$ PZ
107. $F(x) = -\frac{1}{x} \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x - \frac{2}{x} + c;$ PP
108. $F(x) = -\ln |x| + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 1) + c;$ PZ
109. $F(x) = -x + \frac{18}{5} \ln |x + 4| + \frac{2}{5} \ln |x - 1| + c;$ vydělit a PZ
110. $F(x) = \frac{1}{3} \left(\ln x \cdot \arcsin (\ln x) + \sqrt{1 - \ln^2 x} \right) + c;$ subs. $t = \ln x$ a PP a subs. $z = \sqrt{1 - t^2}$
111. $F(x) = -x + 3 \ln |x - 2| - 8 \ln |x - 3| + c;$ vydělit a PZ
112. $F(x) = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + c;$ subs. $t = \frac{1}{x}$ a PP a subs. $z = 1 + t^2$
113. $F(x) = 2\sqrt{1 + \ln x} + c;$ subs. $t = \sqrt{1 + \ln x}$
114. $F(x) = \frac{5}{2}x + \ln |x| + \frac{1}{4} \ln |2x - 1| + c;$ vydělit a PZ
115. $F(x) = \frac{1}{\pi^2} (\pi e^x \sin (\pi e^x) + \cos (\pi e^x)) + c;$ subs. $t = \pi e^x$ a PP

3 Řešené příklady

Příklad 1.5.1 Množinu $M = \{x \in \mathbb{Z}^+; \log_3 x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}; 1 - x^2 > 0\}$ co nejjednodušeji zapíšte (pomocí intervalů); určete $\min M$, $\max M$, $\inf M$ a $\sup M$; určete M° , $\text{h}M$, $\overline{M}$, M' a množinu izolovaných bodů množiny M

Řešení:

Úlohu budeme řešit ve dvou krocích. Nejprve identifikujeme množinu M a poté určíme požadované hodnoty a množiny.

a) Identifikace množiny M

Množina M je tvořena sjednocením dvou množin, které si pro přehlednost označíme M_1 a M_2 , tj.

$$\begin{aligned}M_1 &= \{x \in \mathbb{Z}^+; \log_3 x < 1\}, \\M_2 &= \{x \in \mathbb{R}; 1 - x^2 > 0\}.\end{aligned}$$

Množina M_1 je množina všech kladných celých čísel ($\mathbb{Z}^+$), která splňují podmínku

$$\log_3 x < 1. \quad (1)$$

Podmínka (1) je ve tvaru logaritmické nerovnice, které obecně vyhovují všechna reálná čísla z intervalu $(0, 3)$. Vzhledem k tomu, že množina M_1 obsahuje pouze kladná celá čísla, bude platit

$$M_1 = (0, 3) \cap \mathbb{Z}^+.$$

Množina M_1 je tedy dvouprvková množina a platí

$$M_1 = \{1, 2\}.$$

Množina M_2 je podmnožinou všech reálných čísel, která vyhovují nerovnici

$$1 - x^2 > 0. \quad (2)$$

Lze snadno určit, že nerovnici (2) vyhovují všechna reálná čísla z intervalu $(-1, 1)$.

K určení množiny M stačí poslední krok, a to sjednotit množiny M_1 a M_2 , tzn.

$$M = M_1 \cup M_2 = \{1, 2\} \cup (-1, 1) = (-1, 1) \cup \{2\}.$$

b) Vlastnosti množiny M

V tomto kroku určíme postupně hodnoty $\min M$, $\max M$, $\inf M$, $\sup M$ a množiny M° , $\text{h}M$, $\overline{M}$, M' a množinu všech izolovaných bodů množiny M .

- $\min M$

Symbolem $\min M$ označujeme minimum množiny M . Jedná se o nejmenší prvek množiny M . Hledáme tedy číslo $m \in M$, pro které platí

$$m \leq x \quad \forall x \in M.$$

V našem konkrétním případě však množina M tento nejmenší prvek nemá. Množina M je sice zdola omezená, ale žádný prvek v ní obsažený nemá vlastnost minima. Ke každému prvku $m \in M$ totiž vždy najdeme jiný prvek $x \in M$ tak, že $x < m$, a minimum množiny M tedy neexistuje.

- $\max M$

Obdobnou úvahou jako v předchozím odstavci najdeme číslo $\max M$. Jedná se o maximum množiny M , tedy o její největší prvek. Je to takové číslo $n \in M$, pro které platí

$$n \geq x \quad \forall x \in M.$$

Tentokrát máme štěstí. Množina M obsahuje prvek, který je větší než všechny ostatní prvky této množiny. Jedná se o bod 2 (protože $2 \geq x$ pro všechna $x \in M$) a tedy platí

$$\max M = 2.$$

- $\inf M$

Symbol $\inf M$ označuje infimum množiny M , tedy její největší dolní závorku. Jedná se o největší reálné číslo K , které množinu M omezuje zdola, tj. pro které platí

$$K \leq x \quad \forall x \in M.$$

Navíc, pokud existuje minimum množiny M , je infimum množiny M rovno tomuto minimumu.

Naše množina M minimum nemá a proto musíme využít úvahu z definice infima. Množina M je zdola omezená, tudíž dolní závorky této množiny existují a dokonce jich je nekonečně mnoho. Patří mezi ně například čísla -6 , -100 , $-\pi$ a (nekonečně) mnoho dalších. To největší z nich je však bezesporu číslo -1 , neboť pro každé kladné ε najdeme v množině M takový prvek x , že platí $x < -1 + \varepsilon$. Číslo -1 je tedy infimum množiny M , tj.

$$\inf M = -1.$$

- $\sup M$

Podobně nalezneme i supremum množiny M , tedy $\sup M$. Jedná se o nejmenší horní závorku množiny M , hledáme tedy nejmenší reálné číslo L , pro které platí

$$L \geq x \quad \forall x \in M.$$

Pokud existuje maximum množiny M , je supremum množiny M rovno tomuto maximumu.

Naše množina M maximum má, tzn. $\sup M = \max M = 2$. Pokud by toto maximum neexistovalo, použili bychom pro hledání suprema obdobnou úvahu jako výše u infima. Množina M je omezená shora, tudíž opět můžeme najít nekonečně mnoho reálných čísel, která fungují jako její horní závorky a omezují ji shora (např. 2 , 3 , $\sqrt{10}$, 10^6). Nejmenším z těchto omezujících čísel je skutečně číslo 2 , protože pro každé kladné ε najdeme v množině M takový prvek x , že platí $x > 2 - \varepsilon$.

- M°

Symbolem M° označujeme vnitřek množiny M , tedy množinu všech jejích vnitřních bodů. Abychom byli schopni tuto množinu určit, potřebujeme identifikovat všechny vnitřní body množiny M . Jsou to všechny prvky množiny M , k nimž dokážeme najít jejich (libovolně velké) okolí tak, že celé toto okolí leží v množině M . Ukážeme si to na konkrétních bodech:

* Bod $\frac{1}{2}$

Bod $\frac{1}{2}$ leží v množině M . Snadno nalezneme jeho dostatečně malé okolí tak, aby celé toto okolí leželo v množině M . Stačí například, když zvolíme okolí s poloměrem $\frac{1}{4}$. Okolí bodu $\frac{1}{2}$ s poloměrem $\frac{1}{4}$ má podobu otevřeného intervalu $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Tento interval je podmnožinou množiny M a bod $\frac{1}{2}$ je tedy vnitřním bodem množiny M , tj. $\frac{1}{2} \in M^\circ$.

* Bod 1

Bod 1 je rovněž prvkem množiny M . Jakékoli okolí bodu 1 bude mít podobu otevřeného intervalu $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ je poloměr tohoto okolí. Pro libovolně malé ε bude vždy část tohoto okolí, konkrétně množina bodů $(1, 1 + \varepsilon)$, ležet mimo množinu M . V tomto případě tudíž nenalezneme žádné okolí bodu 1 tak, aby celé leželo v množině M . Bod 1 tedy není vnitřním bodem množiny M a nepatří do vnitřku množiny M .

* Bod 2

Bod 2 je prvkem množiny M . Mohl by tedy být jejím vnitřním bodem. Stačí, když najdeme jedno jeho okolí, které bude podmnožinou množiny M . Hledáme tedy takové kladné číslo ε , aby platilo

$$(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) \subset M. \quad (3)$$

Vidíme, že toto by bylo splněno pouze v případě, že by se ε rovnalo nule. Poloměr okolí však nemůže být nulový, což nás vede k závěru, že žádné okolí bodu 2 splňující podmínku (3) neexistuje a bod 2 není vnitřním bodem množiny M .

Podobně bychom mohli analyzovat i další body. Z výše uvedeného je však zřejmé, že všechny vnitřní body množiny M budou tvořit interval $(-1, 1)$, tj.

$$M^\circ = (-1, 1).$$

• $\text{h}M$

Symbol $\text{h}M$ označuje hranici množiny M a jedná se o množinu všech hraničních bodů množiny M . Hraničním bodem množiny M rozumíme takové reálné číslo, v jehož každém okolí leží body z množiny M a zároveň i body, které do množiny M nepatří. V našem konkrétním případě se jedná např. o bod 1, který jsme analyzovali v předchozím odstavci. Také bod 2, který jsme zkoumali výše, bude patřit mezi hraniční body. V každém jeho okolí leží on sám (tj. bod 2), který patří do množiny M , a také nekonečně mnoho bodů, které do množiny M nepatří.

Ostatní prvky množiny, tj. body z intervalu $(-1, 1)$, jsme v předchozím odstavci určili jako body vnitřní. Bod vnitřní nemůže být bodem hraničním. Znamená to tedy, že všechny body z množiny M máme prozkoumány. Neznamená to však, že jsme určili všechny hraniční body množiny M . Hraniční bod množiny M totiž nemusí nutně být prvkem množiny M . Stačí, když má k prvkům množiny M „dost blízko“ tak, abychom v každém jeho okolí nějaký ten bod z množiny M našli. V našem konkrétním příkladě bude takovýmto bodem bod -1 . Do množiny M sice nepatří, ale každé jeho okolí $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ (kde $\varepsilon > 0$) bude obsahovat dokonce nekonečně mnoho bodů z množiny M .

Více hraničních bodů naší množiny M nenajdeme. Hranice množiny M je tedy tříprvková množina a platí

$$\text{h}M = \{-1, 1, 2\}.$$

• $\overline{M}$

Symbol $\overline{M}$ označuje uzávěr množiny M a lze vyjádřit jako sjednocení vnitřku a hranice množiny M . Snadno tedy určíme, že platí

$$\overline{M} = M^\circ \cup \text{h}M = (-1, 1) \cup \{-1, 1, 2\} = \langle -1, 1 \rangle \cup \{2\}.$$

- M'

Množina M' se nazývá derivace množiny M . Jedná se o množinu všech hromadných bodů množiny M . Hromadným bodem množiny M rozumíme takové reálné číslo, v jehož každém okolí leží nekonečně mnoho bodů z množiny M .

