



Přírodovědecká
fakulta

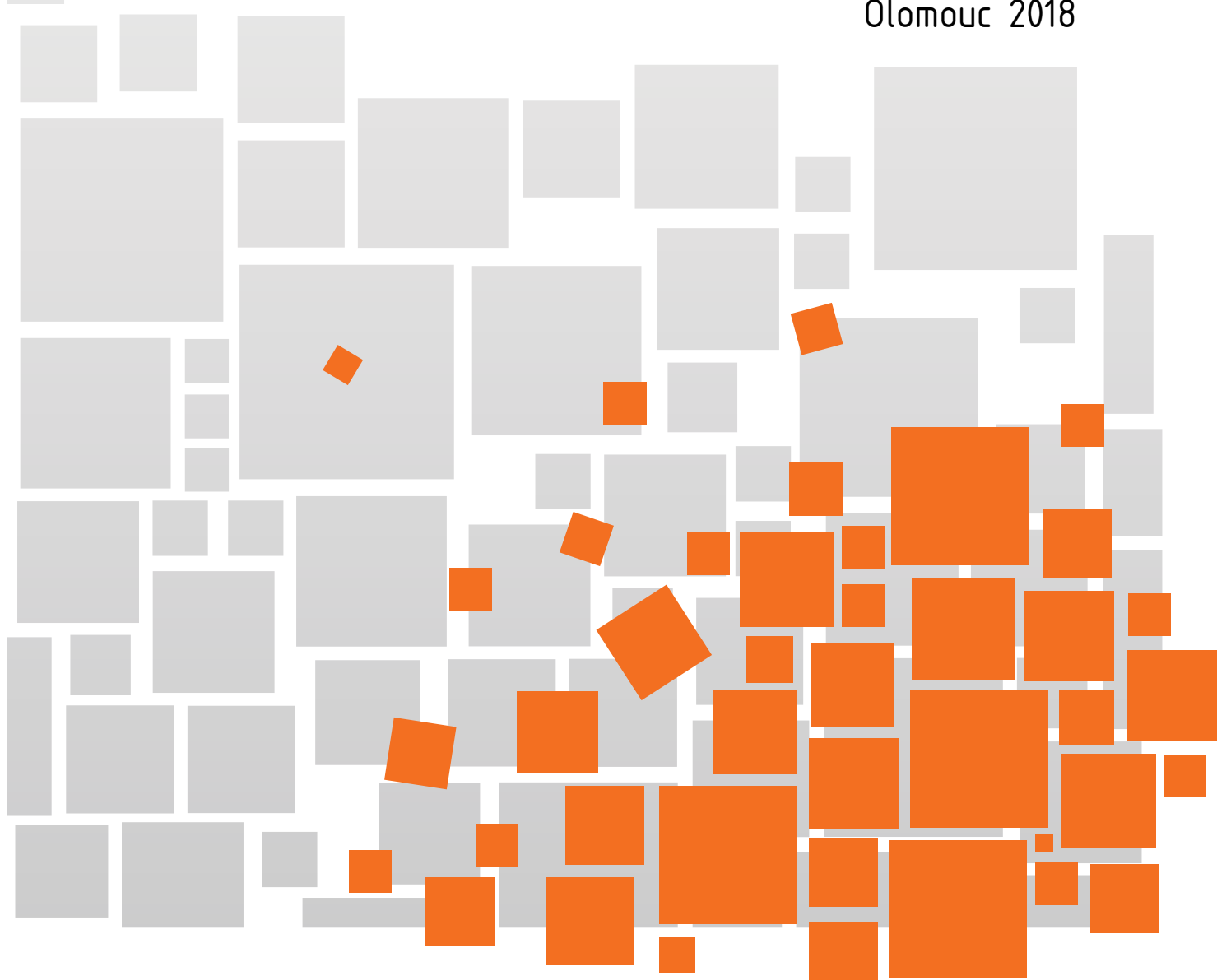
Univerzita Palackého
v Olomouci

CO BYLO NA PÍSEMCE?

SBÍRKA PŘÍKLADŮ KE KURZU
MATEMATIKA 2

Iveta Bebčáková, Pavla Kouřilová

Olomouc 2018



Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Co bylo na písemce?

Sbírka příkladů ke kurzu Matematika 2

Iveta Bebčáková
Pavla Kouřilová

Olomouc 2018

Oponenti

Mgr. Jana Burkotová, Ph.D.

Mgr. Miroslav Rypka, Ph.D.

1. vydání

Neoprávněné užití tohoto díla je porušením autorských práv a může zakládat občanskoprávní, správněprávní, popř. trestněprávní odpovědnost.

© Iveta Bebčáková, Pavla Kouřilová, 2018

© Univerzita Palackého v Olomouci, 2018

ISBN 978-80-244-5420-7

Obsah

Úvod	5
Přehled použitého značení	6
1 Zadání příkladů	7
1.1 Množiny v $\mathbb{R}$ a operace s nimi	7
1.2 Soustavy rovnic v $\mathbb{R}^2$	7
1.3 Primitivní funkce	8
1.4 Množiny v $\mathbb{R}^2$	10
1.5 Nevlastní integrály	12
1.6 Definiční obor funkce	14
1.7 Dvojné limity	15
1.8 Parciální derivace funkce dvou proměnných	17
1.9 Parciální derivace vyšších řádů	18
1.10 Přibližný výpočet funkčních hodnot	19
1.11 Lokální extrémy funkce dvou proměnných	19
1.12 Vázané lokální extrémy	20
1.13 Globální extrémy	21
1.14 Elementární množiny v $\mathbb{R}^2$	22
1.15 Dvojný integrál	23
1.16 Mocninné řady	25
2 Výsledky neřešených příkladů	27
2.1 Množiny v $\mathbb{R}$ a operace s nimi	27
2.2 Soustavy rovnic v $\mathbb{R}^2$	27
2.3 Primitivní funkce	28
2.4 Množiny v $\mathbb{R}^2$	30
2.5 Nevlastní integrály	46
2.6 Definiční obor funkce	49
2.7 Dvojné limity	53
2.8 Parciální derivace funkce dvou proměnných	55
2.9 Parciální derivace vyšších řádů	63
2.10 Přibližný výpočet funkčních hodnot	63
2.11 Lokální extrémy funkce dvou proměnných	64
2.12 Vázané lokální extrémy	65
2.13 Globální extrémy	66
2.14 Elementární množiny v $\mathbb{R}^2$	76
2.15 Dvojný integrál	79
2.16 Mocninné řady	87
3 Řešené příklady	91

Úvod

Milý čtenáři,

od roku 2005 do roku 2018 jsme měly tu čest přednášet na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci kurz s názvem Matematika 2. Jedná se o jeden ze stěžejních kurzů určených oborům Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovníctví/pojišťovnictví a Aplikovaná statistika. Každý rok z těch mnoha krásných let se na nás studenti obraceli s otázkou: „Odkud berete příklady na zápočet a na zkoušku? Z jaké literatury?“ Jen těžko jsme vysvětlovaly, že úlohy, se kterými se setkávají u zkoušek a zápočtů, odnikud nečerpáme, ale že je tvoříme. Za ta léta se úlohy nastřádaly a nám přišlo ohromně líto je dále nevyužít. Příklady z posledních let jsme proto sesbíraly a sestavily tuto sbírku.

Sbírka obsahuje nejrozumnější typy úloh, se kterými se studenti mohli potkat na cestě za zápočtem nebo zkouškou z předmětu Matematika 2. Část úloh předkládáme i s podrobně popsáním procesem řešení (příklady označené symbolem *), abychom ukázaly, jak je možno při řešení obdobných úloh postupovat. Většina příkladů je však neřešená, představuje výzvu a možnost přijít si na vlastní způsob řešení. Pro kontrolu správnosti nalezeného řešení jsou připojeny výsledky všech předkládaných úloh.

Hodně štěstí a zábavy při řešení!

Iveta Bebčáková a Pavla Kouřilová

Autorky děkují Mgr. Janě Burkotové, Ph.D. a Mgr. Miroslavu Rypkovi, Ph.D. za podrobné přečtení rukopisu a cenné připomínky a v neposlední řadě také O. Gergišákové, A. Hubinkové, H. Laštovicové, T. Pohankovi, J. Příbylovi, K. Sklenářové a T. Václavkovi za kontrolu správnosti výsledků u neřešených příkladů.

Tato sbírka vznikla za podpory projektu FRUP_2018_048 Inovace vybraných předmětů na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky.

Přehled použitého značení

$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
A°	vnitřek množiny A
hA	hranice množiny A
Df	definiční obor funkce f
f'	první derivace funkce jedné proměnné f
f''	druhá derivace funkce jedné proměnné f
f'_x	parciální derivace funkce f prvního řádu podle proměnné x
f''_{xx}	parciální derivace funkce f druhého řádu dvakrát podle proměnné x
f''_{xy}	smíšená parciální derivace funkce f druhého řádu podle proměnné x a proměnné y
IAK	interval absolutní konvergence mocninné řady
OK	obor konvergence mocninné řady

1 Zadání příkladů

1.1 Množiny v $\mathbb{R}$ a operace s nimi

Pomocí intervalů запиšte množiny A , B a C ; množiny zakreslete

1. $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt[3]{x^2 - 4} \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; 1 \geq |x - 1| > 0\}$, $C = A \cap B$
2. $A = \{x \in \mathbb{R}; \log(x + 1) < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; |x + 3| \leq 2\}$, $C = A \cup B$
3. $A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; |x - 3| < 2\}$, $C = A \setminus B$
4. $A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + x + 1 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; 0 < |3x + 2| < 3\}$, $C = A \setminus B$

1.2 Soustavy rovnic v $\mathbb{R}^2$

Vypočítejte všechna řešení soustavy rovnic v $\mathbb{R}^2$

1.
$$\begin{aligned} x - 2y + xy &= 27 \\ x^2 - xy - 3x &= 0 \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 - 10 &= 0 \\ xy + 6y^2 - 10y &= 0 \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y &= 0 \\ x^2 - xy - 2x &= 0 \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} y^2 - xy - 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4y &= 2x \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x - 2y + xy &= 27 \end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 10 \\ x + 6y &= 10 \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} 2x^2 - 3y^2 - 5x - 2y &= 26 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 2y &= 0 \\ x - y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$9. \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{41}{20}$$

$$xy = 20$$

$$10. \quad x + xy - 2y = 27$$

$$x - y = 3$$

$$11. \quad \frac{x}{4} + xy = 5y$$

$$5y + xy = 9$$

$$12. \quad \frac{x}{4} + xy = 5y$$

$$5y + xy = 9$$

1.3 Primitivní funkce

Najděte všechny primitivní funkce

$$1. \quad \int \frac{5x}{\sqrt[4]{2x^2 + 5}} dx$$

$$2. \quad \int \frac{12}{7 - 2x + x^2} dx$$

$$3. \quad \int 4x^2 \sqrt[3]{1 - 5x^3} dx$$

$$4. \quad \int \frac{3}{x^2 + 4x + 9} dx$$

$$5. \quad \int 2x^2 \cos(1 - 4x^3) dx$$

$$6. \quad \int \frac{3}{4x^2 - 4x + 2} dx$$

$$7. \quad \int 2x \sqrt[3]{1 - 3x^2} dx$$

$$8. \quad \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

$$9. \quad \int \frac{6 + 4x}{x^2 + 3x - 7} dx$$

$$10. \quad \int \frac{4}{x^2 - 6x + 18} dx$$

11. $\int \frac{5x^2}{\sqrt[3]{8x^3 + 1}} dx$
12. $\int \frac{7}{13 + 12x + 4x^2} dx$
13. $\int 2x^2 \sin(3x^3 + 1) dx$
14. $\int \frac{7}{2x^2 + 3x + 6} dx$
15. $\int \frac{5}{4x^2 + 12x + 9} dx$
16. $\int \frac{6}{3x^2 + 4x + 5} dx$
17. $\int 5x \sqrt[3]{1 - 3x^2} dx$
18. $\int \frac{3}{2x^2 - 5x + 4} dx$
19. $\int \frac{5}{4x^2 + 12x + 10} dx$
20. $\int \frac{7}{4x^2 - 20x + 25} dx$
21. $\int \frac{1}{(4 + x)\sqrt{x}} dx$
22. $\int \frac{e^x + e^{2x}}{1 - e^{2x}} dx$
23. $\int \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{3x^2} dx$
24. $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{2x - 3} dx$
25. $\int \frac{1}{3x \ln^2(x)} dx$
26. $\int \frac{-5}{8 + x^2} dx$

1.4 Množiny v $\mathbb{R}^2$

Zakreslete množinu M a pomocí určitého integrálu vypočtěte její obsah

1. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 0, y \geq e^{-2x}, y \leq e^3\}$
2. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{x}{3}, y \leq \sqrt{\frac{2}{3}x}\right\}$
3. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x^2 + 4x - 3, y \geq (x - 1)^2\}$
4. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq \frac{1}{3}, y \leq 1, y \geq \ln(3x)\right\}$
5. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{x}{2}, y \leq \sqrt{4x}\right\}$
6. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq e^{2x}, y \leq e^3\}$
7. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 4x - x^2 - 3, y \geq -x + 3\}$
8. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1, y \leq 1, y \geq \ln(2x)\}$
9. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 2x - x^2, y - \frac{3}{2}x \geq 0\right\}$
10. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq \frac{4x}{\pi}, y \leq \sin(2x)\right\}$
11. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{1}{2x}, y \geq \frac{x}{2} + 1, y \leq 8\right\}$
12. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y + 2x \geq 0, 1 \geq y \geq \ln(x + 1)\}$
13. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 1, y \geq 1 - x^2, y \geq \ln(-x), x \leq 0\}$
14. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \ln(x - 2), y \geq 3 - x, y \leq 1\}$
15. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 2 - 2x, y \geq 1 - e^2 - x, y \leq \ln(x + e^2)\}$
16. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \cotg x, y \geq -1, y \leq x - \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \pi\right\}$
17. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \tg x, y \leq 1, y \geq -x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
18. $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \sqrt{3} - x, y \leq \sqrt{x + 3}, y \geq \frac{1}{3}x + 1\right\}$
19. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 16, y \geq x^2, y \geq 3x + 4\}$

- *20. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 - x - y \geq 0, \ln(x - 3) - y \geq 0, -1 \leq y \leq 0\}$
21. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y + x \geq 0, \frac{\pi}{4} \geq y \geq \arctg x\}$
22. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq e^x, y \geq 1 - x, x \leq e\}$
23. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \arcsin x \leq y \leq \frac{\pi}{2}, x \geq 0\}$
24. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \arctg x \leq y \leq \frac{\pi}{4}, x \geq 0\}$
25. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1, x \geq 0, y \geq \ln x\}$
26. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq \sqrt{x}, 0 \leq y \leq 6 - x\}$
27. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \ln x, 1 \geq y \geq 2 - 2x^2, x > 0\}$
28. $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x - 3, y \geq \frac{1}{x - 3}, y \leq 2, x > 3 \right\}$
29. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -(x - 2)^2, y \geq -x - 4, 8 - 2x - x^2 \geq y\}$
30. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 8 - 2x - x^2, x + y \geq 2\}$
31. $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x, y \geq x + 1, y \leq 4 \right\}$
32. $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \frac{\pi}{2} \sin x, y \leq x, x \leq 0 \right\}$
33. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 1)^2 \leq y \leq 1 - (x - 1)^2\}$
34. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 5 - x, y \geq 5x - 5, y \leq 5x - x^2\}$
35. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 4, y \leq 6 - x\}$
36. $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená křivkou $y = \cotg x$ a přímkou p , která prochází body $(\frac{\pi}{4}, 1)$ a $(\frac{3\pi}{4}, -1)$; přitom platí $x \in (0, \pi)$
37. $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafem funkce $f(x) = \arctg x$ a přímkami p a q , přičemž příмка p prochází body $(2, 0)$ a $(2, \frac{\pi}{4})$ a příмка q prochází body $(2, 0)$ a $(1, \frac{\pi}{4})$
38. $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina ohraničená grafem funkce $f(x) = \arctg x$ a přímkami p a q , přičemž příмка p prochází body $(-2, 0)$ a $(-2, -\frac{\pi}{4})$ a příмка q prochází body $(-2, 0)$ a $(-1, -\frac{\pi}{4})$
39. $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina vymezená podmínkami $y \leq \ln x, y \geq x^2 - 5x + 4$ a polorovinou definovanou hraniční přímkou p a vnitřním bodem $(0, 0)$; příмка p prochází body $(4, 0)$ a $(e, 1)$

1.5 Nevlastní integrály

Rozhodněte o konvergenci nevlastního integrálu a pokud je to možné, integrál spočítejte

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cotg(3x) \, dx$

2. $\int_1^e \frac{1}{3x \ln^2 x} \, dx$

3. $\int_0^\infty \frac{2x^3}{1+3x^4} \, dx$

4. $\int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x^2} \, dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cotg(2x) \, dx$

6. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{4x \ln^2 x} \, dx$

7. $\int_1^\infty \frac{3x^3}{2x^4+1} \, dx$

8. $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2} \, dx$

9. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+x-2} \, dx$

10. $\int_{\ln 2}^\infty \frac{e^x}{(e^x-1)^3} \, dx$

11. $\int_4^5 (x-4) \ln(x-4) \, dx$

12. $\int_0^5 \frac{4x^2+12x+4}{x(x+2)^2} \, dx$

13. $\int_0^\infty \frac{e^x}{1-e^{2x}} \, dx$

14. $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2-x-6} \, dx$

15. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$
17. $\int_0^1 \frac{2 + 3x^2}{x^6} dx$
18. $\int_0^{\infty} \frac{1}{4 + 3x^2} dx$
19. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \ln(\cos(2x)) dx$
- * 20. $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} dx$
21. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$
22. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9} dx$
23. $\int_0^2 \frac{1}{4 - x^2} dx$
24. $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$
25. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16 - 4x^2}} dx$
26. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin(3x)} dx$
27. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} dx$
28. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1 - e^x} dx$
29. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$
30. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx$

31. $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^6 x} dx$
32. $\int_0^1 \frac{\ln(2x)}{x} dx$
33. $\int_{-\infty}^4 \frac{5}{16x - 38 - 2x^2} dx$
34. $\int_0^\infty \frac{5}{x^2 + 4} dx$
35. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} dx$

1.6 Definiční obor funkce

Určete, zapíšte a zakreslete definiční obor funkce f

1. $f(x) = \frac{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x) - 1}}{\operatorname{arctg}(x^2 + x - 2)}$
2. $f(x) = \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt[4]{3x - x^2}}{1 - \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)}$
4. $f(x) = \frac{\log\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)}{\sqrt[3]{\sin(2x) - 2}}$
5. $f(x, y) = \frac{\ln\left(\left|\frac{x}{2}\right| - y\right)}{\sqrt[4]{y - x^2 + x + 2}}$
6. $f(x, y) = \frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x}{y+2}\right)}{\sqrt[3]{(x+2)^2 + (y-3)^2}}$
7. $f(x, y) = \frac{1 + \ln(2 - (x-4)^2 - (y-1)^2)}{\sqrt{x + y^2 - 4}}$
8. $f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{xy - 1}}{\log_2(x + y + 1)}$
9. $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{\ln(x^2 + y^2 - 9)}$

10. $f(x, y) = \ln \left(\frac{y}{x + y} \right)$
11. $f(x, y) = \frac{1}{x} \sqrt{y - x^2}$
12. $f(x, y) = \log_3 \left(\frac{x + 1}{y - 2} \right) \cdot \arcsin |x + 1|$
13. $f(x, y) = \frac{\ln(y - x + 4)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} + \log(16 - x^2 - y)$
14. $f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 2}{\ln(1 - |y - x|)}$

1.7 Dvojn e limity

Doka zte,  e dvojn a limita neexistuje

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^3) \cos^2 x}{y \sin(2x) + 4y^2 - 2x^2}$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^2 - 17}$
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 - 2y^3 - y \sin(2x)}{x \cos(3y) + y^3 \cos x}$
4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y^3 - x^2) \cos x}{4y^2 + y \sin x - 2x^2}$
5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 2y^3 + y \sin x}{y^3 \cos x - x \cos y}$
6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cos y - y^3 \cos x}{y \sin x - 2x^2 - 3y^3}$
7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{17 - x^4 - y^4}{4 - x^2 y^2}$
8. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y}{y - x}$
9. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - 2x + y^2 + 1}{2(x - 1)^3 + 3y^2}$
10. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - 2y}{x^2 - xy}$

11. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{17 - \left(\frac{x}{2}\right)^4 - y^4}{16 - x^2 y^2}$
12. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{3x - 2y}{(x+1)^2 - y^2}$
13. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{2x - y^2}{y^2 - x^2}$
14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{(y-x)^2 - 1}{x^2 - 5 - y^2}$
15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x + y^2}{y^2 - 3xy}$
16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 + y}{5xy - x^2}$
17. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \cos x - x^3 \cos y}{3x^2 + 2y^2 - x \sin y}$
18. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{5xy + 2y^2}{x - y^2}$
- * 19. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x}$
20. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy - 2x^2}{y - x - 1}$
21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 y - 4y^2}{y^2 - x + 1}$
22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2 - 4y}{y(y - x)}$
23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{(7x + 4x^2 y)y^2}{x^3 - 2y^3}$
24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{3x^2 y - 2y^2}{x}$
25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 - y^2}{(x - y)^2}$
26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{3x^2 y - 1}{y^2 + x^2}$

27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{5x^3y^2 + 1}{y^3x^2 + x^3}$
28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x - y^2}{y^2 - x^2}$
29. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{2x + y^2}{x^2 + y^2}$
30. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2, -3)} \frac{y + 3}{xy + 6}$
31. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 + 3y}{x - y}$
32. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{xy - 4}{x - y}$
33. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - 8x - 3y^2}{x - y^2}$
34. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,1)} \frac{(x - 3)^2 + y^2 - 1}{x - 3y}$

1.8 Parciální derivace funkce dvou proměnných

Určete, запиште a zakreslete definiční obor funkce f ; vypočítejte f'_x a f'_y

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2 - 4} - \ln \left(\frac{(y - 2)^2 - 1}{x} \right)$
2. $f(x, y) = \ln \left(\frac{y + 2}{x - 3 - y} \right) - \sqrt{3x - x^2 - y}$
3. $f(x, y) = \sqrt{y} \ln \left(\frac{3x}{x^2 + y^2 - 9} \right)$
- *4. $f(x, y) = \sqrt{x \ln y} + \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right)$
5. $f(x, y) = \ln \left(\frac{y^4}{4x^2 - yx} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x - y} \right)$
6. $f(x, y) = \ln \left(\frac{2y^2 - 8}{3 - x} \right) - \operatorname{arctg} (5y - 1)$
7. $f(x, y) = \arcsin (x^2 - 3) + \frac{y^2(1 - y)}{x(2y^2 + 1)}$

8. $f(x, y) = \ln \left(\frac{(x-3)^2 + y^2 - 1}{x-3} \right) + \operatorname{arctg}(4-3y)$
9. $f(x, y) = \ln(y + x^2 - 4) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4 - y}}$
10. $f(x, y) = \ln(\ln x) - \frac{e^{4-y^2}}{\sqrt{y^2 - x + 1}}$
11. $f(x, y) = \ln(x^2 - 4x + y) + \frac{\sqrt{16 - (y-4)^2}}{5x}$
12. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4x + y} + \frac{\ln(4 - (x-2)^2)}{2(y-6)}$
13. $f(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 - 4} + \ln \left(\frac{(x-2)^2 - 1}{y} \right)$
14. $f(x, y) = \sin^2 y + e^x \ln \left(\frac{x+3}{1-y} \right)$
15. $f(x, y) = \ln \left(\frac{x^2 - 2y}{x^2} \right) + \sqrt{xy}$
16. $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{4y^2 - 1}} + (y - 3x)^2$
17. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}} + \ln(x-2)$
18. $f(x, y) = \arcsin(\ln(x+2y)) + \frac{y}{x}$
19. $f(x, y) = \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y(1 + \pi^2)}$

1.9 Parciální derivace vyšších řádů

Vypočítejte příslušné parciální derivace druhého řádu funkce f

- *1. f''_{xy} pro funkci $f(x, y) = \sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}$
2. f''_{xy} pro funkci $f(x, y) = \ln \left(\frac{2x-y}{x+3y} \right)$
3. f''_{xy} pro funkci $f(x, y) = \sqrt{\frac{3x-2y}{y+5x}}$
4. f''_{xy} pro funkci $f(x, y) = \sqrt{5x^2 - 2xy + 3y^2}$

5. f''_{xy} pro funkci $f(x, y) = \ln \left(\frac{2x-y}{x+3y} \right)$
6. f''_{yy} pro funkci $f(x, y) = e^{3y^2-2\sin(2x)}$
7. f''_{xx} a f''_{yy} pro funkci $f(x, y) = \sqrt{3y^2 - 7x^2 + 2}$

1.10 Přibližný výpočet funkčních hodnot

Pomocí diferenciálu prvního řádu vhodné funkce dvou proměnných přibližně vypočtěte hodnotu

1. $\sqrt{0,95} e^{\frac{0,02}{(0,95^2)}}$
2. $\frac{\ln(0,04 + (0,97)^2)}{0,97}$
3. $\sqrt[3]{-7,97} \cos \left(\frac{0,02}{-7,97} \right)$
4. $\sqrt{3,98} \sin \left(\frac{0,03}{3,98} \right)$
5. $\ln(0,04 + (0,97)^2)$
6. $\frac{(1,02)^2 - (2,93)^2}{\sqrt[3]{1,02}}$
7. $(0,98)^2 \cos \left(\frac{0,03}{0,98} \right)$
8. $0,02 \cos \left(\frac{0,02}{(0,95)^2} \right)$
- *9. $\frac{(0,98)^2 - (3,03)^2}{\sqrt[3]{0,98}}$

1.11 Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Najděte body, v nichž má funkce f lokální extrémy

1. $f(x, y) = 6 + 2xy - x^2 - 4y^3 + 2xy^2$
- *2. $f(x, y) = 4 - x(x + 4y^2 - 3y)$
3. $f(x, y) = e^{3x}(2x^2 - 2y^2 + x - y)$
4. $f(x, y) = 2 - x(3x + 2y^2 - 2y)$

5. $f(x, y) = 5 - 4xy + y^3 - x^2$
6. $f(x, y) = x^2y - 2y^2 + xy^2 - 4y$
7. $f(x, y) = e^2(2xy - x^2 + x - y^3 - 1)$
8. $f(x, y) = 3 + 3x^2 - 6xy + y^3$
9. $f(x, y) = \frac{x(y^2 - 4)}{9 + x^2}$
10. $f(x, y) = \frac{(4x^2 - 1)(y^2 - 1)}{y - 3}$
11. $f(x, y) = \frac{2x(y - y^2)}{x^2 + 4}$
12. $f(x, y) = \frac{y(4x - x^2)}{y^2 + 1}$
13. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
14. $f(x, y) = x^2 + 4xy^2 - 3xy + 1$
15. $f(x, y) = 3x^2 - 12xy + 1 + 5y^4x$
16. $f(x, y) = 3x^2y + 2xy + y^2 - 3$
17. $f(x, y) = 3y^2 + yx + x^2y$
18. $f(x, y) = 2x^2 - xy + xy^2$
19. $f(x, y) = 2xy - y^2 - yx^2$
20. $f(x, y) = 4y^2 - 2xy + xy^2 + x^2$
21. $f(x, y) = 5x^2 - 4xy^2 + y^2 + 2$

1.12 Vázané lokální extrémy

Najděte body, v nichž má funkce f vázané lokální extrémy s danou vazbou

- *1. $f(x, y) = xy + y^2 - x^2$ s vazbou $y - 2x - 3 = 0$
2. $f(x, y) = (y - 2)^2 - 7xy$ s vazbou $x + y - 3 = 0$
3. $f(x, y) = -7xy + (3 - 2y)^2$ s vazbou $x - y - 5 = 0$
4. $f(x, y) = x - 2y + 5$ s vazbou $y^2 = 4 - x^2$

5. $f(x, y) = 4x - \frac{y}{3} + 7$ s vazbou $4 - y^2 = x^2$
6. $f(x, y) = 3 - 2x + 3y$ s vazbou $9 - x^2 - y^2 = 0$
7. $f(x, y) = 7x + (x - y)^2$ s vazbou $2x + y - 7 = 0$
8. $f(x, y) = 17xy - (y - 2)^2$ s vazbou $x + y = 3$
9. $f(x, y) = (3 - 2y)^2 + 7xy$ s vazbou $x = 5 + y$
- *10. $f(x, y) = x - 2y + 3$ s vazbou $y^2 = 1 - x^2$
11. $f(x, y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 7$ s vazbou $x^2 + y^2 = 1$

1.13 Globální extrémy

Vypočítejte globální extrémy funkce f na množině M

1. $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 8$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 9, y - x \geq 0\}$
2. $f(x, y) = (x - 3)^2 + 3y - 5$,
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 4x - x^2, y \geq -6 - x, x \leq 4\}$
3. $f(x, y) = x^4 - y^2 + xy$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(-2, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 3)$
4. $f(x, y) = e^{x^2 - 2y^2 + 3xy + y^2}$,
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 2 \leq y \leq x + 2, -1 \leq y \leq 0\}$
5. $f(x, y) = \frac{x}{x - y}$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 4x - x^2 - 3, y \geq x - 3\}$
6. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 4y^3 + 2xy^2$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(-1, -4)$, $(5, 2)$, $(-1, 2)$
7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(-2, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$
- *8. $f(x, y) = x^2 + 2y^3 - 2xy + 4xy^2$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(-1, 0)$, $(5, 2)$, $(-3, 2)$
9. $f(x, y) = (x - 3)^2 - (y + 2)^2$,
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 4, y \geq -4, y \geq -3x + 3, y \leq 3 - x\}$
10. $f(x, y) = x^2y - 7y + 6xy$, kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 7, y \leq \frac{1}{x}, y \geq -2\right\}$

11. $f(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(2, 2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -1)$
12. $f(x, y) = \frac{1}{3}y^3x + 3x^2 - xy + 3$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$
13. $f(x, y) = (x - 3)^2 - 2y + xy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq -x^2 + 4x, y \geq -x\}$
14. $f(x, y) = 3x^3y + y^2 - xy + 1$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-2, 1)$
15. $f(x, y) = y^2 - x^2 + 2x + 6$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 2 - y^2, y \leq x\}$
16. $f(x, y) = 3xy^2 - x^3$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(2, 0)$, $(-1, -3)$, $(-1, 3)$
17. $f(x, y) = 10 - (x - 1)^2 - (y + 3)^2$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0\}$
18. $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 8y + 7$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25, y \geq 0\}$
19. $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 + 2y + 10$, kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, -4)$
20. $f(x, y) = 3x^2y - 2yx + 6y^2$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |2x| \leq 1, |2y| \leq 1\}$

1.14 Elementární množiny v $\mathbb{R}^2$

Množinu M zakreslete a zapište jako elementární množinu vzhledem k proměnné x a vzhledem k proměnné y ; v případě potřeby množinu nejdříve rozdělte na více částí

1. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq e^2, y + \ln x \geq 0, y \leq x - 1\}$
2. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y^2, y \leq -x + 2, x^2 \geq 0\}$
3. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; xy \leq 1, 2y \geq 1, x - 2y + 1 \geq 0\}$
4. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y, x \geq y - 2\}$
5. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq e^2, y \leq \ln x, x \geq 1 - y\}$
6. $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; y + 1 \geq \frac{1}{x}, y \leq 1, y \geq 2x - 2 \right\}$

1.15 Dvojný integrál

Vypočítejte dvojný integrál

1. $I = \iint_M x \ln(y^5 + 1) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \sqrt{x}, y \leq 4, x > 0\}$
2. $I = \iint_M \sin^2(\sqrt{9-x})^3 \, dx dy$,
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$
3. $I = \iint_M y \operatorname{tg}(x^5) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$
4. $I = \iint_M y \sin(1 - 2x^2) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 9 \geq x \geq y^2, y \geq 0\}$
5. $I = \iint_M \cos(5x)e^{\cos(5x)} \, dx dy$,
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y, 0 \leq x, 5x \geq \arcsin y, x \leq \frac{\pi}{10}\}$
6. $I = \iint_M \frac{1}{\ln y + 2 \ln^2 y} \, dx dy$,
kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, |y - e - 1| \leq 1, y \leq \frac{1}{x}\}$
7. $I = \iint_M \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-y)^3}} \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x^2, x \geq 0, y \geq 0, x \leq \frac{1}{2}\}$
8. $I = \iint_M 2x \ln(\sqrt{y^3} + 4) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 1, x^4 \leq y, x \geq 0\}$
9. $I = \iint_M \frac{\operatorname{tg} x}{y^3} \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} \leq y \leq \cos x\}$
10. $I = \iint_M \ln\left(\sin \frac{x}{2}\right) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, y \leq \cos \frac{x}{2}, y \geq 0\}$
11. $I = \iint_M \frac{1}{e^{2x} + 4} \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq -1, y \leq e^x, y \geq e^{2x}\}$
12. $I = \iint_M y^2 \sin(2x^4 + 1) \, dx dy$,
kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$
13. $I = \iint_M \sin^2(x^3) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y| \leq x^2, |x| \leq 2\}$