Vnitřní body množiny M jsou zároveň i hromadnými body množiny M . U těchto bodů jsme schopni najít nějaké jejich okolí takové, že celé toto okolí je podmnožinou množiny M . Toto okolí je otevřený interval ležící v M , a tedy obsahuje nekonečně mnoho bodů z M . Zmenšíme-li poloměr, získáme menší okolí, které však zase bude podmnožinou množiny M , tudíž opět bude obsahovat nekonečně mnoho bodů z M . Zvětšíme-li poloměr, nově získané okolí již nemusí celé ležet v M , ale pořád bude obsahovat všechny body, které náležely menšímu okolí, a těchto bylo nekonečně mnoho a všechny ležely v M . Lze tedy říci, že v každém okolí vnitřního bodu množiny M leží nekonečně mnoho bodů z množiny M , a tudíž každý vnitřní bod množiny M je zároveň hromadným bodem množiny M .

Zbývá uvážit hraniční body množiny M . Žádné jiné body nemá smysl uvažovat.

- * Bod 2 nemůže být hromadným bodem množiny M . Už z předchozích úvah plyne, že pokud zvolíme dostatečně malý poloměr jeho okolí $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$, např. při volbě $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dostaneme otevřený interval, který obsahuje pouze jediný bod z množiny M , a to právě bod 2.
- * Body -1 a 1 však hromadnými body naší množiny M jsou. Část každého jejich okolí je podmnožinou množiny M , tudíž každé jejich okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny M .

Odtud

$$M' = \langle -1, 1 \rangle.$$

- Množina izolovaných bodů množiny M

Izolovaným bodem množiny M nazýváme takový bod z množiny M , který není hromadným bodem této množiny. V předchozím odstavci jsme určili všechny hromadné body množiny M . Mezi nimi byly všechny prvky množiny M s výjimkou jednoho, a to bodu 2. Bod 2 je jediným izolovaným bodem množiny M .

Příklad 1.6.13 Určete a pomocí intervalů запиšte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\arcsin(2x - 1)}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \cdot e^{\sqrt{3x-1}}$$

Řešení:

Definiční obor této funkce budeme hledat jako maximální množinu bodů $x \in \mathbb{R}$, pro které má předpis funkce smysl. Podívejme se na jednotlivé části, z nichž je funkce tvořena:

- Funkce $y = \arcsin t$ je definována na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Tedy má smysl uvažovat pouze $t \in \langle -1, 1 \rangle$. V našem případě je $t = 2x - 1$. Odtud získáváme první podmínku, která nám pomůže určit definiční obor funkce f , a to

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1. \quad (4)$$

- V předpisu funkce f se vyskytuje druhá odmocnina (hned dvakrát). Druhou odmocninu lze počítat pouze z nezáporných čísel, což nás vede k dalším podmínkám

$$3x - 1 \geq 0 \quad (5)$$

a

$$x^2 - x + 1 \geq 0. \quad (6)$$

- V předpisu funkce se objevuje i podíl, v jeho jmenovateli tudíž nesmí být nula. To nás vede k poslední podmínce

$$\sqrt{x^2 - x + 1} \neq 0. \quad (7)$$

Podmínky (6) a (7) lze sloučit do jediné podmínky ve tvaru

$$x^2 - x + 1 > 0. \quad (8)$$

Nyní již stačí najít všechna reálná čísla, která vyhovují všem třem podmínkám (4), (5) a (8) současně.

Podmínce (4) vyhovují všechna reálná čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Podmínku (5) splňují všechna reálná čísla z intervalu $\langle \frac{1}{3}, \infty \rangle$. Poslední podmínka (8) je splněna pro jakékoli reálné číslo x (kvadratický trojčlen na levé straně nemá reálné kořeny).

Vzhledem k tomu, že body z hledaného definičního oboru musí splňovat všechny stanovené podmínky současně, určíme definiční obor jako průnik těchto tří nalezených množin, tedy

$$D_f = \langle 0, 1 \rangle \cap \left\langle \frac{1}{3}, \infty \right) \cap \mathbb{R}.$$

Odtud

$$D_f = \left\langle \frac{1}{3}, 1 \right\rangle.$$

Příklad 1.7.1 Určete, запиšte a zakreslete maximální definiční obor funkce

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2 - x - x^2} \cdot \sin(x - y^2)}{\log_2(2 - x^2 - y^2)}$$

Řešení:

Úlohu rozdělíme do dvou částí. V první části určíme definiční obor předepsané funkce, v druhé části se zaměříme na jeho grafické znázornění.

a) Stanovení definičního oboru funkce f

Při hledání definičního oboru musíme vyjít z předpisu funkce f a ze znalostí základních elementárních funkcí. Při pohledu na funkční předpis si všimneme následujícího:

- V předpisu se vyskytuje druhá odmocnina a v argumentu druhé odmocniny mohou být pouze nezáporná čísla. To nám pomůže stanovit první podmínku ve tvaru

$$2 - x - x^2 \geq 0. \quad (9)$$

- Kromě odmocniny se v předpisu vyskytuje také logaritmus a funkce logaritmus je definována pouze na množině kladných reálných čísel. Musíme tedy přidat další podmínku

$$2 - x^2 - y^2 > 0. \quad (10)$$

- Předpis funkce je ve tvaru podílu. Jmenovatel musí být nenulový, což nás vede ke stanovení další podmínky

$$\log_2(2 - x^2 - y^2) \neq 0. \quad (11)$$

- Funkce sinus, která je v čitateli předpisu funkce f , je definována v každém bodě množiny $\mathbb{R}$. Odtud tedy žádné omezení neplyne, a tudíž pro stanovení definičního oboru funkce f již žádné další podmínky nebudou potřeba.

Všechny stanovené podmínky využijeme při zápisu definičního oboru funkce f . Bude to množina všech bodů z roviny, které splňují současně podmínky (9), (10) a (11), tedy

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 - x - x^2 \geq 0, 2 - x^2 - y^2 > 0, \log_2(2 - x^2 - y^2) \neq 0\}.$$

b) Grafické znázornění definičního oboru funkce f

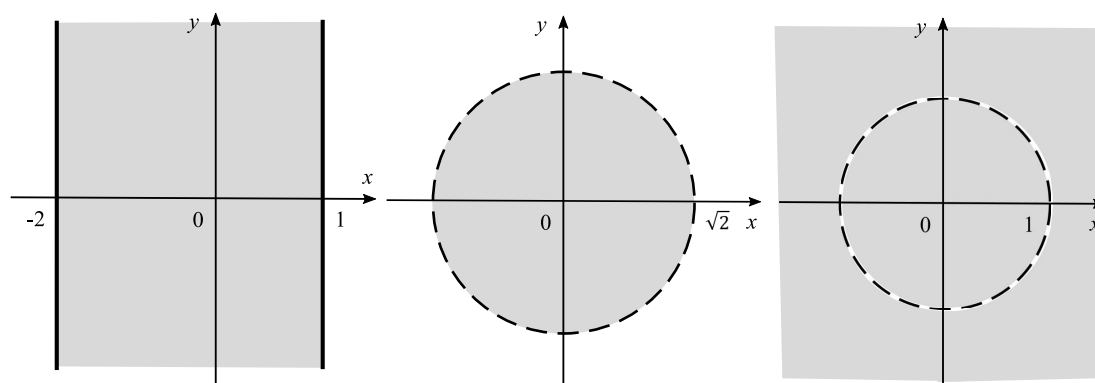
Abychom byli schopni nalezený definiční obor znázornit graficky (a v důsledku pak také zapsat v jednodušším tvaru), budeme muset více prozkoumat a pochopit podmínky (9), (10) a (11).

• Podmínka (9)

Podmínka obsahuje pouze proměnnou x . Jejím grafickým znázorněním tedy budou takové body (x, y) z roviny, jejichž x -ová souřadnice splňuje omezení dané podmínkou (9). O omezení pro y -ovou souřadnici podmínka nehovoří a tato souřadnice tedy může být libovolná.

Zbývá dořešit, jaké omezení na proměnnou x podmínka (9) představuje. Tato podmínka je ve tvaru kvadratické nerovnice a této nerovnici vyhovují všechna x z intervalu $\langle -2, 1 \rangle$.

Z výše uvedených zjištění plyne, že podmínky (9) budou vyhovovat všechny body roviny, jejichž x -ová souřadnice patří do intervalu $\langle -2, 1 \rangle$ a y -ová souřadnice je libovolná. Tyto body budou tvořit pás rovnoběžný s osou y , který je zleva ohraničený přímkou $x = -2$ a zprava přímkou $x = 1$ (viz Obrázek 1 vlevo).



Obrázek 1: Množiny určené podmínkami (9), (10) a (11).

• **Podmínka (10)**

Na rozdíl od předchozí situace tato podmínka již popisuje vztah mezi oběma proměnnými x a y . Obě tyto proměnné jsou zde v druhé mocnině a jsou pronásobeny stejným koeficientem (-1) . Tento fakt naznačuje, že by naše podmínka mohla mít souvislost s kruhem nebo kružnicí – rovnicí tvaru $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ vyhovují body ležící na kružnici se středem v bodě (m, n) a poloměrem r . Podmínku proto upravíme do srozumitelnějšího tvaru

$$2 > x^2 + y^2.$$

V této podobě je již podmínka jasně čitelná. Budou jí vyhovovat vnitřní body kruhu se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem $\sqrt{2}$ (viz Obrázek 1 uprostřed).

• **Podmínka (11)**

Třetí podmínka je ve tvaru logaritmické nerovnosti. Vzhledem k tomu, že logaritmus nabývá hodnoty nula jenom v jediném bodě, v bodě 1, lze podmínku (11) přeformulovat do tvaru

$$2 - x^2 - y^2 \neq 1.$$

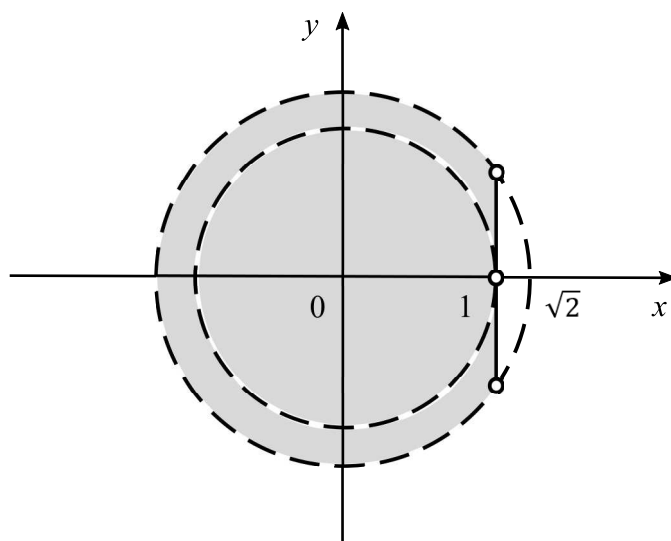
Po další drobné úpravě dostáváme podmínku ve tvaru

$$1 \neq x^2 + y^2. \quad (12)$$

Podobně jako v předchozím odstavci, i zde vidíme souvislost s kružnicí. Tentokrát jde o kružnici se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem 1. Podmínka ve tvaru (12) jasně říká, že v definičním oboru funkce f nesmí být body, které leží na této kružnici (viz Obrázek 1 vpravo).