- * 14. $I = \iint_M \sin \sqrt{x-2} \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y^2 + 2, x \leq 3\}$
15. $I = \iint_M \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ln \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \, dx dy$,
kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right), x \geq \frac{2}{3}\pi, x \leq \pi\right\}$
16. $I = \iint_M \operatorname{arctg}(2x^4 + 4) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \geq y \geq x^3, x + 2 \geq 0\}$
17. $I = \iint_M \ln(\cos y) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, \arcsin x \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$
18. $I = \iint_M \ln(e^y \ln x) \, dx dy$, kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 2 \leq x \leq 3\right\}$
19. $I = \iint_M \ln(y^4 + 1) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \geq \sqrt[3]{x}, y \leq 1\}$
20. $I = \iint_M \operatorname{tg} \left(x^3 + \frac{\pi}{4}\right) \, dx dy$,
kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 6x^2, x \leq \frac{\pi}{12}, x \geq 0\right\}$
21. $I = \iint_M \cos \sqrt{y} \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq 4, x \geq 0\}$
22. $I = \iint_M \sin(y^3) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x} \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4\}$
23. $I = \iint_M y \sin \sqrt{x} \, dx dy$, kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq \frac{\pi^2}{4}, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$
24. $I = \iint_M \arcsin(\cos y) \, dx dy$,
kde $M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq \frac{\pi}{6}, x \leq \sin y, y \leq \frac{5}{6}\pi\right\}$
25. $I = \iint_M \operatorname{tg} \sqrt{y^3} \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$
26. $I = \iint_M xy \sin(x^4 + 1) \, dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x, x \leq 1\}$

1.16 Mocninné řady

Určete interval absolutní konvergence, obor konvergence a součet řady

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2x)^{n+1}}{4^n(n+1)}$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4-3x)^{n-1}}{2^n(2-2n)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-2x)^n}{n4^n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-3x)^n}{n2^{n+1}}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x-2)^{n+1}}{3^n(2+2n)}$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{2n+1}}{5^{n+1}(5+10n)}$$

$$7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}(2x-10)^{n+2}}{n4^n + 2^{2n+1}}$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5-2x)^{n+1}}{5^n(3n+3)}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(3x+4)^{n+1}}{4+4n}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{n6^{n+1}}$$

$$11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+10)^{n+2}}{(n+2)(-15)^n}$$

$$12. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-4x)^{n+1}}{(n+1)(-5)^n}$$

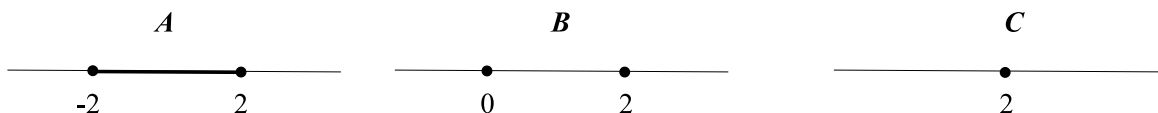
$$13. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}(2-6x)^{n+2}}{(n+2)5^n}$$

- * 14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x+2)^{n+3}}{2^{3n}(n+3)}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x+6)^{n+1}}{9^n(n+1)}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+6)^{n+4}}{n+4}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(6-2x)^n}{8^n n}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{(x+7)^{2n+3}}{2n+3}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3x-9)^n}{12^n n}$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-6)^{n+1}}{4^n(n+1)}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} \frac{1}{2n} (3x+6)^{2n}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5-5x)^{n+1}}{(n+1)10^n}$
24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n+1}(9-3x)^n}{n36^n}$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(2x+8)^{n+1}}{(n+1)12^n}$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^{-2n-1}(4x+8)^{2n+1}}{2n+1}$

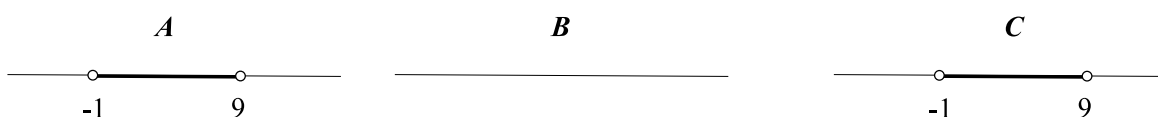
2 Výsledky neřešených příkladů

2.1 Množiny v $\mathbb{R}$ a operace s nimi

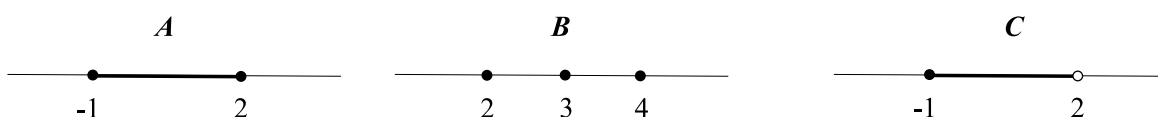
1. $A = \langle -2, 2 \rangle$, $B = \{0, 2\}$, $C = \{2\}$



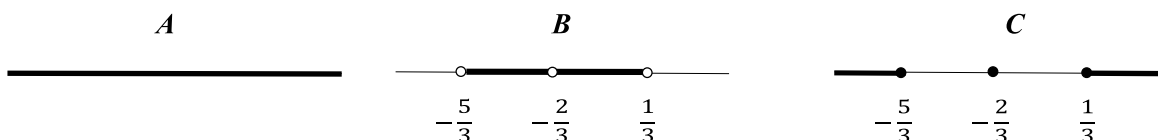
2. $A = (-1, 9)$, $B = \emptyset$, $C = A$



3. $A = \langle -1, 2 \rangle$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \langle -1, 2 \rangle$



4. $A = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $B = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,
 $C = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$



2.2 Soustavy rovnic v $\mathbb{R}^2$

1. $\{(0, -\frac{27}{2}), (-3, -6), (7, 4)\}$

2. $\{(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0), (\frac{1}{4}(-5 - 9\sqrt{5}), \frac{3}{8}(5 + \sqrt{5})), (\frac{1}{4}(9\sqrt{5} - 5), -\frac{3}{8}(\sqrt{5} - 5))\}$

3. $\{(0, 0), (0, 2)\}$

4. $\{(0, 0), (2, 0)\}$

5. $\{(-3, -6), (7, 4)\}$

6. $\{(1, \frac{3}{2})\}$
7. $\{(11, 7), (6, 2)\}$
8. $\emptyset$
9. $\{(5, 4), (-5, -4), (4, 5), (-4, -5)\}$
10. $\{(-3, -6), (7, 4)\}$
11. $\{(4, 1), (-45, -\frac{9}{40})\}$

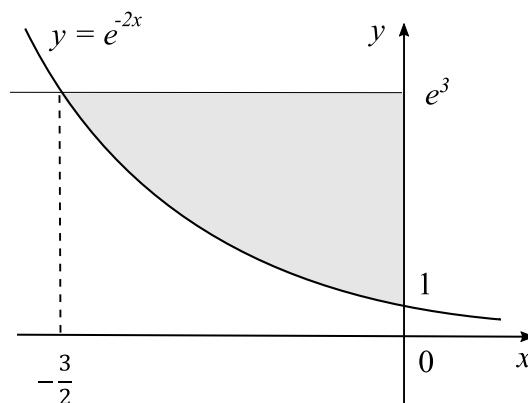
2.3 Primitivní funkce

1. $F(x) = \frac{5}{3} \sqrt[4]{(2x^2 + 5)^3} + c, c \in \mathbb{R}$
2. $F(x) = 2\sqrt{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{\sqrt{6}} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
3. $F(x) = -\frac{1}{5} \sqrt[3]{(1-5x^3)^4} + c, c \in \mathbb{R}$
4. $F(x) = \frac{3}{5} \sqrt{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+2}{\sqrt{5}} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
5. $F(x) = -\frac{1}{6} \sin(1-4x^3) + c, c \in \mathbb{R}$
6. $F(x) = \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(2x-1) + c, c \in \mathbb{R}$
7. $F(x) = -\frac{1}{4} \sqrt[3]{(1-3x^2)^4} + c, c \in \mathbb{R}$
8. $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) + c, c \in \mathbb{R}$
9. $F(x) = 2 \ln |x^2 + 3x - 7| + c, \quad x \neq -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{37}}{2}, c \in \mathbb{R}$
10. $F(x) = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) + c, c \in \mathbb{R}$
11. $F(x) = \frac{5}{16} \sqrt[3]{(8x^3 + 1)^2} + c, c \in \mathbb{R}$
12. $F(x) = \frac{7}{4} \operatorname{arctg} \left(x + \frac{3}{2} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

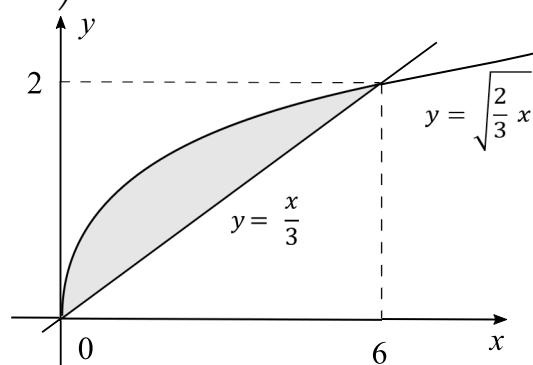
13. $F(x) = -\frac{2}{9} \cos(3x^3 + 1) + c, c \in \mathbb{R}$
14. $F(x) = \frac{14}{\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4x+3}{\sqrt{39}} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
15. $F(x) = \frac{-5}{2(2x+3)} + c, \quad x \neq -\frac{3}{2}, c \in \mathbb{R}$
16. $F(x) = \frac{6}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3x+2}{\sqrt{11}} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
17. $F(x) = -\frac{5}{8} \sqrt[3]{(1-3x^2)^4} + c, c \in \mathbb{R}$
18. $F(x) = \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{4x-5}{\sqrt{7}} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
19. $F(x) = \frac{5}{2} \operatorname{arctg} (2x+3) + c, c \in \mathbb{R}$
20. $F(x) = \frac{-7}{2(2x-5)} + c, \quad x \neq \frac{5}{2}, c \in \mathbb{R}$
21. $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} + c, \quad x > 0, c \in \mathbb{R}$
22. $F(x) = -\ln |1 - e^x| + c, \quad x \neq 0, c \in \mathbb{R}$
23. $F(x) = \frac{1}{6} \cos \left(\frac{2}{x} \right) + c, \quad x \neq 0, c \in \mathbb{R}$
24. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2} \ln |2x-3| + c, \quad x \neq \frac{3}{2}, c \in \mathbb{R}$
25. $F(x) = \frac{-1}{3 \ln x} + c, \quad x > 0, c \in \mathbb{R}$
26. $F(x) = \frac{-5}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{8}} + c, c \in \mathbb{R}$

2.4 Množiny v $\mathbb{R}^2$

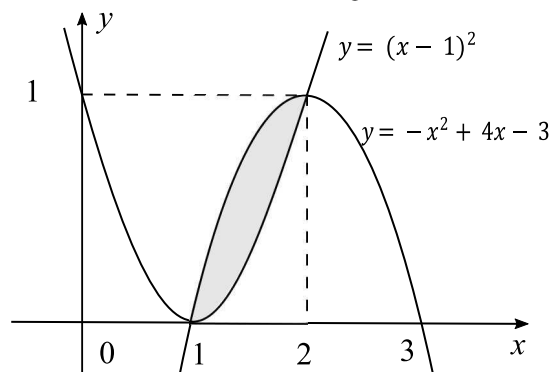
$$1. S = \int_{-\frac{3}{2}}^0 (e^3 - e^{-2x}) \, dx = \frac{1}{2} + e^3$$



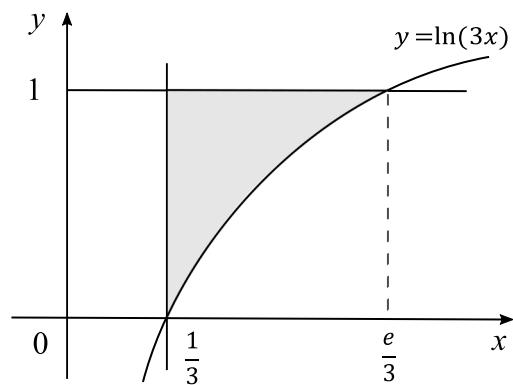
$$2. S = \int_0^6 \left(\sqrt{\frac{2}{3}x} - \frac{x}{3} \right) \, dx = 2$$



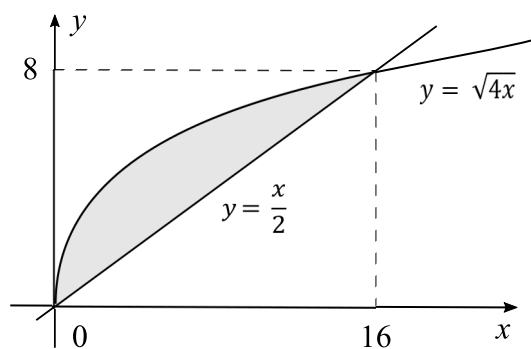
$$3. S = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3 - (x-1)^2) \, dx = \frac{1}{3}$$



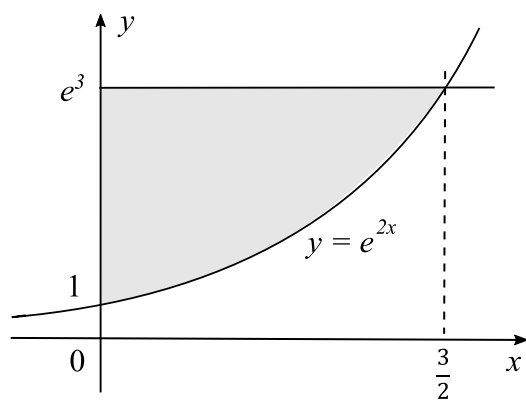
$$4. S = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{e}{3}} (1 - \ln(3x)) \, dx = \frac{1}{3}(e - 2)$$



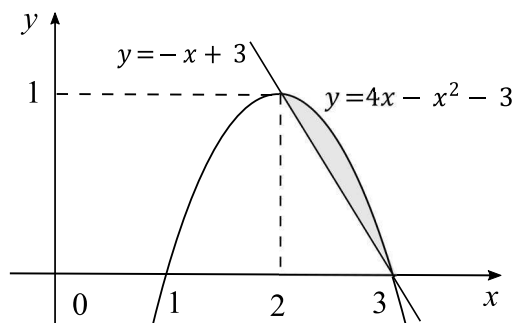
$$5. S = \int_0^{16} \left(\sqrt{4x} - \frac{x}{2} \right) \, dx = \frac{64}{3}$$



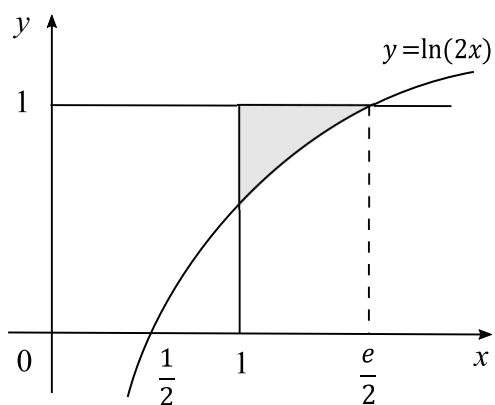
$$6. S = \int_0^{\frac{3}{2}} (e^3 - e^{2x}) \, dx = e^3 + \frac{1}{2}$$



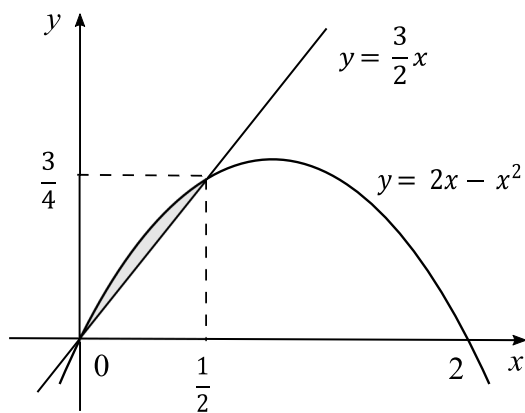
$$7. S = \int_2^3 (4x - x^2 - 3 + x - 3) \, dx = \frac{1}{6}$$



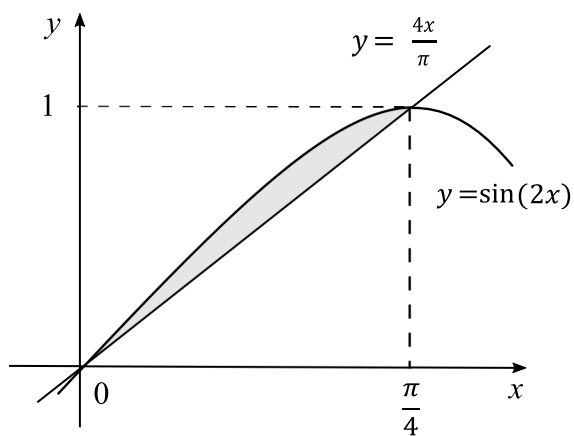
$$8. S = \int_1^{\frac{e}{2}} (1 - \ln(2x)) \, dx = \ln 2 + \frac{e}{2} - 2$$



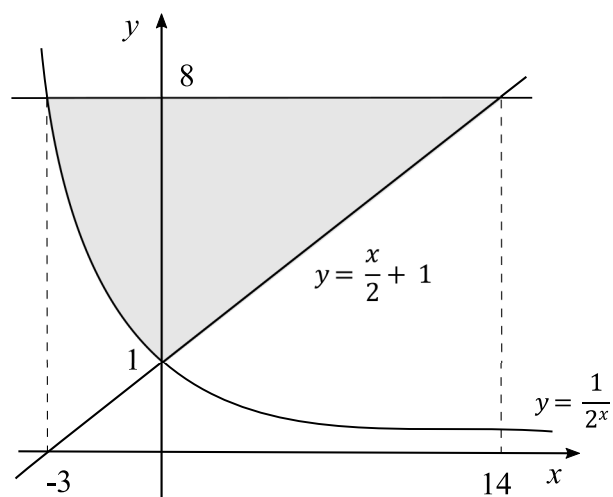
$$9. S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2x - x^2 - \frac{3}{2}x \right) \, dx = \frac{1}{48}$$