Hledaný definiční obor je množina bodů, které splňují všechny tři nalezené podmínky současně, půjde tedy o průnik tří výše identifikovaných množin:

- pásu rovnoběžného s osou y ohraničeného přímkami $x = -2$ a $x = 1$,
- vnitřku kruhu se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem $\sqrt{2}$,
- celé roviny s výjimkou bodů ležících na kružnici se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem 1.



Obrázek 2: Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{\sqrt{2-x-x^2} \cdot \sin(x-y^2)}{\log_2(2-x^2-y^2)}$.

Grafickou podobu definičního oboru funkce f zachycuje Obrázek 2.

Vzhledem k tomu, že se nám podařilo podmínky (9), (10) a (11) určující definiční obor funkce f zjednodušit, lze definiční obor skutečně zapsat v jednodušším tvaru:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 < x < 1, x^2 + y^2 < 2, x^2 + y^2 \neq 1\}.$$

Příklad 1.8.1 Určete maximální definiční obor a vyšetřete paritu funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x - 2 \sin x}}{x^2 - 1}$$

Řešení:

Úloha má dvě části. Nejdříve určíme definiční obor funkce a poté vyšetříme, zda je na D_f splněna podmínka zaručující sudost nebo lichost funkce.

a) Definiční obor funkce f

Prozkoumejme podrobně předpis funkce f :

- Funkční předpis je ve tvaru podílu. Musíme tedy stanovit podmínku na nenulovost jmenovatele, tj.

$$x^2 - 1 \neq 0. \quad (13)$$

- Funkce je složena z několika základních elementárních funkcí. Vyskytuje se zde třetí odmocnina, funkce sinus a mocninná funkce. Definičním oborem všech těchto funkcí jsou všechna reálná čísla. To znamená, že odtud žádná další podmínka na definiční obor funkce f neplyne.

Definiční obor funkce f tedy určuje pouze podmínka (13). Této podmínce vyhovují všechna reálná čísla s výjimkou čísel 1 a -1 , tedy

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

b) Parita funkce f

Paritu funkce f lze vyšetřovat pouze tehdy, je-li její definiční obor symetrický podle počátku. Pokud by definiční obor tuto podmínku nesplňoval, funkce by nemohla být ani sudá ani lichá a další vyšetřování parity by nemělo smysl.

Definiční obor naší funkce f podmínku symetrie splňuje. Budeme se tedy zabývat otázkou, zda je funkce f lichá, sudá, nebo zda nemá ani jednu z těchto vlastností. Nejdříve si vyjádříme předpis funkce f v bodě $-x$. Platí

$$f(-x) = \frac{\sqrt[3]{-x - 2 \sin(-x)}}{(-x)^2 - 1}.$$

Dále využijeme znalosti funkce sinus. Tato funkce je lichá, takže $\sin(-x) = -\sin(x)$. Odtud

$$f(-x) = \frac{\sqrt[3]{-x + 2 \sin x}}{(-1)^2 \cdot x^2 - 1}.$$

Po další úpravě získáváme

$$f(-x) = \frac{\sqrt[3]{(-1)(x - 2 \sin x)}}{x^2 - 1},$$

což je ekvivalentní zápisu

$$f(-x) = -\frac{\sqrt[3]{x - 2 \sin x}}{x^2 - 1}.$$

Je zřejmé, že $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$, tudíž funkce f je lichá.

Příklad 1.9.1 Pro funkci f určete maximální interval, na němž je prostá, a na tomto intervalu najděte funkci f^{-1} inverzní k funkci f (včetně $D_{f^{-1}}$)

$$f(x) = 1 - 2 \sin(3x + 2)$$

Řešení:

Úloha se dá rozdělit do tří menších úloh. Nejprve najdeme interval, na kterém je funkce prostá, potom se pokusíme na tomto intervalu nalézt funkci k ní inverzní a nakonec se zaměříme na definiční obor nalezené inverzní funkce.

a) Interval, na němž je funkce f prostá

Z tvaru funkčního předpisu funkce f je zřejmé, že jejím definičním oborem je množina všech reálných čísel, tj. $D_f = \mathbb{R}$. Zadaná funkce je funkce složená z lineární funkce a funkce sinus. Víme, že funkce sinus není prostá; je to periodická funkce s primitivní periodou 2π definovaná na množině všech reálných čísel. Vzhledem k tomu, že funkce sinus není prostá (a tedy ani naše funkce f není prostá), není možno určit funkci, která by k ní byla inverzní na celém jejím definičním oboru. Víme však, že na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ funkce $y = \sin x$ prostá je a na tomto intervalu známe i její inverzní funkci – tou funkcí je funkce $y = \arcsin x$. Funkce $y = \sin x$ je samozřejmě prostá i na nekonečně mnoha jiných intervalech, nicméně pouze na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ k ní přímo známe inverzní funkci.

Tyto znalosti teď aplikujeme na naši funkci f . Nejprve nalezneme interval, na kterém je prostá funkce $y = \sin(3x + 2)$. Z předchozích úvah víme, že stačí omezit argument funkce sinus zleva číslem $-\frac{\pi}{2}$ a zprava číslem $\frac{\pi}{2}$, pak bude funkce sinus prostá. V našem případě tedy bude potřeba, aby

$$-\frac{\pi}{2} \leq 3x + 2 \leq \frac{\pi}{2},$$

což je ekvivalentní požadavku

$$-\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}.$$

Pokud se tedy omezíme pouze na interval $\langle -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \rangle$, je funkce $y = \sin(3x + 2)$ funkcí prostou. Zjistili jsme, kde je prostá funkce $y = \sin(3x + 2)$. Je to jakýsi mezikrok na cestě ke stanovení intervalu, na kterém je prostá funkce f .

Pojďme blíže prozkoumat předpis funkce f . Funkce f vzniká přenásobením funkce $y = \sin(3x + 2)$ konstantou (-2) a přičtením čísla 1. Uvědomme si, jak se těmito úpravami změní graf funkce $y = \sin(3x + 2)$. Graf této funkce se převrátí podle osy x , zvětší se amplituda

(dvakrát, ve směru osy y) a takto získaný graf se posune o jednotku nahoru (ve směru osy y). Vidíme, že tyto transformace nijak nezmění interval, na kterém je výsledná funkce prostá. Zjistili jsme tak, že výše nalezený interval $\langle -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \rangle$ je zároveň intervalem, na kterém je prostá funkce f .

Obecně, pokud je funkce $f(x)$ prostá na intervalu I , pak je na tomto intervalu prostá i funkce $g(x) = a \cdot f(x) + b$, kde $a \neq 0$ a b jsou libovolné reálné konstanty. To znamená, že pokud je funkce prostá, zůstane prostá i po vynásobení nenulovou konstantou (škálování ve směru osy y) a přičtením libovolné konstanty (posun ve směru osy y).

b) Hledání inverzní funkce

Inverzní funkci budeme tedy hledat k funkci f definované pouze na intervalu $\langle -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \rangle$. Pro hledanou inverzní funkci f^{-1} musí platit

$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{kde} \quad f(x) = y \quad \forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \right\rangle.$$

Vyjdeme z předpisu funkce f a vyjádříme proměnnou x . Připomeňme si

$$f: \quad y = 1 - 2 \sin(3x + 2).$$

Odtud

$$\frac{1-y}{2} = \sin(3x+2).$$

Z této rovnosti potřebujeme vyjádřit x , tj. nějak vhodně se „zbavit“ funkce sinus. Protože funkce arkussinus je prostá, lze tuto rovnost přepsat ve tvaru

$$\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right) = \arcsin(\sin(3x+2)). \quad (14)$$

V tomto momentě využijeme fakt, že funkce $y = \arcsin x$ je inverzní k funkci $y = \sin x$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, tj. platí $\arcsin(\sin(x)) = x$ pro každé x z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Vztah (14) lze tedy přepsat do nového tvaru

$$\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right) = 3x+2 \quad \left(\forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \right\rangle\right).$$

Odtud již snadno vyjádříme proměnnou x

$$x = \frac{1}{3} \left(\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right) - 2 \right).$$

K vyjádření předpisu funkce f^{-1} (s obvyklým označením proměnných) pak stačí provést formální záměnu proměnných x a y , tedy

$$f^{-1}: \quad y = \frac{1}{3} \left(\arcsin\left(\frac{1-x}{2}\right) - 2 \right),$$

neboli

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \left(\arcsin\left(\frac{1-x}{2}\right) - 2 \right).$$

c) Definiční obor inverzní funkce

Definiční obor funkce f^{-1} , tj. množina $D_{f^{-1}}$, je roven oboru hodnot funkce f na intervalu $\langle -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}, \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3} \rangle$.

My však při jeho určování můžeme alternativně vyjít přímo z funkčního předpisu funkce f^{-1} a využít znalosti vlastností funkce $y = \arcsin x$ a jejího definičního oboru. Víme, že funkce $y = \arcsin x$ je definována na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Argument této funkce je tedy omezen zleva číslem -1 a zprava číslem 1 (stejně jako obor hodnot funkce sinus). Uplatníme-li tento požadavek na naši funkci f^{-1} , získáme podmínku

$$-1 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1.$$

Po několika drobných úpravách dostáváme tuto podmínku ve tvaru

$$3 \geq x \geq -1,$$

definičním oborem funkce f^{-1} je tedy interval $\langle -1, 3 \rangle$.

Příklad 1.10.1 Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x-1)^2)}{x^2 - 1}$$

Řešení:

Funkce, jejíž limitu počítáme, není v bodě $x = 1$ definovaná, nelze tedy hodnotu 1 přímo dosadit. Prozkoumáme proto čitatel a jmenovatel funkce f zvlášť.

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1 + (x-1)^2) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0.$$

Máme tedy před sebou limitu typu „ $\frac{0}{0}$ “. Na tento typ limity můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Zderivujeme zvlášť funkce v čitateli a ve jmenovateli a budeme počítat limitu z této nové funkce, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(1 + (x-1)^2))'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2(x-1)}{1+(x-1)^2}}{2x},$$

kterou upravíme do jednoduššího tvaru

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(1 + (x-1)^2)}.$$

Opět spočítáme zvlášť limitu funkce ve jmenovateli a limitu funkce v čitateli v bodě $x = 1$. Tentokrát dostáváme výraz „ $\frac{0}{1}$ “, který je roven číslu 0 . Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(1 + (x-1)^2)} = 0.$$

Podle l'Hospitalova pravidla platí, že původní limita je také rovna nule, tedy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x-1)^2)}{x^2 - 1} = 0.$$

Příklad 1.10.2 Vypočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)}$$

Řešení:

Označme si

$$f(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)}.$$

Nejprve se podíváme zvlášť na čitatel a jmenovatel funkce f . V bodě $x = 3$ má funkce v čitateli limitu rovnou číslu $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Funkce ve jmenovateli má v bodě $x = 3$ limitu rovnou nule. Limita funkce f v bodě $x = 3$ je tedy limitou typu „ $\frac{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}{0}$ “. Protože

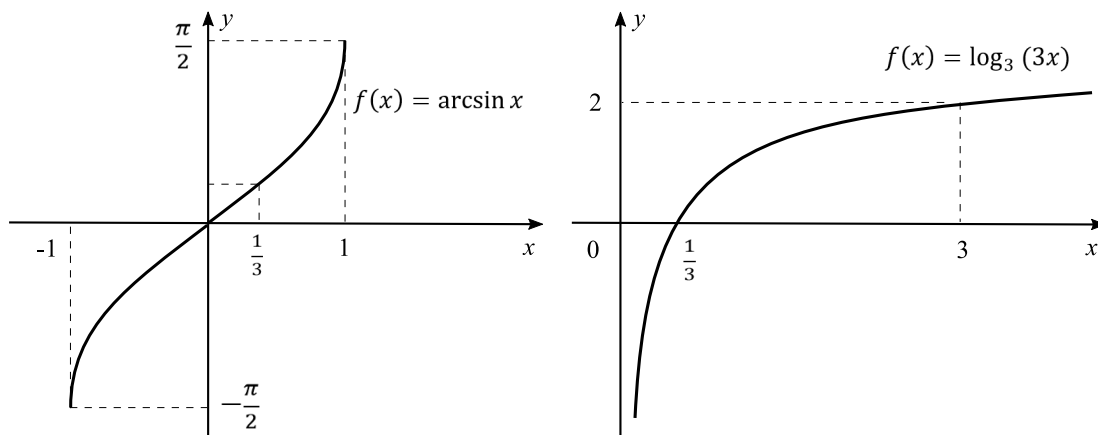
$$\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \neq 0,$$

nelze použít l'Hospitalovo pravidlo (šlo by použít v případě limity typu „ $\frac{0}{0}$ “). Musíme využít jednostranné limity a podívat se, jak se funkce f chová, přibližujeme-li se k bodu $x = 3$ zvlášť zprava a zleva. Uvažovaný typ limity (typ „ $\frac{\text{konstanta}}{0}$ “) totiž může mít jen tři možné výsledky: ∞ , $-\infty$ nebo limita vůbec neexistuje.

a) Nejprve se podíváme na limitu funkce f v bodě $x = 3$ zleva, tj. počítáme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)}. \quad (15)$$

Podívejme se nejprve do čitatele předpisu funkce f . Bod $x = 3$ lze do čitatele bez problémů dosadit a funkční hodnota, jak už jsme uvedli výše, je rovna nějakému nenulovému číslu. Pro naše účely není nutné znát přesnou hodnotu tohoto čísla. Důležité je znát znaménko tohoto čísla, tj. čísla $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. Zde využijeme znalosti základních elementárních funkcí, konkrétně tedy funkce $y = \arcsin x$ (viz Obrázek 3 vlevo). Víme, že tato funkce je definována na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, je na tomto intervalu rostoucí a její graf prochází osou x v bodě $x = 0$. V bodě $x = \frac{1}{3}$ (a ve všech bodech v jeho blízkém okolí) tedy nabývá funkční hodnoty, která je rozhodně kladná. Tento poznatek později využijeme.



Obrázek 3: Grafy funkcí $y = \arcsin x$ a $y = \log_3(3x)$.

Mnohem zajímavější je analýza jmenovatele předpisu funkce f , tj. funkce $y = \log_3(3x)$. Abychom mohli správně určit limitu (15), je potřeba si uvědomit, jak vypadá graf funkce $y = \log_3(3x)$ (viz Obrázek 3 vpravo). V bodě $x = 3$ nabývá funkce $y = \log_3(3x)$ funkční hodnoty 2. V případě limity zleva se však přibližujeme k bodu $x = 3$ po bodech ležících vlevo od tohoto bodu. Jsou to tedy všechno body, které jsou menší než číslo 3. Všechny funkční hodnoty funkce $y = \log_3(3x)$ v těchto bodech jsou pak čísla menší než číslo 2. Jmenovatel naší funkce f je tedy v těchto bodech roven vždy nějakému (malému) kladnému číslu.

A co se děje s funkčními hodnotami funkce f , blížíme-li se k bodu $x = 3$ zleva? Kladná čísla postupně se přibližující kladnému číslu $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ jsou dělena malými kladnými čísly blížícími se číslu 0. Funkční hodnoty funkce f jsou stále větší a větší, rostou nade všechny meze. Tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)} = +\infty.$$

b) Stejnou úvahou určíme limitu funkce f zprava, tj. limitu

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)}. \quad (16)$$

Už v předchozím bodu jsme dospěli k poznatku, že čitatel funkce f nabývá na nějakém okolí bodu $x = 3$ kladných funkčních hodnot. Platí to pro body ležící v levém i v pravém okolí bodu $x = 3$, čitatel funkce f je tedy dále z tohoto pohledu nezajímavý.

Kvůli jmenovateli se musíme opět zabývat funkcí $y = \log_3(3x)$ a zjistit, jak se tato funkce chová v bodech, které leží v pravém okolí bodu $x = 3$. Jedná se o body, které jsou větší než číslo 3. Funkce $y = \log_3(3x)$ je rostoucí, což znamená, že v těchto bodech funkce $y = \log_3(3x)$ nabývá funkčních hodnot, které jsou větší než číslo $\log_3(3 \cdot 3) = 2$. Na pravém okolí bodu $x = 3$ je tedy jmenovatel funkce f roven vždy nějakému (malému) zápornému číslu. A čím blíže bodu $x = 3$ jsme, tím je toto malé záporné číslo blíže bodu nula.

Získané poznatky teď shrneme a určíme limitu (16). Na pravém okolí bodu $x = 3$ nabývá funkce f hodnot, které vznikají jako podíly kladných čísel blížících se číslu $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$ a malých záporných čísel blížících se číslu 0. Výsledkem jsou záporná čísla, která klesají pod všechny meze, tedy

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)} = -\infty$$

Zjistili jsme, že jednostranné limity (15) a (16) se nerovnaají. To nás opravňuje k vyslovení závěru, že limita $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{2 - \log_3(3x)}$ neexistuje.

Příklad 1.11.1 Pro funkci f určete D_f , paritu, limity v nevlastních bodech a v bodech nespojitosti a průsečíky se souřadnicovými osami.

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Řešení:

Úlohu budeme řešit ve čtyřech krocích. Nejprve se podíváme na definiční obor funkce f , poté prozkoumáme paritu této funkce, určíme příslušné limity a najdeme průsečíky se souřadnicovými osami.

a) Definiční obor funkce

Definiční obor budeme hledat jako maximální množinu bodů $x \in \mathbb{R}$, v nichž má předpis funkce smysl.

Předpis funkce je ve tvaru podílu. V čitateli je funkce $y = \cos x$, která je definovaná na celé reálné ose, tudíž nepřináší žádná omezení na definiční obor funkce f .

Ve jmenovateli je druhá odmocnina, která je definovaná pouze na množině nezáporných reálných čísel. Odtud pramení první podmínka

$$x^2 - 1 \geq 0. \quad (17)$$

Vzhledem k tomu, že je tato druhá odmocnina ve jmenovateli, nemůžeme dopustit dělení nulou a musíme přidat další podmínku

$$\sqrt{x^2 - 1} \neq 0. \quad (18)$$

Podmínky (17) a (18) lze nahradit jedinou podmínkou ve tvaru

$$x^2 - 1 > 0.$$

Této podmínce vyhovují body ze sjednocení dvou intervalů $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Odtud

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

b) Parita funkce

Definiční obor funkce f je symetrický. Znamená to, že funkce by mohla být lichá nebo sudá. Prověříme to vyjádřením funkčního předpisu v bodě $-x$, tedy

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - 1}}.$$

Funkce $y = \cos x$ je sudá, platí tedy $\cos(-x) = \cos(x)$. Odtud

$$f(-x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{(-1)^2 \cdot x^2 - 1}}.$$

Po úpravě přicházíme k rovnosti

$$f(-x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(x).$$

To nás přivádí k závěru, že funkce f je sudá.

c) Limity

Vzhledem ke tvaru definičního oboru nás budou zajímat limity ve čtyřech bodech: v nevlastních bodech $+\infty$ a $-\infty$ a v bodech -1^- a 1^+ .

- **Limita v nevlastním bodě $+\infty$**

Počítáme limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

kterou lze upravit do tvaru

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \cos x.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dále víme, že funkce $y = \cos x$ je omezená (na celém svém D_f a tedy i na jakémkoli okolí bodu ∞). Limita součinu dvou funkcí, z nichž jedna je omezená a druhá má limitu rovnou nule, je rovna nule, tj.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \cos x = 0.$$

- **Limita v nevlastním bodě $-\infty$**

Zde uplatníme poznatek, že funkce f je sudá. Bude tedy platit, že limita v bodě $-\infty$ se bude rovnat limitě v bodě $+\infty$, tedy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \cos x = 0.$$

- **Limita v bodě 1 zprava**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}} \tag{19}$$

Spočítáme-li zvlášť limitu funkce v čitateli a limitu funkce ve jmenovateli v bodě $x = 1$, zjistíme, že limita (19) je typu „ $\frac{\cos(1)}{0}$ “. Číslo $\cos(1)$ je kladné číslo, což vede k závěru, že limita (19) bude rovna číslu $+\infty$ nebo číslu $-\infty$. Prozkoumáme jmenovatel funkce, v němž je druhá odmocnina. Na pravém okolí bodu 1 nabývá tato funkce kladných hodnot blížících se číslu 0. Na pravém okolí bodu 1 tedy funkce f nabývá funkčních hodnot, které vznikají jako podíly kladných čísel blížících číslu $\cos(1)$ a malých kladných čísel blížících se číslu 0. Čím více se k bodu 1 přibližujeme (zprava), tím jsou funkční hodnoty funkce f větší a rostou nade všechny meze, tj.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty.$$

- **Limita v bodě -1 zleva**

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Opět zde uplatníme zjištění, že funkce f je sudá. Bude tedy platit, že limita funkce v bodě -1 zleva bude rovna limitě funkce v bodě 1 zprava, tudíž

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty.$$

d) Průsečíky s osami

- **Průsečík s osou y**

Graf funkce může mít maximálně jeden průsečík s osou y . Je to bod, jehož x -ová souřadnice je nulová a přitom leží na grafu funkce, tj. y -ová souřadnice je funkční hodnotou funkce f v bodě $x = 0$.