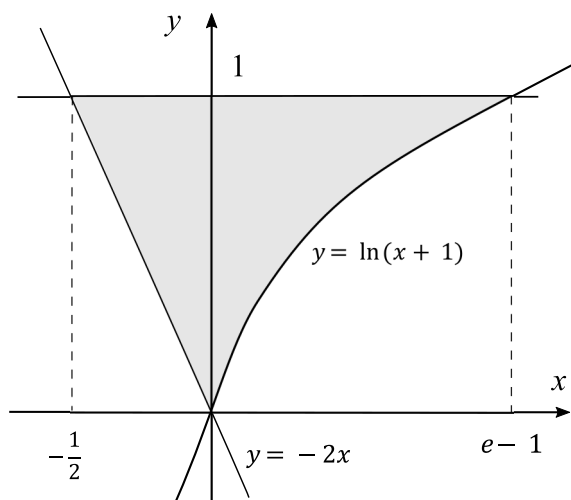
$$10. S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin(2x) - \frac{4x}{\pi} \right) dx = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$$



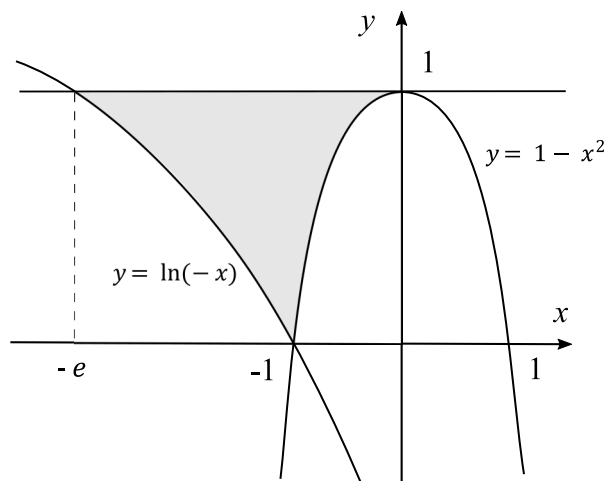
$$11. S = \int_{-3}^0 \left(8 - \frac{1}{2^x} \right) dx + \int_0^{14} \left(8 - \frac{x}{2} - 1 \right) dx = 73 - \frac{7}{\ln 2}$$



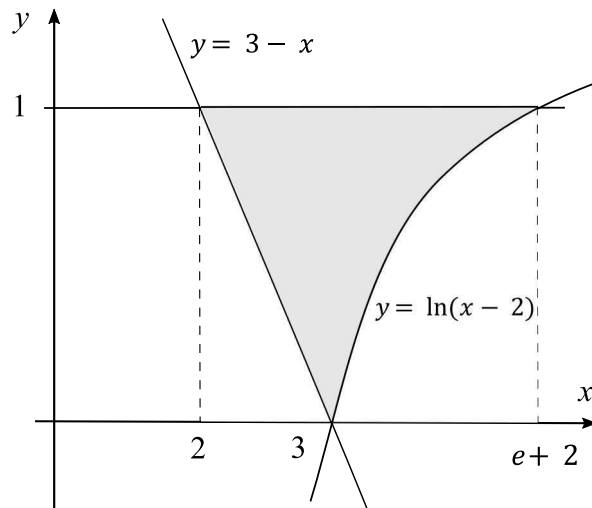
$$12. S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + 2x) \, dx + \int_0^{e-1} (1 - \ln(x + 1)) \, dx = \int_0^1 \left(e^y - 1 + \frac{y}{2} \right) \, dy = e - \frac{7}{4}$$



$$13. S = \int_{-e}^{-1} (1 - \ln(-x)) \, dx + \int_{-1}^0 (1 - 1 + x^2) \, dx = e - \frac{5}{3}$$

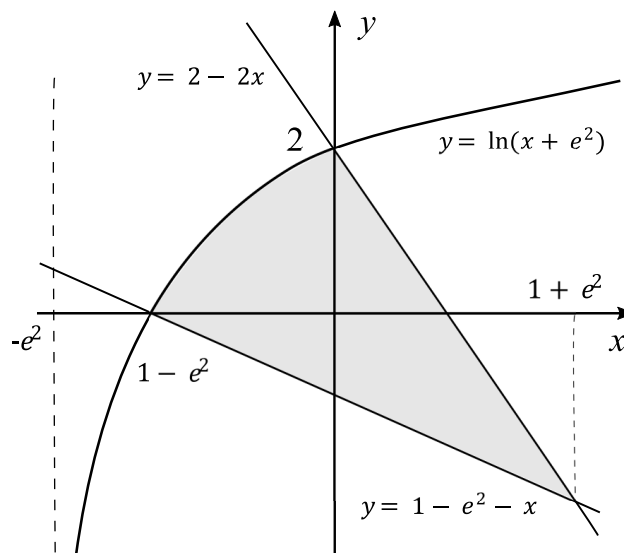


$$14. S = \int_2^3 (1 - 3 + x) \, dx + \int_3^{e+2} (1 - \ln(x - 2)) \, dx = e - \frac{3}{2}$$

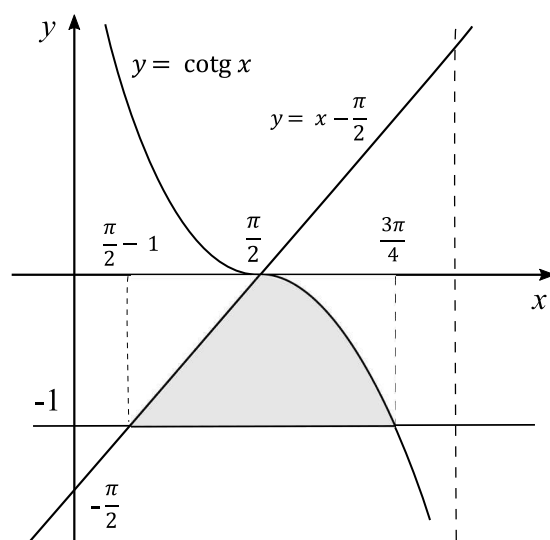


$$15. S = \int_{1-e^2}^0 (\ln(x + e^2) - 1 + e^2 + x) \, dx + \int_0^{1+e^2} (2 - 2x - 1 + e^2 + x) \, dx =$$

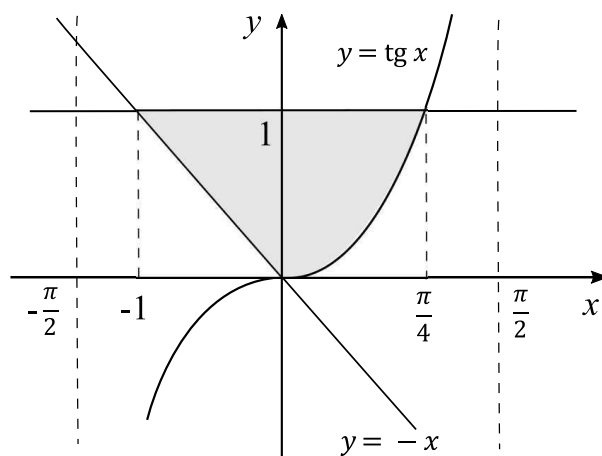
$$= 2 + e^2 + e^4$$



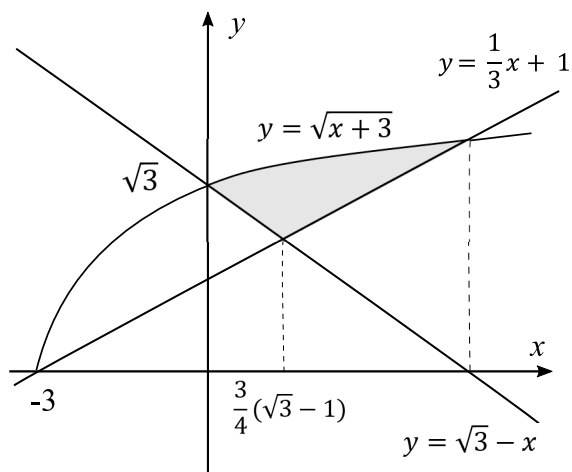
$$16. S = \int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} + 1 \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cotg x + 1) dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$



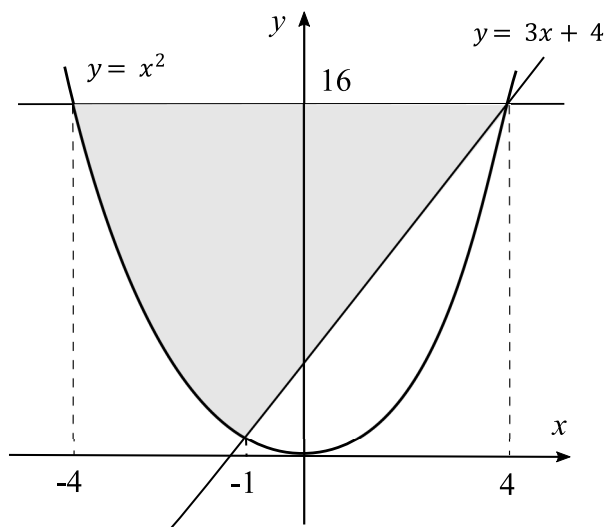
$$17. S = \int_{-1}^0 (1 + x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \tg x) dx = \frac{1}{4}(2 + \pi) + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$



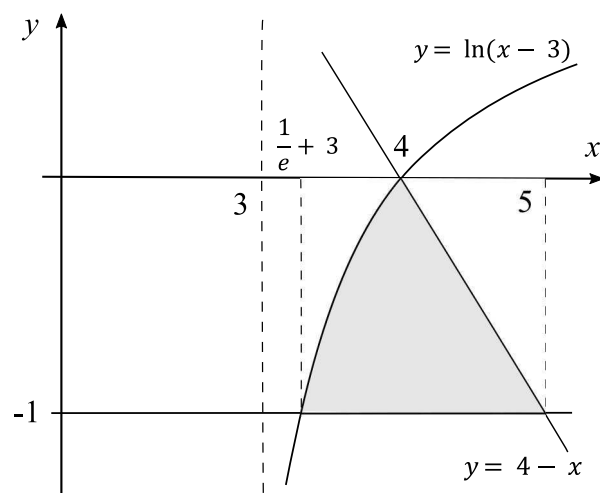
$$\begin{aligned}
 18. \quad S &= \int_0^{\frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{3} + x \right) dx + \int_{\frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)}^6 \left(\sqrt{x+3} - \frac{1}{3}x - 1 \right) dx = \\
 &= -\frac{3}{8}(\sqrt{3}-1)^2 + 6 - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$



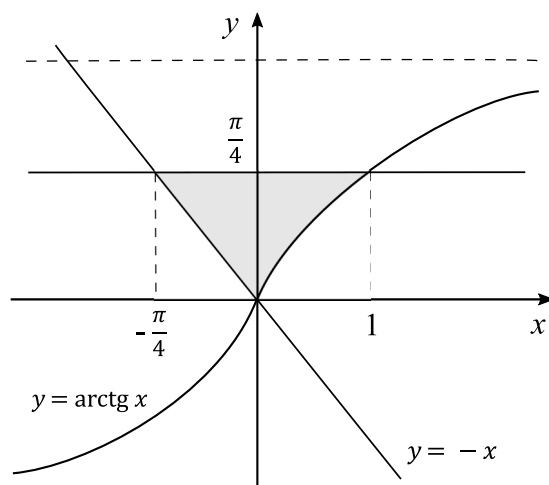
$$19. \quad S = \int_{-4}^{-1} (16 - x^2) dx + \int_{-1}^4 (16 - 3x - 4) dx = \frac{387}{6}$$



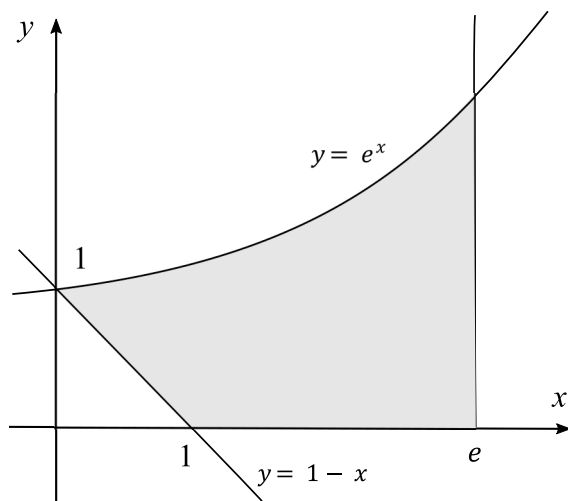
$$20. S = \int_{\frac{1}{e}+3}^4 (\ln(x-3) + 1) \, dx + \int_4^5 (4-x+1) \, dx = \frac{2+e}{2e}$$



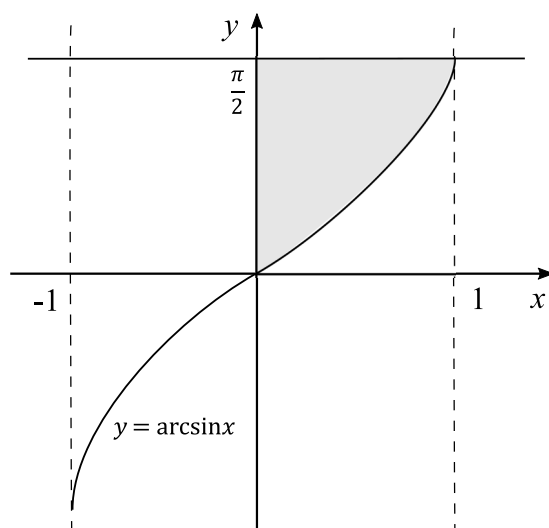
$$21. S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \, dx + \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \arctg x \right) \, dx = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2} \ln 2$$



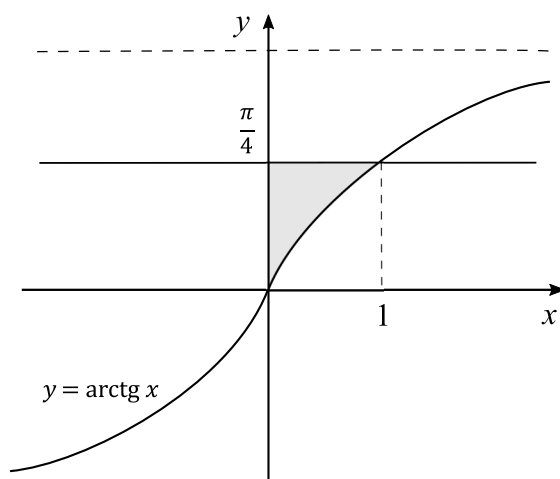
$$22. S = \int_0^1 (e^x - 1 + x) \, dx + \int_1^e (e^x) \, dx = e^e - \frac{3}{2}$$



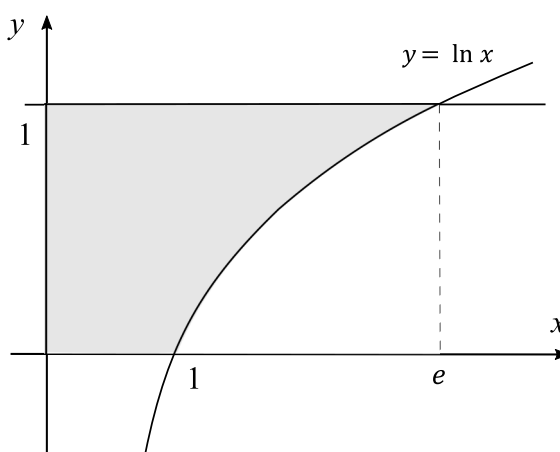
$$23. S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y) \, dy = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) \, dx = 1$$



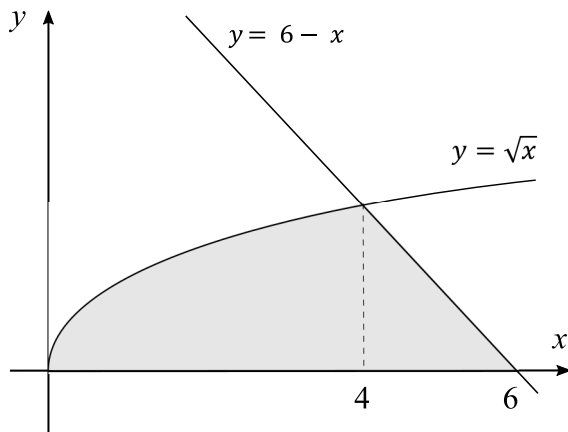
$$24. S = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} y) dy = \ln \sqrt{2}$$