Bod $x = 0$ neleží v definičním oboru naší funkce f , tudíž průsečík grafu funkce f s osou y neexistuje.

- **Průsečík s osou x**

Průsečíků s osou x může mít graf funkce hned několik. Jsou to body, jejichž y -ová souřadnice je nulová, a x -ová souřadnice je nulovým bodem funkce f , tj. jsou to body ve tvaru $(x, 0)$, kde x hledáme je jako řešení rovnice

$$0 = f(x).$$

V našem případě tedy řešíme rovnici

$$0 = \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (20)$$

K vyřešení rovnice (20) ale stačí najít řešení rovnice

$$0 = \cos x \quad (21)$$

a zkontrolovat, zda nalezené řešení leží v definičním oboru funkce f .

Řešením rovnice (21) jsou všechny body z množiny

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Všechny tyto body navíc patří do definičního oboru funkce f . Množina všech průsečíků grafu funkce f s osou x vypadá takto

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0 \right), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Příklad 1.12.1 Určete derivaci funkce f ; určete D_f a $D_{f'}$

$$f(x) = 6 \ln^2 \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) + 5^{\cos \pi}$$

Řešení:

Úlohu budeme řešit ve třech krocích. Začneme tím, že určíme definiční obor funkce f , potom nalezneme její derivaci a podíváme se na definiční obor derivace funkce f .

a) Definiční obor funkce f

Vyjdeme z předpisu funkce f . Z hlediska určování definičního oboru zde vidíme dva zajímavé prvky. Prvním z nich je logaritmus, druhým je podíl. Každý z těchto prvků zvlášť prozkoumáme.

- Logaritmus je funkce definovaná na kladných reálných číslech. Argument logaritmu tedy musí být vždy kladný, což nás přivádí k první podmínce na definiční obor funkce f . Tedy

$$\frac{x^2 - 4}{x} > 0. \quad (22)$$

- V argumentu logaritmu se vyskytuje podíl. Podíl má jediné omezení, ve jmenovateli se nesmí objevit nula. Rýsuje se zde další podmínka na definiční obor funkce f , a to

$$x \neq 0. \quad (23)$$

Řešením nerovnice (22) (s přihlédnutím k podmínce (23)) jsou všechny body ze sjednocení intervalů $(-2, 0) \cup (2, \infty)$. Tedy definiční obor funkce f , množinu D_f , lze zapsat takto

$$D_f = (-2, 0) \cup (2, \infty).$$

b) Derivace funkce

Před určením derivace ještě jednou podrobně prozkoumáme předpis funkce f . Předpis je ve formě součtu dvou sčítanců. Zaměříme se nejprve na první sčítanec.

- První sčítanec vznikl součinem konstanty 6 a funkce s poněkud komplikovaným předpisem

$$y = \ln^2 \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right).$$

Jedná se o funkci složenou z několika jednodušších funkcí. Vnější funkcí je druhá mocnina, poté přichází přirozený logaritmus a jako vnitřní funkce zde vystupuje podíl dvou mocninných funkcí. Tuto část funkce f tedy budeme muset derivovat jako složenou funkci a navíc uplatnit pravidlo pro derivování podílu funkcí.

- Zaměříme se na druhý sčítanec. Prohlédneme-li si druhý sčítanec pozorně, zjistíme, že se jedná o konstantu. Hodnota funkce kosinus v bodě π je rovna číslu -1 . Druhý sčítanec je tedy roven číslu 5^{-1} . Derivace této konstanty bude rovna nule. Při derivování se jí tedy nemusíme zabývat.

Pojďme k samotnému derivování. Z výše uvedeného vyplývá, že do podoby derivace funkce f bude promlouvat pouze první sčítanec, což je složená funkce vynásobená konstantou 6. Dle pravidel pro derivování tedy bude pro funkci $f'(x)$ platit

$$f'(x) = \left(6 \ln^2 \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) + 5^{\cos \pi} \right)' = 6 \cdot \left(\ln^2 \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) \right)'.$$

Uplatníme pravidla pro derivování složené funkce. Postupujeme přitom od vnější funkce k funkci vnitřní. Tedy

$$f'(x) = 6 \cdot \left(2 \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) \cdot \frac{1}{\frac{x^2 - 4}{x}} \cdot \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right)' \right).$$

Pravidlo pro derivování podílu funkcí nám pomůže při derivování vnitřní funkce, tedy

$$f'(x) = 6 \cdot \left(2 \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) \cdot \frac{1}{\frac{x^2 - 4}{x}} \cdot \frac{(x^2 - 4)' \cdot x - (x^2 - 4) \cdot (x)'}{x^2} \right).$$

Odtud

$$f'(x) = 6 \cdot \left(2 \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right) \cdot \frac{1}{\frac{x^2-4}{x}} \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4)}{x^2} \right).$$

Po úpravě se dostáváme k předpisu derivace funkce f

$$f'(x) = 12 \frac{x^2 + 4}{x(x^2 - 4)} \cdot \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right).$$

c) Definiční obor funkce $f'(x)$

Definiční obor funkce f' je vždy podmnožinou definičního oboru funkce f , tj. $D_{f'} \subset D_f$. Na základě předpisu funkce f' zformulujeme tři podmínky, které určují její definiční obor $D_{f'}$. Jsou to

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4}{x} &> 0, \\ x &\neq 0, \\ x^2 - 4 &\neq 0. \end{aligned}$$

Tyto podmínky definují stejnou množinu bodů, jako podmínky (22) a (23), tudíž definiční obory funkcí f a f' jsou identické množiny:

$$D_{f'} = D_f.$$

Příklad 1.13.1 Pro danou funkci f určete definiční obor a stacionární body

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4}{(1 - 2x)^2}$$

Řešení:

Úloha v sobě skrývá tři menší úkoly. Je potřeba určit definiční obor funkce, nalézt derivaci funkce f a poté stacionární body funkce f .

a) Definiční obor funkce

Předpis funkce f je ve formě podílu dvou mocninných funkcí. Do takového předpisu lze dosadit všechna reálná čísla kromě bodu $x = \frac{1}{2}$, neboť v tomto bodě je jmenovatel funkce roven nule. Žádná další omezení na definiční obor funkce f nejsou, tj.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Derivace funkce

Při derivování funkce f použijeme pravidlo pro derivování podílu. Bude tedy platit

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4)' \cdot (1 - 2x)^2 - (3x^2 - 4) \cdot ((1 - 2x)^2)'}{(1 - 2x)^4}.$$

Funkci $y = (1 - 2x)^2$ je potřeba derivovat jako složenou funkci, kde vnější funkce je druhá mocnina a vnitřní funkcí je lineární funkce $y = 1 - 2x$. Odtud

$$f'(x) = \frac{6x \cdot (1 - 2x)^2 - (3x^2 - 4) \cdot 2(1 - 2x) \cdot (-2)}{(1 - 2x)^4}.$$

Po úpravě lze derivaci funkce f vyjádřit v jednoduchém tvaru

$$f'(x) = \frac{2(3x - 8)}{(1 - 2x)^3}.$$

Předpis funkce f' je ve tvaru podílu dvou mocninných funkcí. Definičním oborem této funkce bude opět množina všech reálných čísel s výjimkou bodu $\frac{1}{2}$, tedy

$$D_{f'} = D_f.$$

c) Stacionární body

Stacionární body funkce f jsou takové body z jejího definičního oboru, v nichž je derivace funkce f nulová. Hledáme tedy všechny body $x \in D_f$, pro které platí

$$f'(x) = 0.$$

V našem konkrétním případě

$$\frac{2(3x - 8)}{(1 - 2x)^3} = 0.$$

Této rovnici vyhovuje jediný bod, a to $x = \frac{8}{3}$. Tento bod patří do definičního oboru funkce f , takže bod $x = \frac{8}{3}$ je jediným stacionárním bodem funkce f .

Příklad 1.14.13 Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf

$$f(x) = (3 - x)e^{\frac{1}{x}}$$

Řešení:

Takto jednoduše je zadán pokyn k provedení důkladné analýzy funkce f . Bude nutno provést sérii různých úkolů: stanovit definiční obor funkce, zjistit zda je funkce spojitá (a případně nalézt body nespojitosti), nalézt průsečíky grafu funkce s osami, určit kde je funkce kladná a kde záporná, vypočítat limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech definičního oboru, najít asymptoty, analyzovat monotónnost funkce a identifikovat body lokálních extrémů, prozkoumat konvexnost/konkávnost funkce včetně stanovení inflexních bodů, a nakonec načrtnout graf funkce.

a) Definiční obor funkce

Jedná se o funkci, která vznikla součinem lineární funkce a funkce, která vznikla složením exponenciální funkce a lineární lomené funkce. Lineární funkce je definována na celé reálné ose, stejně tak exponenciální funkce. Jediné omezení, co se definičního oboru týče, přináší funkce $y = \frac{1}{x}$. Tato funkce je definována na celé reálné ose s výjimkou bodu $x = 0$. Bude tedy platit

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

b) Spojitost funkce

Funkce f je vytvořena pomocí operací skládání a pomocí aritmetických operací mezi základními elementárními funkcemi. Všechny základní elementární funkce jsou spojité, tudíž i funkce f je funkce spojitá na svém definičním oboru.

c) Průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami

Průsečík s osou y hledáme jako bod ležící na grafu funkce f , jehož x -ová souřadnice je nulová. Jedná se tedy o bod se souřadnicemi $(0, f(0))$. Vzhledem k tomu, že bod $x = 0$ v definičním oboru naší funkce f chybí, průsečík s osou y neexistuje.

Průsečíky grafu funkce f s osou x jsou takové body na grafu funkce, které mají y -ovou souřadnici rovnou nule. Jejich x -ovou souřadnici hledáme jako řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

Konkrétně tedy

$$(3 - x)e^{\frac{1}{x}} = 0. \quad (24)$$

Levá strana rovnice je ve tvaru součinu. Součin se bude rovnat nule jedině tehdy, když alespoň jeden ze součinitelů bude roven nule. Exponenciála nenabývá nuly v žádném reálném bodě, druhý ze součinitelů bude roven nule v bodě $x = 3$. Rovnici (24) tedy vyhovuje jeden jediný bod, a to $x = 3$. Existuje tedy jenom jeden průsečík grafu funkce f s osou x , a sice bod

$$P_x = (3, 0).$$

d) Kladnost a zápornost funkce

Znalosti o definičním oboru a nulových bodech funkce f využijeme při vyšetřování kladnosti a zápornosti funkce. Zjistili jsme, že v bodě $x = 3$ je funkční hodnota nulová. Dále víme, že v bodě $x = 0$ funkce není definována. Je čas zjistit, na kterých částech definičního oboru je funkce kladná a na kterých záporná.

Je vhodné si schematicky znázornit definiční obor naší funkce a zaznačit si do něho dosud zjištěné důležité body. Víme, že definičním oborem funkce f jsou všechna reálná čísla s výjimkou nuly. Nula tedy rozděluje definiční obor na dvě části (kladnou a zápornou poloosu). Dále jsme zjistili, že v bodě $x = 3$ prochází graf funkce f osou x . V tomto bodě funkce může (ale také nemusí) měnit znaménko. Abychom to prozkoumali, bod $x = 3$ také zaneseme do tabulky (viz první řádek v Tabulce 1).

Jak se funkce f chová na jednotlivých částech svého definičního oboru, zjistíme podrobným rozborem předpisu funkce f . Funkční předpis je ve tvaru součinu funkce lineární a funkce exponenciální. Z hlediska znamének funkčních hodnot je exponenciální funkce nezajímavá. Na celém svém definičním oboru je kladná, a tudíž se ve výsledném znaménku součinu nijak neprojeví. V každém bodě definičního oboru funkce f bude tedy platit

$$\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}((3 - x)e^{\frac{1}{x}}) = \operatorname{sgn}(3 - x).$$

Znaménko funkčních hodnot funkce f tedy ovlivňuje pouze funkce $y = (3 - x)$. Jedná se o klesající lineární funkci, jejímž grafem je přímka procházející osou x v bodě $x = 3$. Tedy na intervalu $(-\infty, 3)$ je funkce $y = (3 - x)$ kladná a na intervalu $(3, \infty)$ je záporná.

Závěry těchto úvah zaznamenává Tabulka 1.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$

Tabulka 1: Analýza kladnosti a zápornosti funkce f .

e) **Parita**

Funkce může být sudá nebo lichá pouze v případě, že její definiční obor je symetrický podle počátku souřadnicového systému, což je v našem případě splněno. Protože však existuje $x \in D_f$ tak, že hodnota $f(-x)$ není rovna ani hodnotě $f(x)$ ani hodnotě $-f(x)$ (např. $f(3) = 0$ a $f(-3) = 6e^{\frac{1}{3}} \neq 0$), funkce f není ani sudá ani lichá.

f) **Limity**

Vzhledem ke tvaru definičního oboru bude potřeba určit limitu funkce ve třech bodech. Jedná se o body $+\infty$, $-\infty$ a 0 .

• **Bod $+\infty$**

Začneme limitou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)e^{\frac{1}{x}}.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x) = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1.$$

Můžeme tedy použít pravidlo o výpočtu limity součinu a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3-x)e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty.$$

• **Bod $-\infty$**

Uplatníme stejné pravidlo jako v předchozím odstavci a dopočteme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

• **Bod 0**

Zajímá nás limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3-x)e^{\frac{1}{x}}. \tag{25}$$

Pokud bychom chtěli uplatnit stejný princip jako v předchozích dvou bodech, narazíme na problém, protože limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

neexistuje. Existují však obě jednostranné limity a toho využijeme. Spočítáme limitu funkce f v bodě $x = 0$ zleva a limitu funkce f v bodě $x = 0$ zprava.

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Dále také platí

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} e^z = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} e^z = \infty.$$

Odtud (ze vztahu pro limitu složené funkce) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3-x)e^{\frac{1}{x}} = 3 \cdot 0 = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (3-x)e^{\frac{1}{x}} = 3 \cdot \infty = \infty.$$

Dodejme, že limita (25) tedy neexistuje.

g) **Asymptoty**

- **Asymptoty vertikální**

Vzhledem k podobě definičního oboru funkce f se možnost vertikální asymptoty nabízí pouze v bodě $x = 0$. V předchozím odstavci jsme zjistili, že jedna z jednostranných limit v bodě $x = 0$ je nevlastní, což je podmínka pro existenci vertikální asymptoty. Funkce f má tedy jednu vertikální asymptotu popsanou rovnicí

$$x = 0.$$

- **Asymptoty se směrnicí**

Definiční obor funkce „dosahuje“ k oběma nevlastním bodům $+\infty$ a $-\infty$. Existuje tedy možnost, že funkce má dvě asymptoty se směrnicí popsatelné rovnicí $y = kx + q$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$). Prozkoumáme nejprve bod $+\infty$, poté se podíváme na bod $-\infty$.

- ◊ **Asymptota v bodě $+\infty$**

Asymptotu hledáme ve tvaru

$$y = kx + q,$$

kde

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Nejprve spočítáme směrnici hledané asymptoty, tedy číslo k . Počítáme limitu

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-x)e^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

Limitu upravíme do tvaru

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-x)}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Protože platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-x)}{x} = -1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

dostáváme (použitím pravidla o limitě součinu)

$$k = (-1) \cdot 1 = -1.$$

Známe-li hodnotu čísla k , lze prozkoumat existenci čísla q . Zajímá nás limita

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((3-x)e^{\frac{1}{x}} + x \right).$$

U této limity nelze použít pravidlo o limitě součtu dvou funkcí, neboť bychom dostali neurčitý výraz „ $-\infty + \infty$ “. Vytkneme-li však z výrazu proměnnou x , tj.

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\left(\frac{3}{x} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}} + 1 \right),$$

převědeme limitu na typ „ $\infty \cdot 0$ “, což nám dále výrazně pomůže. Limity tohoto typu lze totiž dále převést na limity typu „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, k jejichž výpočtu lze použít l’Hospitalovo pravidlo. Naši limitu tedy převeďme na typ „ $\frac{0}{0}$ “ pomocí malé kosmetické úpravy:

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - 1 \right) e^{\frac{1}{x}} + 1}{\frac{1}{x}}.$$

Použijeme-li l'Hospitalovo pravidlo (derivujeme zvlášť funkce v čitateli a ve jmenovateli), dostáváme limitu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{3}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}.$$

Po vytknutí výraz $-\frac{1}{x^2}$ z čitatele i jmenovatele a jeho zkrácením pak získáme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}\right).$$

Neboť platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{3}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}}\right) = 3 \cdot 1 + (0 - 1) \cdot 1 = 2 = q.$$

Vypočítali jsme hodnotu čísla k i hodnotu čísla q . Obě hodnoty jsou reálná čísla (příslušné limity existují a jsou vlastní), což nás opravňuje k vyslovení závěru, že v bodě $+\infty$ má funkce f asymptotu popsanou rovnicí

$$y = 2 - x.$$

◇ **Asymptota v bodě $-\infty$**

Také v bodě $-\infty$ budeme hledat asymptotu ve tvaru $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx).$$

Uplatněním stejných principů jako v případě asymptoty v ∞ dopočteme limity

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-x)e^{\frac{1}{x}}}{x} = -1$$

a

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((3-x)e^{\frac{1}{x}} + x\right) = 2.$$

Tedy v bodě $-\infty$ má funkce f stejnou asymptotu jako v bodě ∞ , tj. asymptotu vyjádřenou rovnicí

$$y = 2 - x.$$

h) Monotónnost a lokální extrém

Při vyšetřování monotónnosti a hledání lokálních extrémů funkce f nám poslouží její derivace, tedy funkce f' . Platí

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-3-x^2}{x^2}\right), \quad D_{f'} = D_f.$$

• **Body podezřelé z lokálních extrémů**

Lokální extrém funkce mohou být pouze v těch bodech z definičního oboru funkce f , v nichž neexistuje derivace, nebo ve stacionárních bodech.

Podíváme-li se na definiční obor funkce f' , zjistíme, že je stejný jako definiční obor funkce f . Derivace funkce f tedy existuje ve všech bodech definičního oboru funkce f . Odtud tedy body podezřelé z existence lokálního extrému nezískáme. Podíváme se na stacionární body.

Stacionární body funkce f jsou takové body z D_f , v nichž je derivace funkce f nulová, tj. body vyhovující rovnici

$$f'(x) = 0.$$

V našem případě řešíme rovnici

$$e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x - 3 - x^2}{x^2} \right) = 0.$$

Rovnice je ve tvaru součinu. První ze činitelů je exponenciální funkce, která je kladná na celém svém definičním oboru, a tedy není možné, aby se tento činitel někdy rovnal nule. Druhý činitel je ve tvaru podílu, který bude roven nule v případě, kdy bude nulový čítec. Stačí tedy vyřešit rovnici

$$x - 3 - x^2 = 0.$$

Této rovnici nevyhovuje žádné reálné číslo (kvadratický polynom na levé straně nemá reálné kořeny), tedy ani druhý z činitelů nebude nikdy roven nule. Z toho plyne, že funkce f nemá žádné stacionární body, a tudíž ani žádné lokální extrémy.

• Monotónnost

Zbývá vyšetřit monotónnost funkce. Opět si schématicky zaznačíme definiční obor funkce f včetně všech bodů podezřelých z lokálních extrémů. V našem případě žádné body podezřelé z lokálních extrémů nejsou, stačí tedy zakreslit pouze definiční obor funkce f a prozkoumat, jak se na něm chová derivace funkce f . Z pohledu monotónnosti nás zajímá pouze to, zda (a kde) je derivace kladná, či záporná. Na intervalu, kde je funkce f' kladná, bude funkce f rostoucí. A obráceně, na intervalu, kde je derivace funkce f' záporná, je funkce f klesající. Snadno lze určit, že naše funkce f' je na celém svém definičním oboru záporná, tudíž analyzovaná funkce f je klesající na obou intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Naše závěry zachycuje Tabulka 2.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	$\nexists$	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Tabulka 2: Analýza monotónnosti funkce f .

i) Konvexnost, konkávnost a inflexní body

Abychom určili, kde je funkce konkávní a kde konvexní, případně našli její inflexní body, vypočítáme druhou derivaci funkce f :

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4} \right) \cdot (5x + 3), \quad D_{f''} = D_f.$$

• Body podezřelé z inflexe

Inflexní bod funkce f je takový bod z množiny $D_{f''}$, v němž se funkce f mění z konvexní

na konkávní nebo obráceně. Jde o body, v nichž neexistuje druhá derivace funkce f , nebo body, v nichž je funkce f'' nulová.

Funkce f'' má stejný definiční obor, jako funkce f' . Neexistuje tedy bod z definičního oboru funkce f , v němž by existovala první derivace a přitom neexistovala derivace druhá. Body podezřelé z inflexe tedy budeme muset hledat podle druhé podmínky, a to

$$f''(x) = 0.$$

V našem případě řešíme rovnici

$$e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right) \cdot (5x + 3) = 0$$

Této rovnici vyhovuje pouze bod $x = -\frac{3}{5}$. V tomto bodě může mít funkce inflexi. Zda je bod $x = -\frac{3}{5}$ inflexním bodem, prozkoumáme v dalším odstavci.