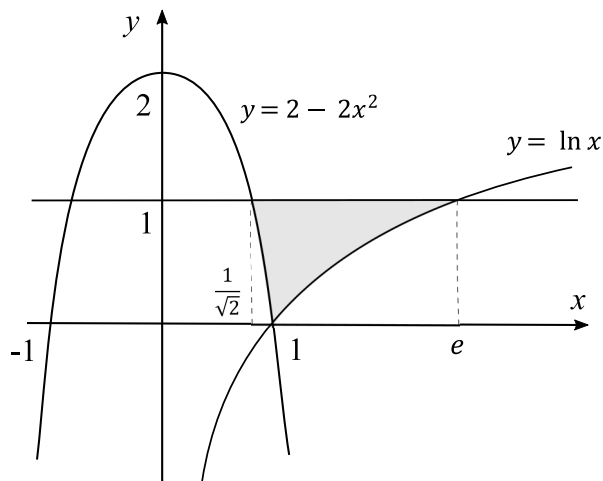
$$25. S = \int_0^1 e^y dy = 1 + \int_1^e (1 - \ln x) dx = e - 1$$



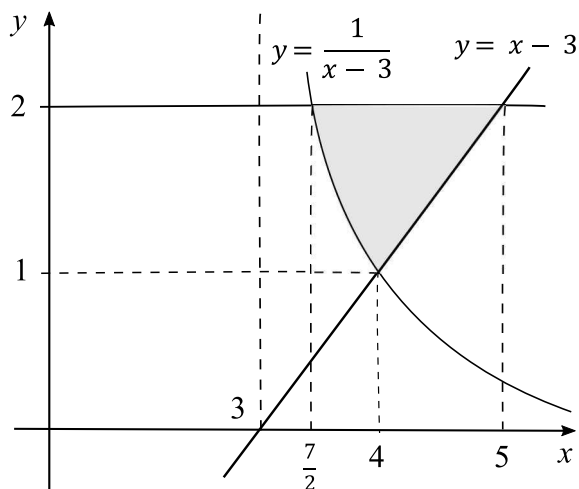
$$26. S = \int_0^4 (\sqrt{x}) \, dx + \int_4^6 (6 - x) \, dx = \frac{22}{3}$$



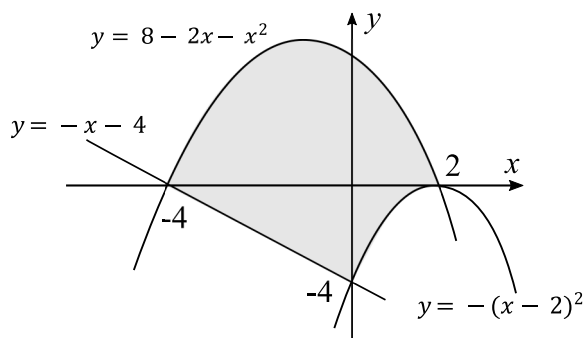
$$27. S = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1 - 2 + 2x^2) \, dx + \int_1^e (1 - \ln x) \, dx = \frac{2 - 7\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + e$$



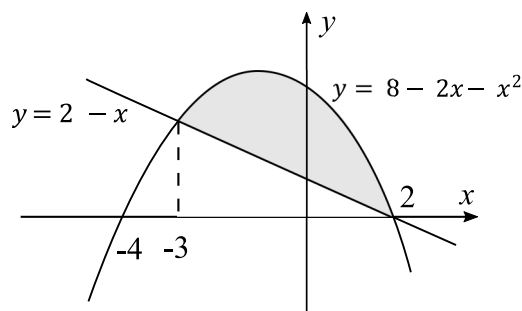
$$28. S = \int_{\frac{7}{2}}^4 \left(2 - \frac{1}{x-3} \right) dx + \int_4^5 (2 - x + 3) dx = \frac{3}{2} - \ln 2$$



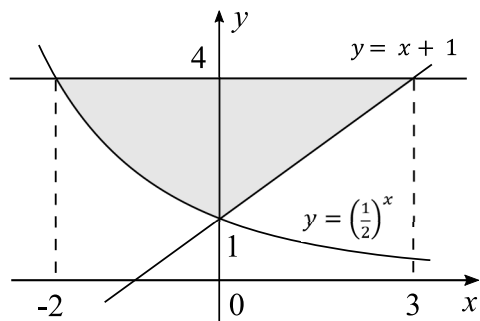
$$29. S = \int_{-4}^0 (-x^2 - 2x + 8 - (-x - 4)) dx + \int_0^2 (-x^2 - 2x + 8 + (x - 2)^2) dx = \frac{140}{3}$$



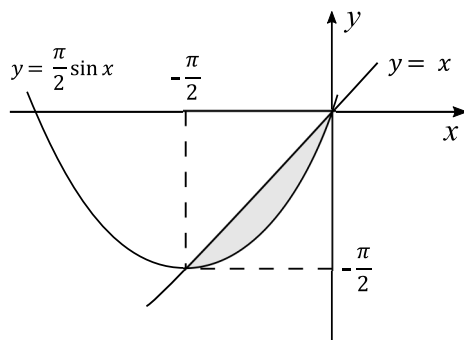
$$30. S = \int_{-3}^2 (8 - 2x - x^2 - 2 + x) dx = \frac{125}{6}$$



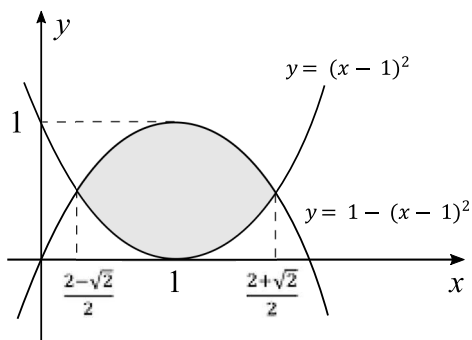
$$31. S = \int_{-2}^0 \left(4 - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right) dx + \int_0^3 (4 - x - 1) dx = \frac{3}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} + \frac{25}{2}$$



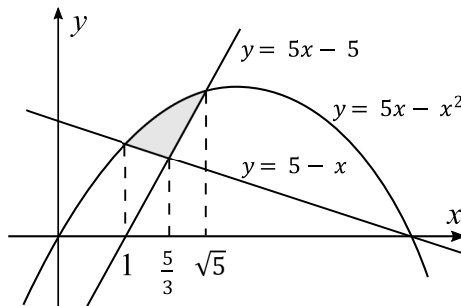
$$32. S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(x - \frac{\pi}{2} \sin x \right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{8}$$



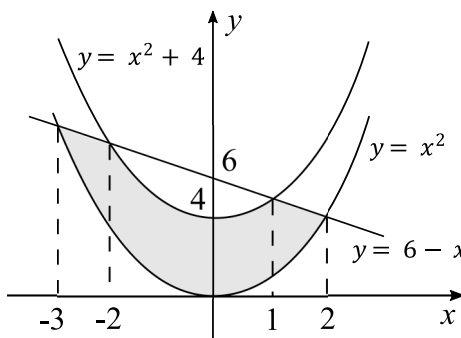
$$33. S = \int_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} (1 - (x-1)^2 - (x-1)^2) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



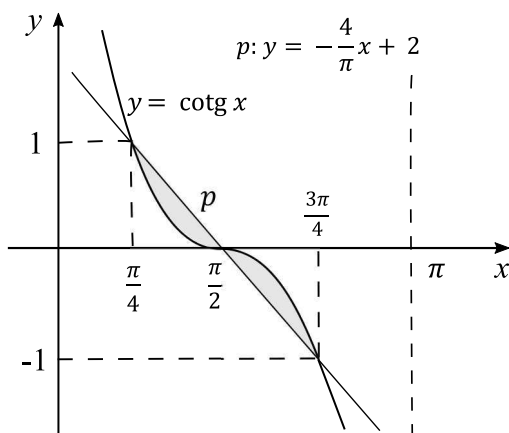
$$34. S = \int_1^{\frac{5}{3}} (5x - x^2 - 5 + x) \, dx + \int_{\frac{5}{3}}^{\sqrt{5}} (5x - x^2 - 5x + 5) \, dx = \frac{2}{3} (5\sqrt{5} - 9)$$



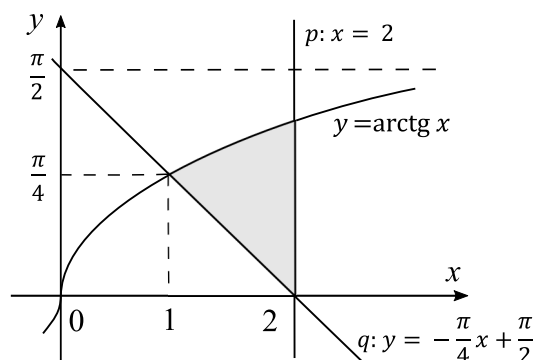
$$35. S = \int_{-3}^{-2} (6 - x - x^2) \, dx + \int_{-2}^1 (x^2 + 4 - x^2) \, dx + \int_1^2 (6 - x - x^2) \, dx = \frac{49}{3}$$



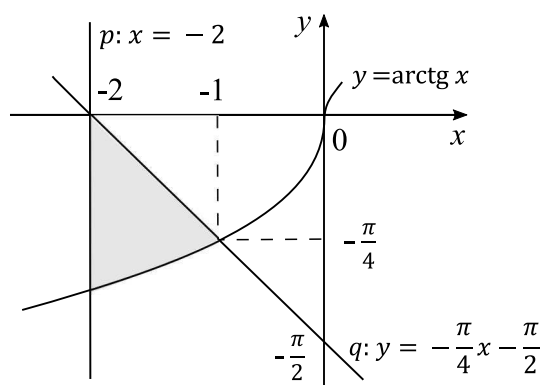
$$36. S = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{4}{\pi}x + 2 - \cotg x \right) \, dx = \frac{\pi}{4} - \ln 2$$



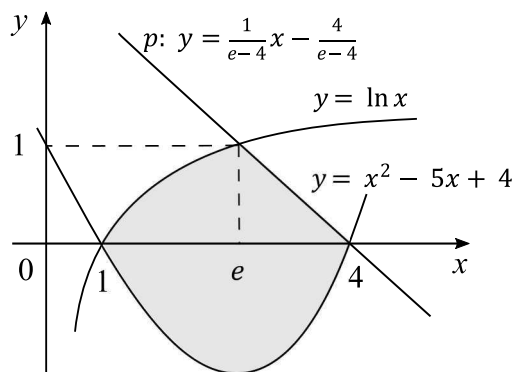
$$37. S = \int_1^2 \left(\operatorname{arctg} x - \left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2} \right) \right) dx = 2\operatorname{arctg} 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{5} - \frac{3\pi}{8}$$



$$38. S = \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) dx = -2\operatorname{arctg} (-2) + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{5} - \frac{3\pi}{8}$$



$$39. S = \int_1^e (\ln x - x^2 + 5x - 4) dx + \int_e^4 \left(\frac{x}{e-4} - \frac{4}{e-4} - x^2 + 5x - 4 \right) dx = \frac{15-e}{2}$$



2.5 Nevlastní integrály

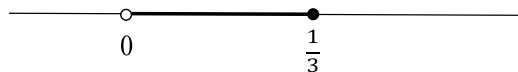
1. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{3} \ln |\sin(3x)|$, $x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
2. primit. funkce $F(x) = -\frac{1}{3 \ln x}$, $x \in \mathbb{R}^+$;
Integrál = ∞ (diverguje)
3. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{6} \ln(1 + 3x^4)$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
4. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{x}\right)$, $x \neq 0$;
Integrál = neexistuje
5. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln |\sin(2x)|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
6. primit. funkce $F(x) = -\frac{1}{4 \ln x}$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$;
Integrál = $\frac{1}{4}$
7. primit. funkce $F(x) = \frac{3}{8} \ln(2x^4 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
8. primit. funkce $F(x) = -\frac{1}{3} \sin\left(\frac{3}{x}\right)$, $x \neq 0$;
Integrál = neexistuje
9. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$, $x \neq 1, x \neq -2$;
Integrál = $\frac{1}{3} \ln 2$
10. primit. funkce $F(x) = -\frac{1}{2(e^x - 1)^2}$, $x \neq 0$;
Integrál = $\frac{1}{2}$
11. primit. funkce $F(x) = \frac{(x-4)^2}{2} \ln(x-4) - \frac{(x-4)^2}{4}$, $x > 4$;
Integrál = $-\frac{1}{4}$
12. primit. funkce $F(x) = 3 \ln |x+2| - \frac{2}{x+2} + \ln |x|$, $x \neq 0$;
Integrál = ∞ (diverguje)

13. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+e^x}{1-e^x} \right|$, $x \neq 0$;
Integrál = $-\infty$ (diverguje)
14. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right|$, $x \neq -2$, $x \neq 3$;
Integrál = $-\infty$ (diverguje)
15. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = $-\infty$ (diverguje)
16. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|$, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
17. primit. funkce $F(x) = \frac{2}{5x^2} - \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$;
Integrál = ∞ (diverguje)
18. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = $\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$
19. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} (\cos(2) \ln(\cos(2x)) - \cos(2x))$, $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$;
Integrál = $-\frac{1}{2}$
20. primit. funkce $F(x) = \arcsin \frac{x}{5}$, $x \in (-5, 5)$;
Integrál = $\frac{\pi}{2}$
21. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+2}{2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = $\frac{\pi}{8}$
22. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = $\frac{\pi}{3}$
23. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right|$, $x \neq \pm 2$;
Integrál = ∞ (diverguje)
24. primit. funkce $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = 1

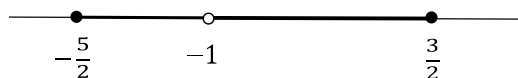
25. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2}$, $x \in (-2, 2)$;
Integrál = $\frac{\pi}{4}$
26. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{1 + \cos(3x)}{1 - \cos(3x)} \right|$, $x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
27. primit. funkce $F(x) = 2 \ln \left| \frac{1 + \sin \frac{x}{2}}{1 - \sin \frac{x}{2}} \right|$, $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
28. primit. funkce $F(x) = \ln \left| \frac{1 - e^x}{e^x} \right|$, $x \neq 0$;
Integrál = $-\infty$ (diverguje)
29. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right|$, $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)
30. primit. funkce $F(x) = -\ln |\cos x|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = $-\infty$ (diverguje)
31. primit. funkce $F(x) = -\frac{1}{5 \ln^5 x}$, $x > 0, x \neq e$;
Integrál = ∞ (diverguje)
32. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2(2x)$, $x > 0$;
Integrál = $-\infty$ (diverguje)
33. primit. funkce $F(x) = -\frac{5}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-4}{\sqrt{3}} \right)$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = $-\frac{5\pi}{4\sqrt{3}}$
34. primit. funkce $F(x) = \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$;
Integrál = $\frac{5\pi}{4}$
35. primit. funkce $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
Integrál = ∞ (diverguje)

2.6 Definiční obor funkce

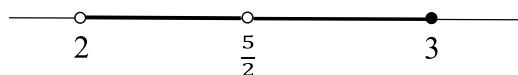
1. $Df = \left(0, \frac{1}{3}\right\rangle$



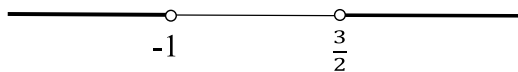
2. $Df = \left\langle -\frac{5}{2}, -1\right\rangle \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right\rangle$



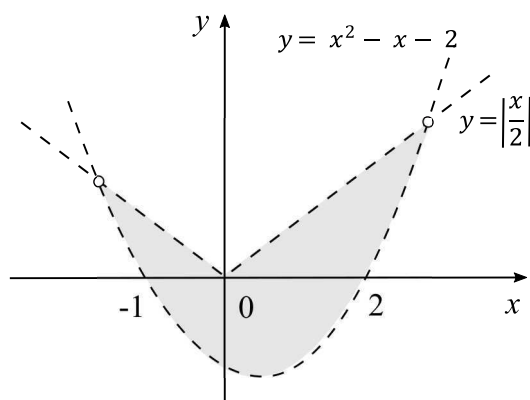
3. $Df = \left(2, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, 3\right\rangle$



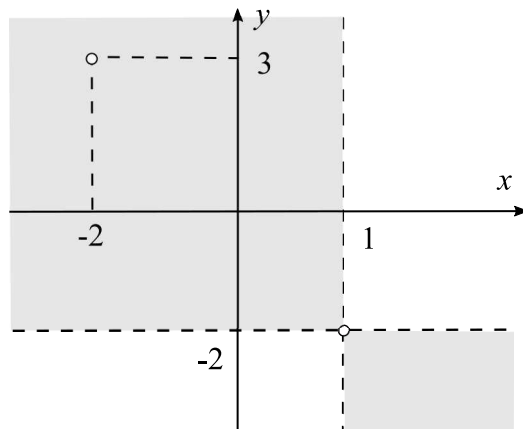
4. $Df = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$



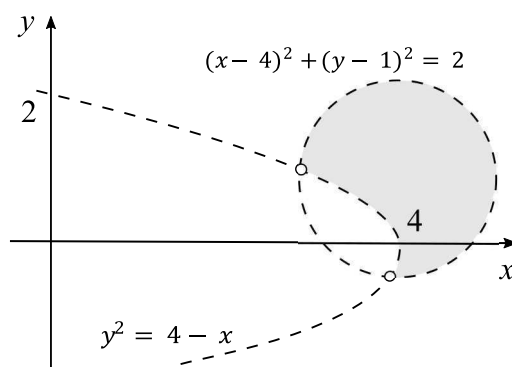
5. $Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left| \frac{x}{2} \right| > y, y > x^2 - x - 2 \right\}$



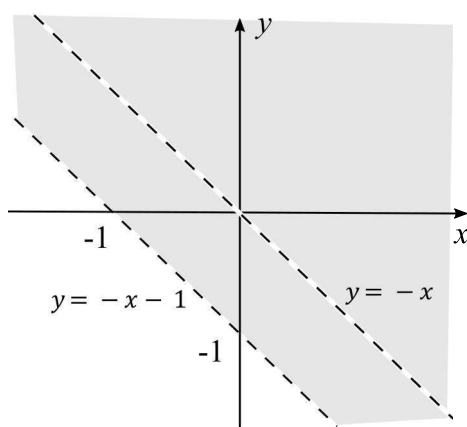
$$6. Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{1-x}{y+2} > 0, y+2 \neq 0, (x+2)^2 + (y-3)^2 \neq 0 \right\}$$



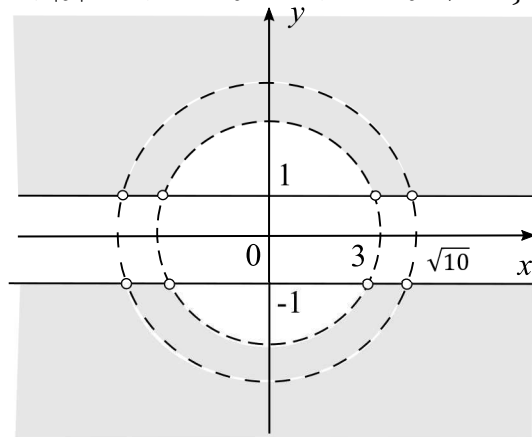
$$7. Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 - (x - 4)^2 - (y - 1)^2 > 0, x + y^2 - 4 > 0\}$$



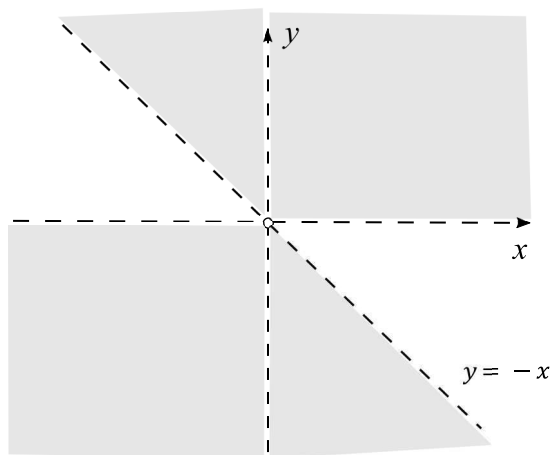
$$8. Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y + 1 > 0, x + y + 1 \neq 1\}$$



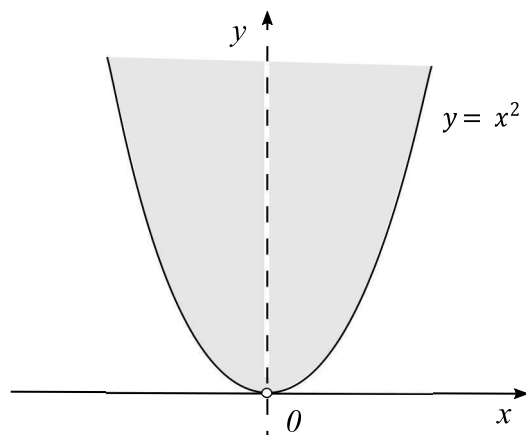
9. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |y| \geq 1, x^2 + y^2 > 9, x^2 + y^2 \neq 10\}$



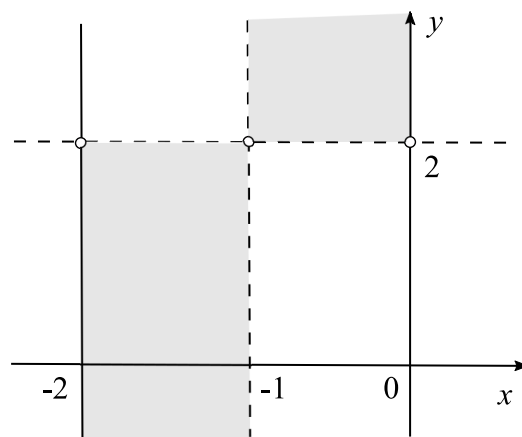
10. $Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y}{x+y} > 0 \right\}$



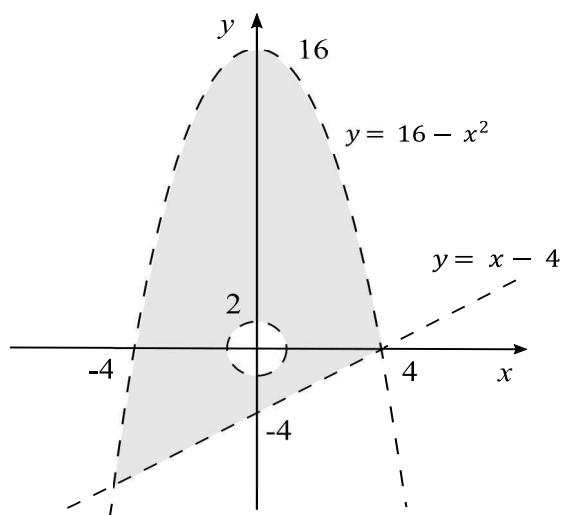
11. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0, y \geq x^2\}$



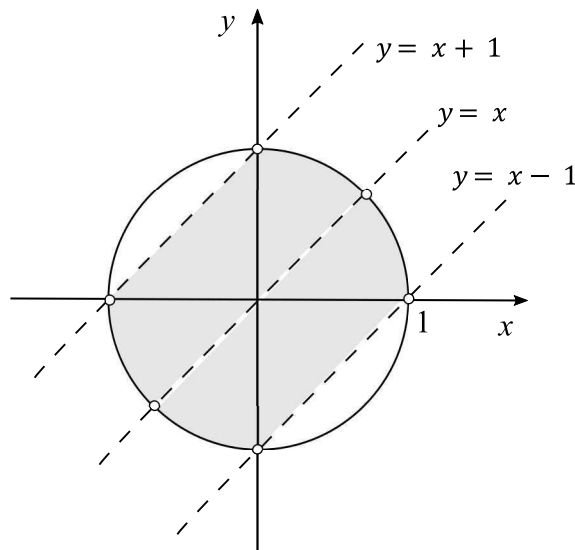
$$12. Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x+1}{y-2} > 0, |x+1| \leq 1 \right\}$$



$$13. Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x - 4, x^2 + y^2 > 4, x^2 + y < 16\}$$



14. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 - x^2 - y^2 \geq 0, 1 > |y - x|, |y - x| \neq 0\}$



2.7 Dvojné limity

1. postupné limity: $-\frac{1}{2}$ a 0
2. postupné limity: $\frac{1}{8}$ a 4
3. postupné limity: 0 a -2
4. postupné limity: $\frac{1}{2}$ a 0
5. postupné limity: 0 a 2
6. postupné limity: $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$
7. postupné limity: $\frac{1}{2}$ a 8
8. postupné limity: -2 a -1
9. postupné limity: $\frac{1}{3}$ a neexistuje
10. postupné limity: 2 a 1
11. postupné limity: $\frac{1}{8}$ a 2
12. postupné limity: $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$
13. postupné limity: $-\frac{1}{2}$ a -1
14. postupné limity: $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$

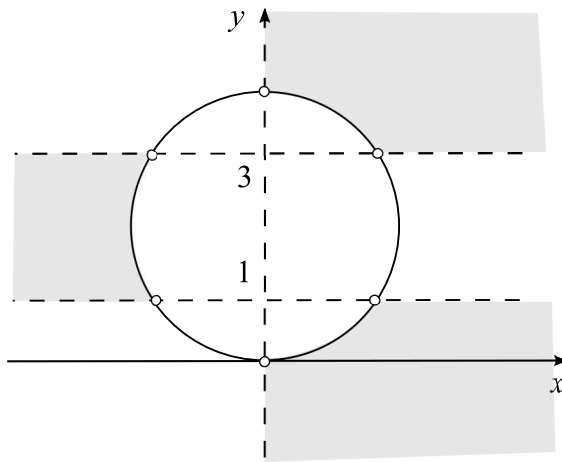
15. postupné limity: 0 a 1
16. postupné limity: 0 a -1
17. postupné limity: 0 a $\frac{1}{2}$
18. postupné limity: -2 a ∞
19. postupné limity: -8 a $-\frac{8}{3}$
20. postupné limity: 2 a 1
21. postupné limity: -4 a -2
22. postupné limity: 0 a $-\infty$
23. postupné limity: $-\infty$ a 0
24. postupné limity: $-\infty$ a ∞
25. postupné limity: 0 a -1
26. postupné limity: 0 a ∞
27. postupné limity: 0 a ∞
28. postupné limity: $-\frac{1}{2}$ a -1
29. postupné limity: 0 a 1
30. postupné limity: 0 a $\frac{1}{2}$
31. postupné limity: 0 a -3
32. postupné limity: -2 a 2
33. postupné limity: -8 a 3
34. postupné limity: 0 a $-\frac{2}{3}$

2.8 Parciální derivace funkce dvou proměnných

$$1. \quad Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y-2)^2 \geq 4, \frac{(y-2)^2 - 1}{x} > 0 \right\};$$

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 - 4}} + \frac{1}{x}; \quad f'_y = \frac{y-2}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 - 4}} - \frac{2(y-2)}{(y-2)^2 - 1};$$

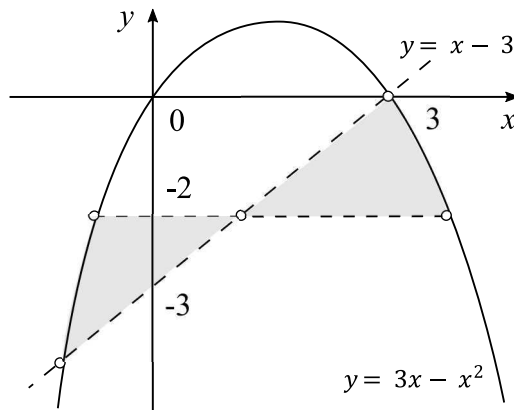
$$Df'_x = Df'_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + (y-2)^2 > 4, \frac{(y-2)^2 - 1}{x} > 0 \right\}$$



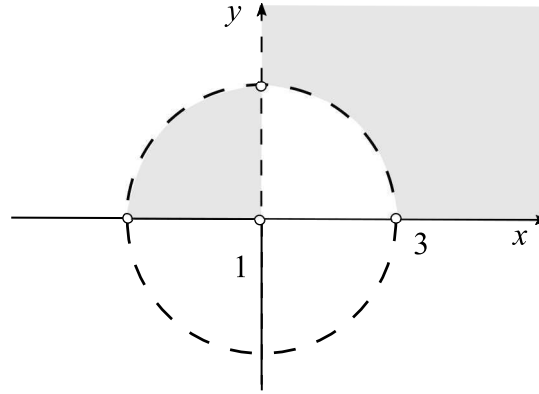
$$2. \quad Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y+2}{x-3-y} > 0, 3x - x^2 \geq y \right\};$$

$$f'_x = \frac{-1}{x-3-y} - \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2-y}}; \quad f'_y = \frac{x-1}{(y+2)(x-3-y)} + \frac{1}{2\sqrt{3x-x^2-y}};$$

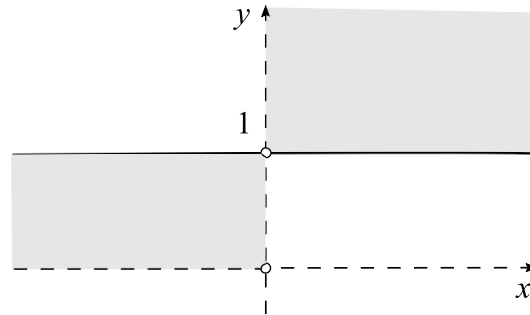
$$Df'_x = Df'_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y+2}{x-3-y} > 0, 3x - x^2 > y \right\}$$



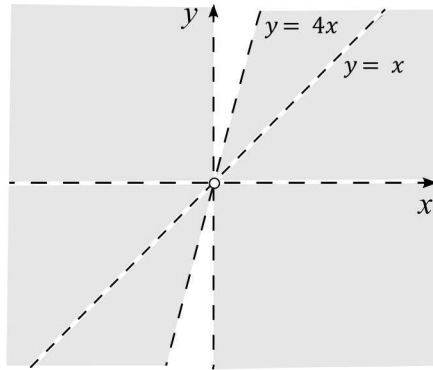
$$\begin{aligned}
3. \quad Df &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, \frac{3x}{y^2 + x^2 - 9} > 0 \right\}; \\
f'_x &= \sqrt{y} \frac{y^2 - x^2 - 9}{x(x^2 + y^2 - 9)}; \quad f'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \ln \left(\frac{3x}{x^2 + y^2 - 9} \right) - \frac{2y\sqrt{y}}{x^2 + y^2 - 9}; \\
Df'_x = Df'_y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0, \frac{3x}{y^2 + x^2 - 9} > 0 \right\}
\end{aligned}$$



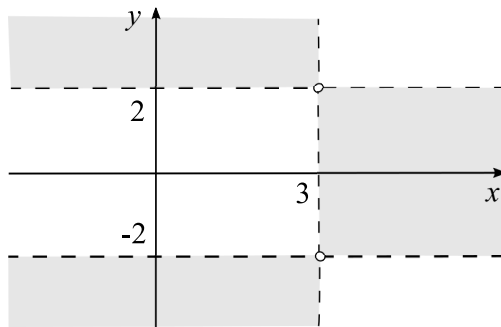
$$\begin{aligned}
4. \quad Df &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ln y \geq 0, x \neq 0, y > 0 \right\}; \\
f'_x &= \frac{\ln y}{2\sqrt{x \ln y}} + \frac{x^5 + 1}{x^2 y} \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right); \quad f'_y = \frac{x}{2y\sqrt{x \ln y}} - \frac{x^5 - 4}{4xy^2} \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right); \\
Df'_x = Df'_y &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ln y > 0, x \neq 0, y > 0 \right\}
\end{aligned}$$



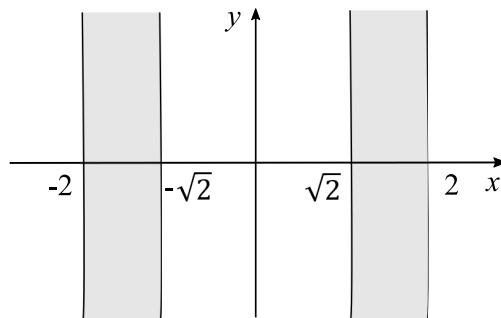
$$\begin{aligned}
5. \quad Df &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{y^4}{4x^2 - yx} > 0, x - y \neq 0 \right\}; \\
f'_x &= \frac{y - 8x}{4x^2 - yx} + \frac{1}{(x - y)^2 + 1}; \quad f'_y = \frac{16x - 3y}{y(4x - y)} - \frac{1}{(x - y)^2 + 1}; \\
Df'_x = Df'_y &= Df
\end{aligned}$$



6. $Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{2y^2 - 8}{3 - x} > 0, x \neq 3 \right\};$
 $f'_x = \frac{1}{3 - x}; f'_y = \frac{4y}{2y^2 - 8} - \frac{5}{1 + (5y - 1)^2};$
 $Df'_x = Df'_y = Df$



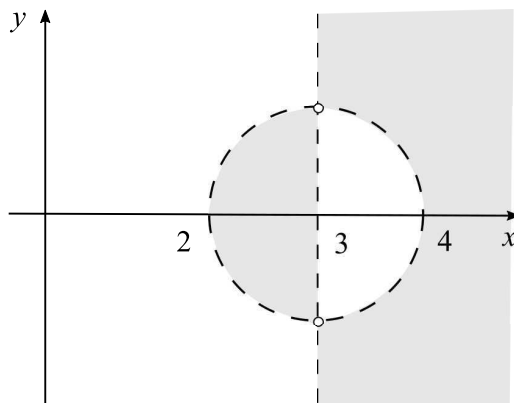
7. $Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x^2 - 3 \leq 1, x \neq 0 \right\};$
 $f'_x = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 3)^2}} - \frac{y^2(1 - y)}{x^2(2y^2 + 1)}; f'_y = \frac{y}{x(2y^2 + 1)^2}(2 - 3y - 2y^3);$
 $Df'_x = Df'_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x^2 - 3 < 1, x \neq 0 \right\}$



$$8. Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{(x-3)^2 + y^2 - 1}{x-3} > 0 \right\};$$

$$f'_x = \frac{(x-3)^2 - y^2 + 1}{(x-3)((x-3)^2 + y^2 - 1)}; f'_y = \frac{2y}{(x-3)^2 + y^2 - 1} - \frac{3}{1 + (4-3y)^2};$$