• Konvexnost a konkávnost

Opět si načrtneme schéma definičního oboru funkce f a zaneseme do něho všechny body podezřelé z inflexe. V předchozím odstavci jsme zjistili, že funkce f může mít inflexní bod pouze v bodě $x = -\frac{3}{5}$. Bude to tedy jediný bod, který do schématu přidáme. Tímto jsme získali tři intervaly, které je nutno prozkoumat z hlediska konvexnosti a konkávnosti funkce f , a to intervaly $(-\infty, -\frac{3}{5})$, $(-\frac{3}{5}, 0)$ a $(0, \infty)$. Tentokrát nás bude zajímat, jak se na těchto intervalech chová funkce f'' . Konkrétně nás zajímá, zda je funkce f'' na těchto intervalech kladná nebo záporná. Interval, na kterém je funkce f'' kladná, je intervalem, kde je funkce f konvexní. Tam, kde je funkce f'' záporná, je funkce f konkávní.

Předpis funkce f'' je ve tvaru součinu tří činitelů. První dva z nich jsou funkce kladné na celém definičním oboru funkce f'' . Znaménko funkčních hodnot funkce f'' tedy ovlivňuje pouze třetí z činitelů, funkce $y = 5x + 3$. Jedná se o lineární funkci rostoucí na celém svém definičním oboru. V kterémkoli bodě z intervalu $(-\infty, -\frac{3}{5})$ je záporná, naopak ve všech bodech z intervalů $(-\frac{3}{5}, 0)$ a $(0, \infty)$ je kladná. A stejná znaménka mají funkční hodnoty funkce f'' na všech zmíněných intervalech. Dle výše uvedeného můžeme vyslovit závěr, že funkce f je konkávní na intervalu $(-\infty, -\frac{3}{5})$ a konvexní na intervalech $(-\frac{3}{5}, 0)$ a $(0, \infty)$. Všechna naše zjištění jsou zaznamenána v Tabulce 3.

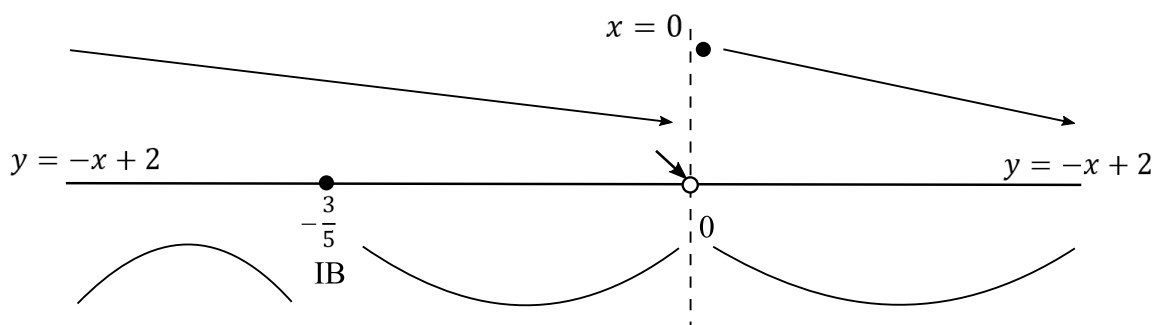
x	$(-\infty, -\frac{3}{5})$	$-\frac{3}{5}$	$(-\frac{3}{5}, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	$\neq$	+
$f(x)$	$\cap$	$\frac{18}{5}e^{-\frac{5}{3}}$	$\cup$	$\neq$	$\cup$

Tabulka 3: Analýza konvexnosti a konkávnosti funkce f .

Z Tabulky 3 můžeme navíc vyčíst další informaci. Bod $x = -\frac{3}{5}$ je bod, v němž se funkce f mění z konkávní na konvexní, a tudíž je inflexním bodem.

j) Graf funkce

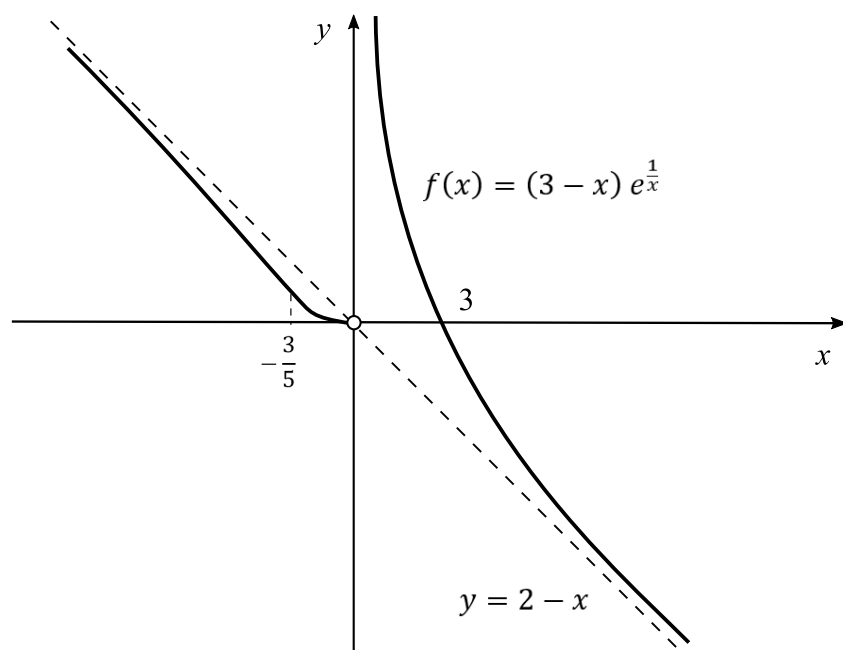
Všechny provedené analýzy a úvahy směřovaly k jedinému cíli, k načrtnutí grafu funkce f . V tomto kroku již máme dost informací, aby byl stanovený cíl splněn. Před samotným načrtnutím grafu je vhodné si všechny informace získané o funkci f shrnout do jediného pomocného schématu (viz Obrázek 4):



Obrázek 4: Vlastnosti funkce $f(x) = (3 - x)e^{\frac{1}{x}}$.

- Horizontální přímka představuje definiční obor funkce f , kde prázdné kolečko vyznačuje body, které do D_f nenáležejí. Zde tedy prázdné kolečko v bodě 0 značí, že definičním oborem naší funkce f jsou všechna reálná čísla kromě nuly.
- Plnými kolečky jsou vyznačeny další význačné body z D_f (pokud existují): nulové body (NB), body lokálních extrémů (l.min. a l.max) a inflexní body (IB); zde máme pouze inflexní bod $-\frac{3}{5}$.
- Vlastnosti funkce f týkající se monotonie a konvexnosti/konkávnosti jsou značeny stejnými symboly jako v Tabulkách 2 a 3. Funkce je tedy klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$; na intervalu $(-\infty, -\frac{3}{5})$ je konkávní a na intervalech $(-\frac{3}{5}, 0)$ a $(0, \infty)$ konvexní.
- Přerušované vertikální přímky představují vertikální asymptoty, navíc jsou u nich vyznačeny také příslušné jednostranné limity (pokud má smysl je zkoumat a existují). Vertikální přímka $x = 0$ tedy představuje vertikální asymptotu; limita $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ je vyznačena plným kolečkem pravo nahoře u této přímky, limita $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ pak naznačena šipkou směřující k prázdnému kolečku v bodě 0.
- Rovnice zapsané na „okrajích“ definičního oboru představují rovnice asymptot se směrnici v bodech $-\infty$, resp. ∞ (pokud existují).
- Stejný způsob shrnutí vlastností funkcí je použit i ve schématech u neřešených příkladů v předchozí kapitole.

Výsledný náčrtek grafu funkce f zachycuje Obrázek 5.



Obrázek 5: Náčrtek grafu funkce $f(x) = (3-x)e^{\frac{1}{x}}$.

Příklad 1.15.1 Vypočítejte integrál; promyslete, na kterém intervalu/intervalech primitivní funkci počítáme

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx \quad (26)$$

Řešení:

Integrovaná funkce je ve tvaru součinu a jejím definičním oborem je množina $\mathbb{R}$. První z činitelů je lineární funkce $y = x$, druhým činitelem je goniometrická funkce $y = \sin^2 x$. Jedná se o typickou úlohu vhodnou pro uplatnění metody *per partes*. Dle této metody, pokud na uvažovaném intervalu existují (spojité) derivace funkcí u a v , platí

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx. \quad (27)$$

1) Per partes č. 1

V prvním kroku nejdříve použijeme metodu *per partes*. Volíme

$$u(x) = x \quad \text{a} \quad v'(x) = \sin^2(x),$$

dopočítáme $u'(x)$ a $v(x)$.

• Hledání funkce $u'(x)$

První úloha je triviální, funkci $u'(x)$ nalezneme jako derivaci funkce $u(x)$. Platí

$$u'(x) = 1.$$

• Hledání funkce $v(x)$

Druhá úloha, stanovení funkce v , je složitější. Je potřeba najít primitivní funkci k funkci $y = \sin^2 x$, tedy spočítat integrál

$$v(x) = \int \sin^2 x \, dx. \quad (28)$$

Ačkoli to na první pohled nemusí být zřejmé, i tento integrál můžeme řešit metodou *per partes*.

◇ **Per partes č. 2**

Stačí zvolit

$$u_1(x) = \sin x \quad \text{a} \quad v_1'(x) = \sin x$$

a spočítat

$$u_1'(x) = \cos x \quad \text{a} \quad v_1(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

Odtud podle vztahu (27) platí

$$v(x) = -\sin(x) \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, dx.$$

◇ **Upravíme do tvaru rovnice a tuto vyřešíme**

Použijeme vztah známý jako „goniometrický rozklad jedničky“ a funkci v integrandu přepíšeme do nového tvaru

$$v(x) = -\sin(x) \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2(x)) \, dx.$$

Využijeme toho, že integrál rozdílu dvou funkcí lze vyjádřit jako rozdíl dvou integrálů těchto funkcí, tedy

$$v(x) = -\sin(x) \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \sin^2(x) \, dx.$$

První z integrálů lze snadno vypočítat, primitivní funkce k funkci $y = 1$ je funkce $y = x$. Tedy

$$v(x) = -\sin(x) \cdot \cos x + x - \int \sin^2(x) \, dx. \quad (29)$$

Zbylý integrál je identický s integrálem (28), tedy integrál s nímž jsme začali a který jsme si označili jako funkci $v(x)$. Toto označení opět použijeme a vztah (29) se promění v rovnici

$$v(x) = -\sin(x) \cdot \cos x + x - v(x).$$

Odtud již snadno určíme hledanou funkci $v(x)$, tj.

$$v(x) = \frac{1}{2} [x - \sin(x) \cdot \cos x].$$

Vrátíme se zpátky k integrálu (26). Dle vztahu (27) platí

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx = x \cdot \frac{1}{2} [x - \sin(x) \cdot \cos x] - \int \frac{1}{2} [x - \sin(x) \cdot \cos x] \, dx.$$

b) Upravíme a použijeme substituci

Integrál z rozdílu dvou funkcí je roven rozdílu integrálů, tzn. předchozí vztah můžeme upravit a psát ve tvaru