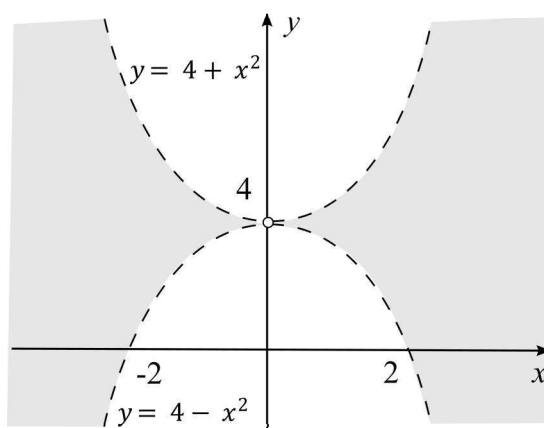
$$Df'_x = Df'_y = Df$$



$$9. Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 4 - x^2, y < x^2 + 4\};$$

$$f'_x = \frac{2x}{y + x^2 - 4} + \frac{4 - y}{\sqrt{(x^2 + 4 - y)^3}}; f'_y = \frac{1}{y + x^2 - 4} + \frac{x}{2\sqrt{(x^2 + 4 - y)^3}};$$

$$Df'_x = Df'_y = Df$$

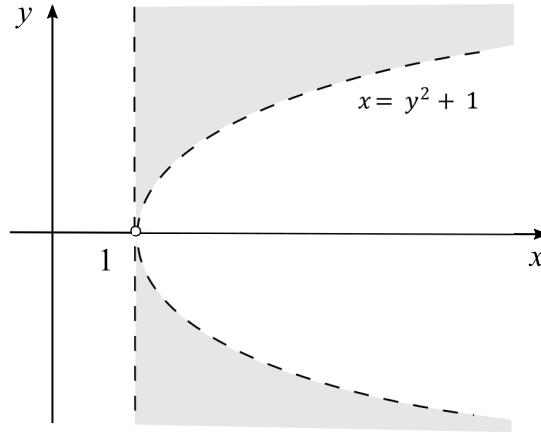


$$10. Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 1, y^2 + 1 > x\};$$

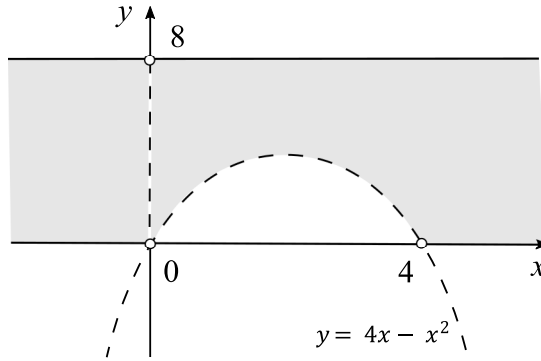
$$f'_x = \frac{1}{x \ln x} - \frac{e^{4-y^2}}{2\sqrt{(y^2 - x + 1)^3}};$$

$$f'_y = ye^{4-y^2} \frac{2y^2 - 2x + 3}{\sqrt{(y^2 - x + 1)^3}};$$

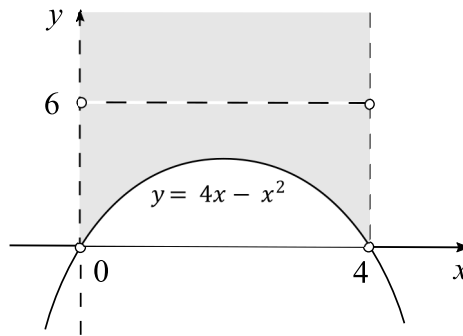
$$Df'_x = Df'_y = Df$$



11. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -x^2 + 4x, 4 \geq |y - 4|, x \neq 0\};$
 $f'_x = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + y} - \frac{\sqrt{16 - (y - 4)^2}}{5x^2}; f'_y = \frac{1}{x^2 - 4x + y} - \frac{y - 4}{5x\sqrt{16 - (y - 4)^2}};$
 $Df'_x = Df'_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -x^2 + 4x, 4 > |y - 4|, x \neq 0\}$



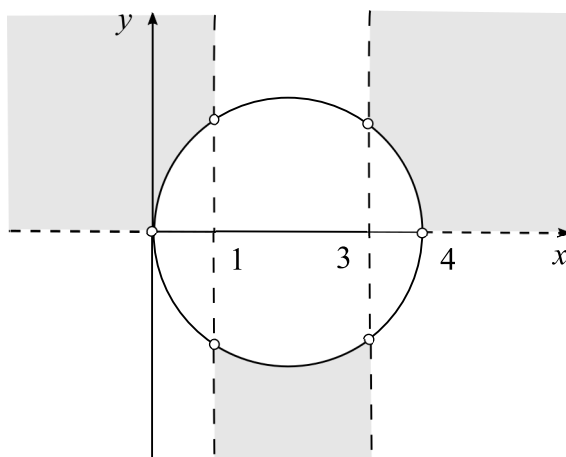
12. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq -x^2 + 4x, 2 > |x - 2|, y \neq 6\};$
 $f'_x = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + y}} - \frac{x - 2}{(y - 6)(4 - (x - 2)^2)}; f'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + y}} - \frac{\ln(4 - (x - 2)^2)}{2(y - 6)^2};$
 $Df'_x = Df'_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -x^2 + 4x, 2 > |x - 2|, y \neq 6\}$



$$13. Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + y^2 \geq 4, \frac{(x-2)^2 - 1}{y} > 0 \right\};$$

$$f'_x = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 - 4}} + \frac{2(x-2)}{(x-2)^2 - 1}; f'_y = \frac{y}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 - 4}} - \frac{1}{y};$$

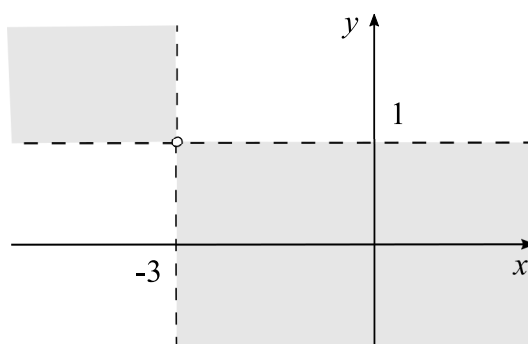
$$Df'_x = Df'_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x-2)^2 + y^2 > 4, \frac{(x-2)^2 - 1}{y} > 0 \right\}$$



$$14. Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x+3}{1-y} > 0 \right\};$$

$$f'_x = e^x \left(\ln \left(\frac{x+3}{1-y} \right) + \frac{1}{x+3} \right); f'_y = 2 \sin y \cos y + e^x \frac{1}{1-y} = \sin(2y) + e^x \frac{1}{1-y};$$

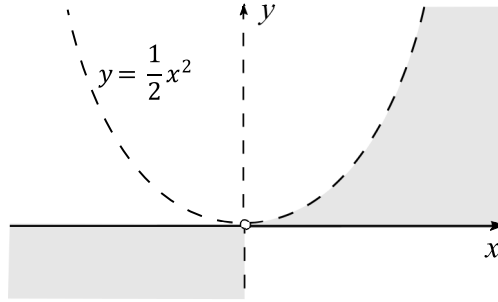
$$Df'_x = Df'_y = Df$$



$$15. \quad Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{2} > y, x \neq 0, xy \geq 0 \right\};$$

$$f'_x = \frac{4y}{x(x^2 - 2y)} + \frac{y}{2\sqrt{xy}}; f'_y = \frac{-2}{x^2 - 2y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}};$$

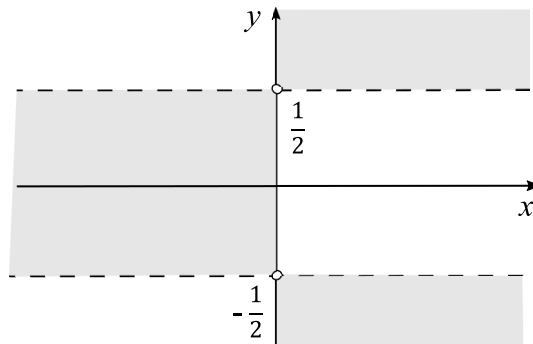
$$Df'_x = Df'_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{2} > y, x \neq 0, xy > 0 \right\}$$



$$16. \quad Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x}{4y^2 - 1} \geq 0 \right\};$$

$$f'_x = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x(4y^2 - 1)}} - 6(y - 3x); f'_y = \frac{-4xy}{\sqrt{x(4y^2 - 1)^3}} + 2(y - 3x);$$

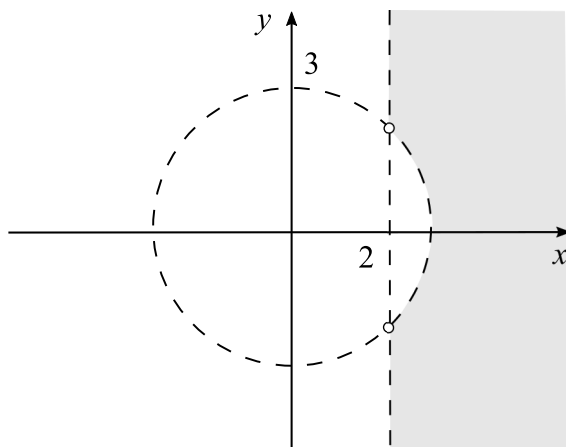
$$Df'_x = Df'_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x}{4y^2 - 1} > 0 \right\}$$



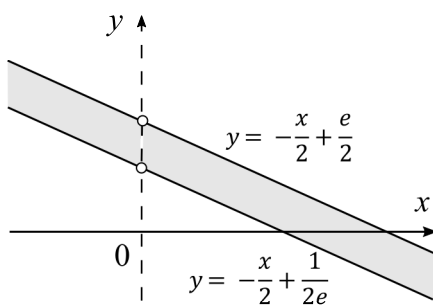
$$17. \quad Df = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 9, x > 2 \right\};$$

$$f'_x = \frac{y^2 - 9}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)^3}} + \frac{1}{x - 2}; f'_y = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)^3}};$$

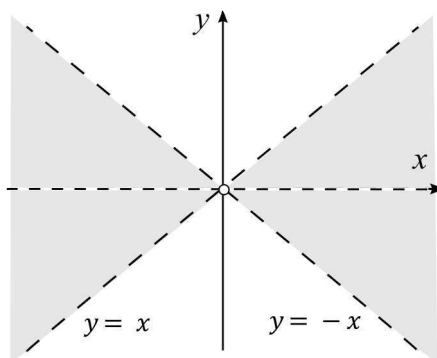
$$Df'_x = Df'_y = Df$$



18. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq \ln(x+2y) \leq 1, x+2y > 0, x \neq 0\};$
 $f'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x+2y)}} \frac{1}{x+2y} - \frac{y}{x^2}; f'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(x+2y)}} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{x};$
 $Df'_x = Df'_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x+2y) < 1, x+2y > 0, x \neq 0\}$



19. $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| > |y|, y \neq 0\};$
 $f'_x = \frac{2x}{y(1+\pi^2)(x^2-y^2)}; f'_y = \frac{-2y^2 - (x^2-y^2)\ln(x^2-y^2)}{y^2(1+\pi^2)(x^2-y^2)};$
 $Df'_x = Df'_y = Df$



2.9 Parciální derivace vyšších řádů

1. $f''_{xy} = \frac{-14xy}{\sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}^3};$
 $Df''_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 2xy + 5y^2 > 0\}$
2. $f''_{xy} = 7 \frac{2x^2 + 3y^2}{(2x^2 + 5xy - 3y^2)^2};$
 $Df''_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{2x - y}{x + 3y} > 0, 2x^2 + 5xy - 3y^2 \neq 0 \right\}$
3. $f''_{xy} = \frac{13(30x^2 + 13xy + 4y^2)}{4(y + 5x)\sqrt{(3x - 2y)(y + 5x)}^3};$
 $Df''_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{3x - 2y}{y + 5x} > 0 \right\}$
4. $f''_{xy} = \frac{-14xy}{\sqrt{5x^2 - 2xy + 3y^2}^3};$
 $Df''_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 5x^2 - 2xy + 3y^2 > 0\}$
5. $f''_{xy} = \frac{7(2x^2 + 3y^2)}{(2x^2 - 3y^2 + 5xy)^2};$
 $Df''_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{2x - y}{x + 3y} > 0, 2x^2 - 3y^2 + 5xy \neq 0 \right\}$
6. $f''_{yy} = 6(6y^2 + 1)e^{3y^2 - 2\sin(2x)}; \quad Df''_{yy} = \mathbb{R}^2$
7. $f''_{xx} = \frac{-7(3y^2 + 2)}{\sqrt{3y^2 - 7x^2 + 2}^3}$ a $f''_{yy} = \frac{3(2 - 7x^2)}{\sqrt{3y^2 - 7x^2 + 2}^3};$
 $Df''_{xx} = Df''_{yy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3y^2 - 7x^2 + 2 > 0\}$

2.10 Přibližný výpočet funkčních hodnot

1. $f(x, y) = \sqrt{x} e^{\frac{y}{x^2}}; \quad 0,995$
2. $f(x, y) = \frac{\ln(x + y^2)}{y}; \quad -0,02$
3. $f(x, y) = \sqrt[3]{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right); \quad -1,9975$
4. $f(x, y) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right); \quad 0,015$
5. $f(x, y) = \ln(x + y^2); \quad -0,02$

$$6. f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x}}; -\frac{1123}{150} = -7,48\bar{6}$$

$$7. f(x, y) = x^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right); 0,96$$

$$8. f(x, y) = x \cos\left(\frac{x}{y^2}\right); 0,02$$

$$9. f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x}}; -\frac{1241}{150} = -8,27\bar{3}$$

2.11 Lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$1. \text{ lok. maximum v bodě } \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right); \\ \text{sedlové body } (0, 0), (2, 1)$$

$$2. \text{ lok. maximum v bodě } \left(\frac{9}{32}, \frac{3}{8}\right); \\ \text{sedlové body } (0, 0), \left(0, \frac{3}{4}\right)$$

$$3. \text{ lok. maximum v bodě } \left(-\frac{11}{12}, -\frac{1}{4}\right); \\ \text{sedlový bod } \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$4. \text{ lok. maximum v bodě } \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right); \\ \text{sedlové body } (0, 0), (0, 1)$$

$$5. \text{ lok. maximum v bodě } \left(\frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right); \\ \text{sedlový bod } (0, 0)$$

$$6. \text{ lok. maximum v bodě } \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right); \\ \text{sedlové body } (2, 0), (-2, 0), (2, -4)$$

$$7. \text{ lok. maximum v bodě } \left(\frac{3}{2}, 1\right); \\ \text{sedlový bod } \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$8. \text{ lok. minimum v bodě } (2, 2) \\ \text{sedlový bod } (0, 0)$$

$$9. \text{ lok. minimum v bodě } (3, 0); \text{ lok. maximum v bodě } (-3, 0); \\ \text{sedlové body } (0, 2), (0, -2)$$

$$10. \text{ lok. minimum v bodě } (0, 3 - 2\sqrt{2}); \\ \text{sedlové body } (0, 3 + 2\sqrt{2}), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$11. \text{ lok. minimum v bodě } \left(-2, \frac{1}{2}\right); \text{ lok. maximum v bodě } \left(2, \frac{1}{2}\right); \\ \text{sedlové body } (0, 0), (0, 1)$$

12. lok. minimum v bodě $(2, -1)$; lok. maximum v bodě $(2, 1)$;
sedlové body $(0, 0)$, $(4, 0)$
13. lok. minimum v bodech $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, -1)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(-\frac{1}{2}, -1)$; lok. maximum v bodě $(0, 0)$;
sedlové body $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$
14. lok. minimum v bodě $(\frac{9}{32}, \frac{3}{8})$;
sedlové body $(0, 0)$, $(0, \frac{3}{4})$
15. lok. minimum v bodě $(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{5}}, \sqrt[3]{\frac{3}{5}})$;
sedlové body $(0, 0)$, $(0, \sqrt[3]{\frac{12}{5}})$
16. lok. minimum v bodě $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$;
sedlové body $(0, 0)$, $(-\frac{2}{3}, 0)$
17. lok. minimum v bodě $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{24})$;
sedlové body $(0, 0)$, $(-1, 0)$
18. lok. minimum v bodě $(\frac{1}{16}, \frac{1}{2})$;
sedlové body $(0, 0)$, $(0, 1)$
19. lok. maximum v bodě $(1, \frac{1}{2})$;
sedlové body $(0, 0)$, $(2, 0)$
20. lok. minimum v bodě $(0, 0)$;
sedlové body $(\frac{-15-\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{2})$, $(\frac{-15+\sqrt{33}}{4}, \frac{3-\sqrt{33}}{2})$
21. lok. minimum v bodě $(0, 0)$;
sedlové body $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{10}}{4})$, $(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{4})$