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx = x \cdot \frac{1}{2} [x - \sin(x) \cdot \cos x] - \int \frac{1}{2} x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(x) \cdot \cos x \, dx. \quad (30)$$

První z integrálů na pravé straně je triviální. Primitivní funkce k funkci $y = \frac{1}{2}x$ je funkce $y = \frac{1}{4}x^2$, tedy

$$\int \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{4}x^2. \quad (31)$$

Při řešení druhého integrálu uplatníme substituci $t = \sin x$, tj. $dt = \cos x \, dx$. Tedy

$$\frac{1}{2} \int \sin(x) \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int t \, dt$$

Primitivní funkce k funkci $y = t$ je funkce $y = \frac{t^2}{2}$. Odtud

$$\frac{1}{2} \int \sin(x) \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int t \, dt = \frac{t^2}{4}.$$

K proměnné x se vrátíme zpátky opět substitucí $t = \sin x$ a dostaneme

$$\frac{1}{2} \int \sin(x) \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int t \, dt = \frac{t^2}{4} = \frac{\sin^2(x)}{4},$$

tj.

$$\frac{1}{2} \int \sin(x) \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^2(x)}{4}. \quad (32)$$

Dosazením (31) a (32) do vztahu (30) dostáváme

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx = x \cdot \frac{1}{2} [x - \sin(x) \cdot \cos x] - \frac{1}{4}x^2 + \frac{\sin^2(x)}{4}.$$

Po úpravě získáme konečný výsledek ve tvaru

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} \cdot [x^2 - x \sin(2x) + \sin^2(x)] + c, \, c \in \mathbb{R}, \, x \in \mathbb{R}.$$

Hledanou primitivní funkci F můžeme (po úpravách) psát také například ve tvaru

$$F(x) = \frac{1}{8} \cdot [2x^2 - 2x \sin 2x - \cos 2x] + c, \, c \in \mathbb{R}, \, x \in \mathbb{R}.$$

Definičním oborem funkce f , ke které jsme hledali primitivní funkci, je celá množina $\mathbb{R}$ (tedy interval). Metody použité při výpočtu nevyžadovaly žádné zúžení této množiny, takže funkce F je primitivní funkcí k funkci f na celém $D_f = \mathbb{R}$.

Reálná konstanta „+c“ přidaná ve výsledku pouze naznačuje, že primitivních funkcí F k dané funkci f existuje nekonečně mnoho (i když v mezivýpočtech to pro lepší přehlednost explicitně zdůrazněno není).

Příklad 1.15.1 (jiný způsob řešení) Vypočítejte integrál; promyslete, na kterém intervalu/intervalech primitivní funkci počítáme

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx \quad (33)$$

Řešení:

Integrál z předchozího příkladu lze vypočítat i jiným způsobem, kdy vztah

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

použijeme hned na začátku výpočtu a poté pokračujeme metodou *per partes*.

Dosazením výše uvedeného vztahu do integrálu (33) a následnými jednoduchými úpravami tedy dojdeme k mezivýsledku ve tvaru

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin^2 x \, dx &= \int \frac{x}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int x \, dx - \frac{1}{2} \int x \cdot \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \int x \cdot \cos 2x \, dx. \end{aligned}$$

Zbýlý integrál vypočteme metodou *per partes*, kde volíme $u(x) = x$ a $v'(x) = \cos 2x$:

$$\int x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x.$$

Dosazením do mezivýsledku výše pak dostaneme

$$\int x \cdot \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \cdot \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) = \frac{1}{8} (2x^2 - 2x \cdot \sin 2x - \cos 2x).$$

Hledanou primitivní funkcí F je tedy funkce

$$F(x) = \frac{1}{8} (2x^2 - 2x \sin 2x - \cos 2x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 1.15.3 Vypočítejte integrál; promyslete, na kterém intervalu/intervalech primitivní funkci počítáme

$$\int \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x - 8} \, dx \tag{34}$$

Řešení:

Nejprve prozkoumáme funkci v integrandu. Definičním oborem této funkce je množina $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Protože primitivní funkci vždy hledáme na intervalu, budeme uvažovat libovolný interval $I \subset D_f$, a primitivní funkci k funkci f budeme hledat na tomto intervalu. Ve většině případů (stejně jako v tom našem) však postup výpočtu primitivní funkce na volbě intervalu I nezávisí.

Funkce, kterou chceme integrovat, je funkcí v lomeném tvaru. V čitateli i ve jmenovateli je polynom druhého stupně. Jedná se tedy o racionální lomenou funkci. V tomto bodě se nabízí dvě různé cesty, kterými se můžeme vydat. Tu správnou cestu nám pomůže zvolit jmenovatel naší funkce. Zajímá nás, zda polynom ve jmenovateli má reálné kořeny. Pokud by reálné kořeny neměl, museli bychom zvolit cestu, která by vedla (po několika úpravách a substitucích) k primitivní funkci obsahující funkci arkustangens. Existence reálných kořenů nám napoví, že integrovanou funkci půjde vyjádřit prostřednictvím parciálních zlomků, k nimž pak budeme hledat jednotlivé primitivní funkce.

Polynom ve jmenovateli naší funkce má dva reálné kořeny $x = 4$ a $x = -2$ a lze tedy vyjádřit ve tvaru

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2).$$

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky můžeme aplikovat pouze u funkcí, které se označují jako ryze racionální lomené. Jedná se o funkce, kde stupeň polynomu v čitateli je menší než stupeň polynomu ve jmenovateli. V našem případě jsou oba stupně stejné. Bude tedy potřeba nejprve stupeň polynomu v čitateli snížit, např. dělením polynomu polynomem. Po této úpravě pak dostáváme

$$\int \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x - 8} dx = \int \left(-1 - \frac{7 + 2x}{x^2 - 2x - 8} \right) dx.$$

Integrál na pravé straně rozdělíme na dva integrály

$$\int \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x - 8} dx = \int (-1) dx - \int \frac{7 + 2x}{x^2 - 2x - 8} dx. \quad (35)$$

První z integrálů je triviální, primitivní funkce k funkci $y = -1$ je funkce $y = -x$. Druhý z integrálů má v integrandu ryze racionální lomenou funkci, kterou rozložíme na parciální zlomky. Hledáme tedy dvě reálné konstanty A a B tak, aby

$$\frac{7 + 2x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2}. \quad (36)$$

Tyto konstanty A a B určíme například postupem popsáním níže.

Rovnici (36) upravíme (přenásobením výrazem $x^2 - 2x - 8$) do tvaru

$$7 + 2x = A(x + 2) + B(x - 4),$$

resp.

$$7 + 2x = 2A - 4B + Ax + Bx.$$

Srovnáme koeficienty u stejných mocnin proměnné x na levé a pravé straně a získáme tak soustavu rovnic s neznámými A a B

$$\begin{aligned} x^0 : \quad 7 &= 2A - 4B \\ x^1 : \quad 2 &= A + B. \end{aligned} \quad (37)$$

Řešením soustavy (37) je

$$A = \frac{5}{2} \quad \text{a} \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Nalezené hodnoty dosadíme do vztahu (36), tedy

$$\frac{7 + 2x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{5}{2(x - 4)} - \frac{1}{2(x + 2)}.$$

Rovnost (35) lze pak přepsat ve tvaru

$$\int \frac{1 - x^2}{x^2 - 2x - 8} dx = -x - \frac{5}{2} \int \frac{1}{x - 4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 2} dx.$$

Oba integrály na pravé straně rovnosti jsou téhož typu. Oba povedou k primitivní funkci ve tvaru přirozeného logaritmu (stačí zvolit substituce $t = x - 4$ a $w = x + 2$). Tedy

$$\int \frac{1-x^2}{x^2-2x-8} dx = -x - \frac{5}{2} \ln|x-4| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}.$$

Hledanou primitivní funkci $F(x)$ lze také vyjádřit například ve tvaru

$$F(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{(x-4)^5} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\},$$

kde I je interval.

Příklad 1.15.49 Vypočítejte integrál; promyslete, na kterém intervalu/intervalech primitivní funkci počítáme

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{8x} - 6e^{4x} + 18} dx \quad (38)$$

Řešení:

Opět začneme tím, že dobře prozkoumáme integrovanou funkci. Jedná se o funkci v lomeném tvaru, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{R}$. Jak v čitateli, tak ve jmenovateli se vyskytují exponenciální funkce. V exponentu čitatele vidíme $4x$. V exponentu jmenovatele nacházíme opět $4x$ a navíc $8x$. Fakt, že v exponentu jsou stejné výrazy, respektive jejich dvojnásobek, nám ukazuje cestu, jak integrál vypočítat. Nabízí se substituce $t = e^{4x}$ ($dt = 4e^{4x} dx$), po níž integrál (38) získá novou podobu

$$\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 18}.$$

V integrandu nyní vidíme ryze racionální lomenou funkci proměnné t . Polynom ve jmenovateli nemá reálné kořeny, tudíž primitivní funkce bude obsahovat funkci arkustangens. Naším cílem tedy bude upravit integrovanou funkci tak, abychom mohli použít známý vztah

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

K tomu stačí několik drobných úprav jmenovatele integrované funkce. Začneme doplněním na čtverec, tedy

$$\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 18} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t-3)^2 + 9}.$$

Abychom se ještě více přiblížili podobě integrálu ze vztahu (39), vytkneme ze jmenovatele číslo 9 a po úpravě dospějeme k integrálu v novém tvaru

$$\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 18} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t-3)^2 + 9} = \frac{1}{36} \int \frac{dt}{\left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 1}.$$

Od našeho cíle nás dělí poslední krok, a to substituce $u = \frac{t-3}{3}$ ($du = \frac{1}{3} dt$). Po substituci získává integrál novou podobu

$$\frac{1}{36} \int \frac{dt}{\left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{12} \int \frac{du}{u^2 + 1}.$$

Použijeme vztah (39) a nacházíme příslušnou primitivní funkci

$$\frac{1}{12} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} u + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Pomocí výše použitých substitucí se vrátíme k výchozí proměnné x a dostaneme primitivní funkci $F(x)$ ve tvaru

$$F(x) = \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^{4x} - 3}{3} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primitivní funkci F k funkci f jsme našli na celém (intervalu) $D_f = \mathbb{R}$.

Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Co bude na písemce?

Aneb sbírka příkladů ke kurzu Matematika 1

Výkonná redaktorka Barbora Krudencová

Odpovědná redaktorka Barbora Vodičková

Technická redakce Pavla Kouřilová

Kniha neprošla redakční jazykovou úpravou ve vydavatelství.

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci

Křížkovského 8, 771 47 Olomouc

www.vydavatelstvi.upol.cz

1. vydání

Olomouc 2020

ISBN 978-80-244-5854-0

Neprodejná publikace

VUP 2020/0453