2.12 Vázané lokální extrémy

1. vázané lok. minimum v bodě $(-\frac{3}{2}, 0)$
2. vázané lok. minimum v bodě $(\frac{23}{16}, \frac{25}{16})$
3. vázané lok. maximum v bodě $(-\frac{17}{6}, -\frac{47}{6})$
4. vázané lok. minimum v bodě $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$, vázané lok. maximum v bodě $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$

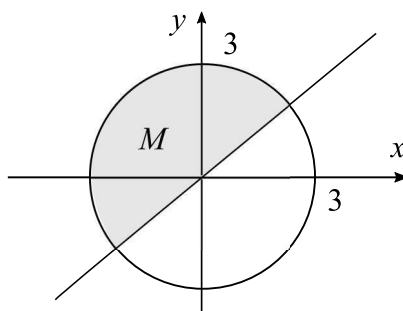
5. vázané lok. minimum v bodě $\left(-\frac{24}{\sqrt{145}}, \frac{2}{\sqrt{145}}\right)$, vázané lok. maximum v bodě $\left(\frac{24}{\sqrt{145}}, -\frac{2}{\sqrt{145}}\right)$
6. vázané lok. minimum v bodě $\left(\frac{6}{\sqrt{13}}, -\frac{9}{\sqrt{13}}\right)$, vázané lok. maximum v bodě $\left(-\frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right)$
7. vázané lok. minimum v bodě $\left(\frac{35}{18}, \frac{28}{9}\right)$
8. vázané lok. maximum v bodě $\left(\frac{53}{36}, \frac{55}{36}\right)$
9. vázané lok. minimum v bodě $\left(\frac{87}{22}, -\frac{23}{22}\right)$
10. vázané lok. minimum v bodě $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, vázané lok. maximum v bodě $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
11. vázané lok. minimum v bodě $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, vázané lok. maximum v bodě $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

2.13 Globální extrémy

1. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(-1, 0)$
- na hM : $\left(-\frac{1}{2}\right)$, $(-3, 0)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

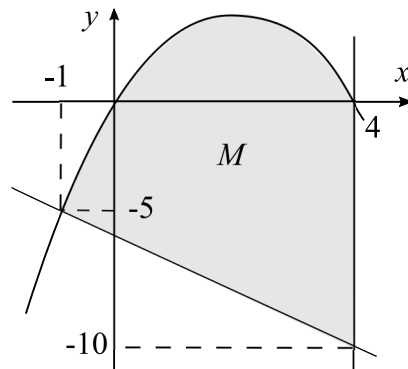
glob. maximum $1 + \frac{6}{\sqrt{2}}$ v $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$; glob. minimum -9 v $(-1, 0)$



2. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $\emptyset$
- na hM : $(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$, $(-1, -5)$, $(4, -10)$, $(4, 0)$

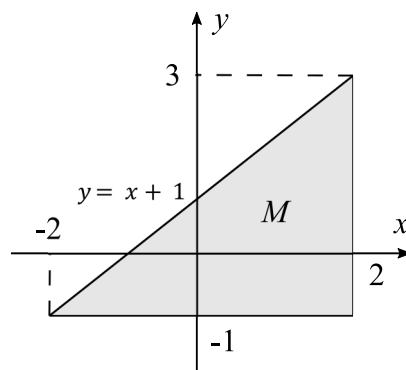
glob. maximum $\frac{17}{2}$ v $(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$; glob. minimum -34 v $(4, -10)$



3. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(0, 0)$
- na hM : $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1)$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, 3)$, $(2, -1)$

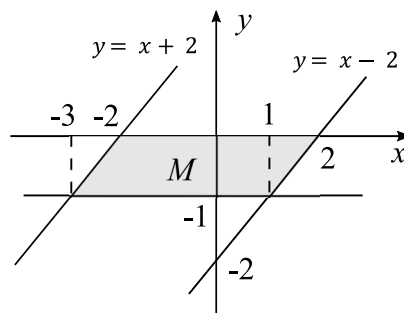
glob. maximum 17 v $(2, 1)$ a $(-2, -1)$; glob. minimum $-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}} - 1$ v $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -1)$ a $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1)$



4. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $\emptyset$
- na hM : $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(-3, -1)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$

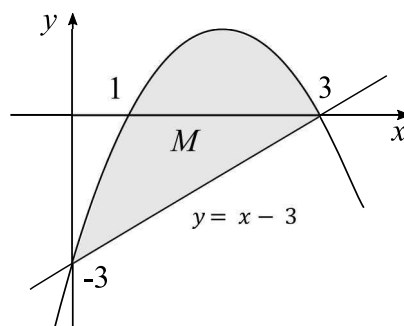
glob. maximum e^{17} v $(-3, -1)$; glob. minimum e^{-3} v $(1, -1)$



5. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $\emptyset$
- na hM : $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3} - 6)$, $(0, -3)$, $(3, 0)$

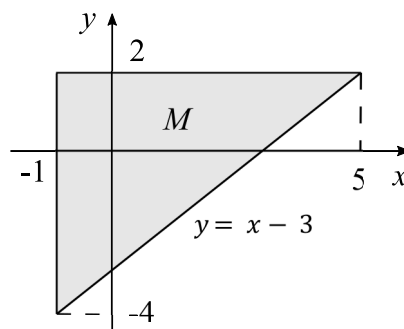
glob. maximum $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ v $(\sqrt{3}, 4\sqrt{3} - 6)$; glob. minimum 0 v $(0, -3)$



6. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$
- na hM : $(3, 0)$, $(-1, -4)$, $(5, 2)$, $(-1, 2)$

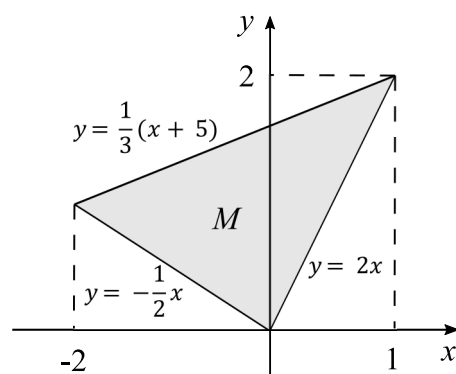
glob. maximum 231 v $(-1, -4)$; glob. minimum -45 v $(-1, 2)$



7. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(-1, 1)$
- na hM : $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$, $(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$, $(-\frac{11}{10}, \frac{13}{10})$, $(-2, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$

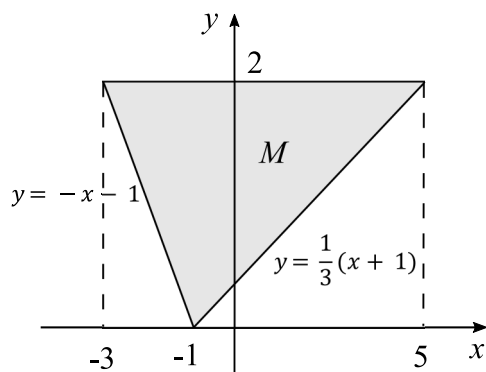
glob. maximum 0 v $(1, 2)$; glob. minimum -5 v $(-1, 1)$



8. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(-1, 1)$
- na hM : $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$, $(0, \frac{1}{3})$, $(-3, 2)$, $(5, 2)$, $(-1, 0)$

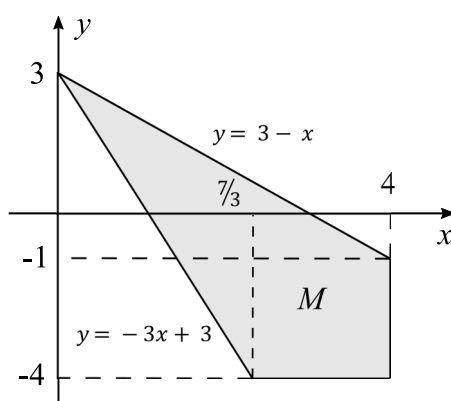
glob. maximum 101 v $(5, 2)$; glob. minimum -11 v $(-3, 2)$



9. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(3, -2)$
- na hM : $(3, -4)$, $(4, -2)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, $(0, 3)$, $(4, -1)$, $(4, -4)$, $(\frac{7}{3}, -4)$

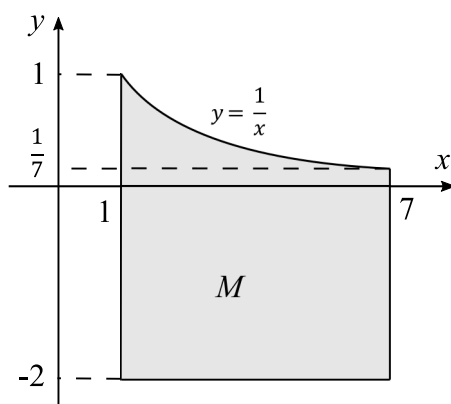
glob. maximum 2 v $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$; glob. minimum -16 v $(0, 3)$



10. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $\emptyset$
- na hM : $(1, y)$ pro $y \in (-2, 1)$, $(1, -2)$, $(7, -2)$, $(7, \frac{1}{7})$, $(1, 1)$

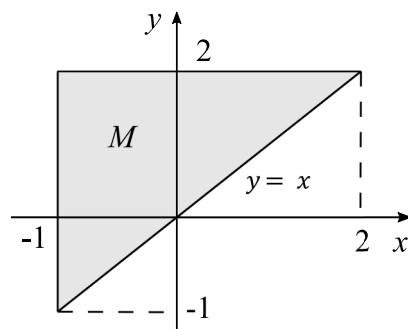
glob. maximum 12 v $(7, \frac{1}{7})$; glob. minimum -168 v $(7, -2)$



11. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$
- na hM : $\left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 2), (\sqrt{2}, 2), (2, 2), (-1, 2), (-1, -1)$

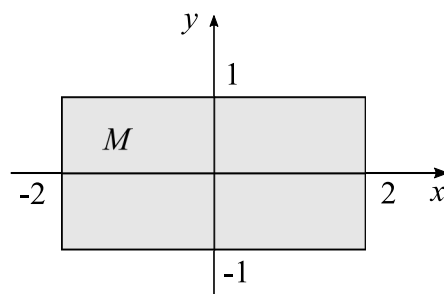
glob. maximum 2 v $(2, 2)$ a $(0, 2)$; glob. minimum -2 v $(\sqrt{2}, 2)$



12. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(0, 0)$
- na hM : $\left(\frac{1}{9}, 1\right), \left(-\frac{1}{9}, -1\right), (-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)$

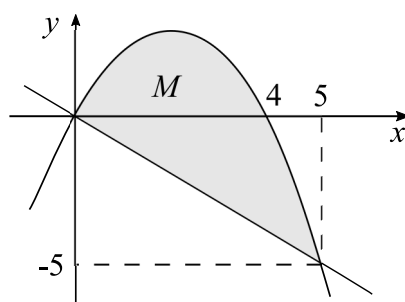
glob. maximum $\frac{49}{3}$ v $(-2, 1)$ a $(2, -1)$; glob. minimum $\frac{80}{27}$ v $\left(\frac{1}{9}, 1\right)$ a $\left(-\frac{1}{9}, -1\right)$



13. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(2, 2)$
- na hM : $\left(\frac{7+\sqrt{7}}{3}, \frac{28-2\sqrt{7}}{9}\right), \left(\frac{7-\sqrt{7}}{3}, \frac{28+2\sqrt{7}}{9}\right), (0, 0), (5, -5)$

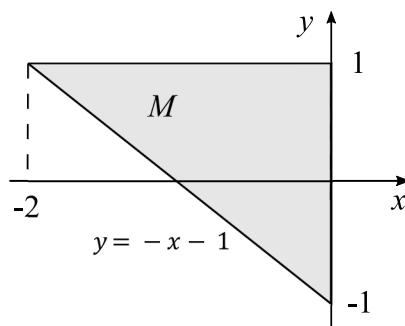
glob. maximum 9 v $(0, 0)$; glob. minimum -11 v $(5, -5)$



14. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$
- na hM : $\left(-\frac{1}{3}, 1\right), (0, 0), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right), (0, 1), (0, -1), (-2, 1)$

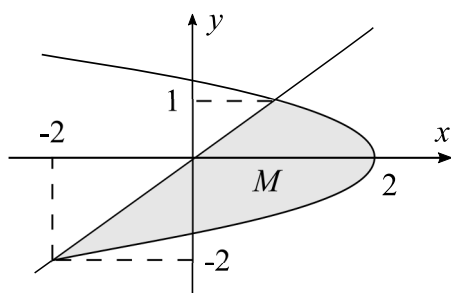
glob. maximum $\frac{20}{9}$ v $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$; glob. minimum -20 v $(-2, 1)$



15. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(1, 0)$
- na hM : $(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $(1, 1)$, $(-2, -2)$

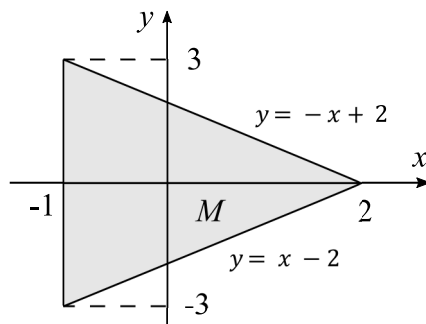
glob. maximum $\frac{33}{4}$ v $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$; glob. minimum 2 v $(-2, -2)$



16. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(0, 0)$
- na hM : $(-1, 0)$, $(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(2, 0)$, $(-1, -3)$, $(-1, 3)$

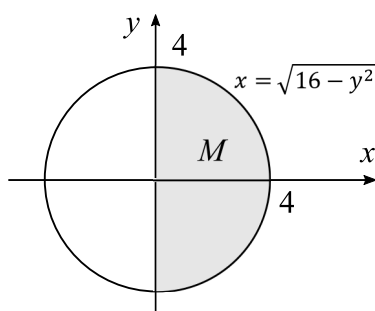
glob. maximum $8(\sqrt{2} - 1)$ v $(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$; glob. minimum -26 v $(-1, -3)$ a $(-1, 3)$



17. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(1, -3)$
- na hM : $(0, -3)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{10}}, -\frac{12}{\sqrt{10}}\right)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$

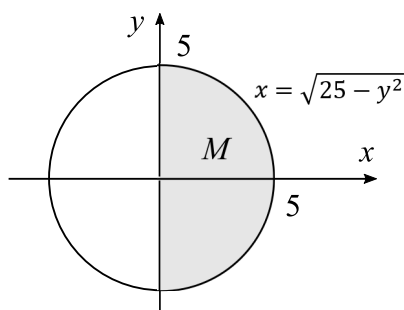
glob. maximum 10 v $(1, -3)$; glob. minimum -40 v $(0, 4)$



18. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(1, 4)$
- na hM : $\left(\frac{5}{\sqrt{17}}, \frac{20}{\sqrt{17}}\right)$, $(1, 0)$, $(-5, 0)$, $(5, 0)$

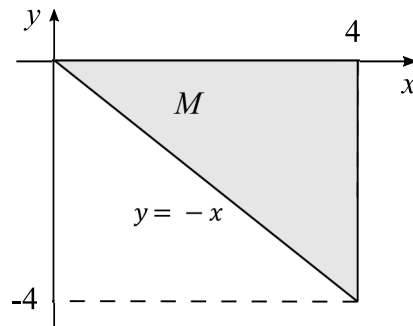
glob. maximum 42 v $(-5, 0)$; glob. minimum -10 v $(1, 4)$



19. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(3, -1)$
- na hM : $(3, 0)$, $(4, -1)$, $(2, -2)$, $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, -4)$

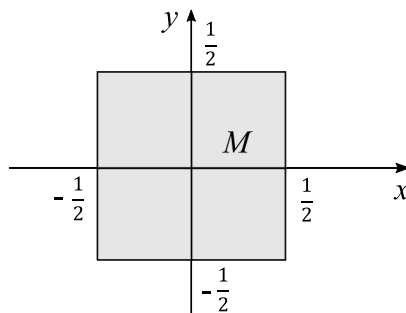
glob. maximum 10 v $(0, 0)$ a $(4, -4)$; glob. minimum 0 v $(3, -1)$



20. body podezřelé z glob. extrému

- v M° : $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{36})$
- na hM : $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{48})$, $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{48})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

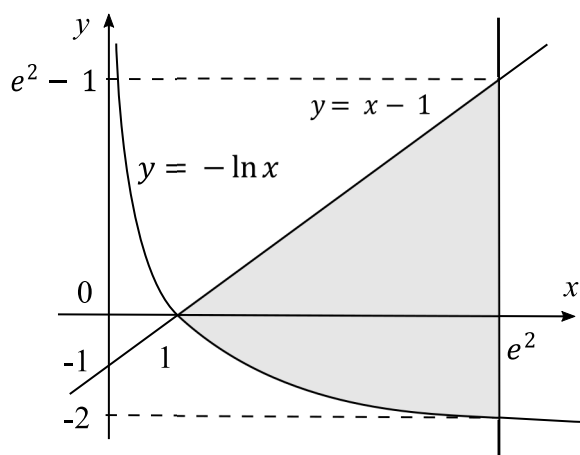
glob. maximum $\frac{19}{8}$ v $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; glob. minimum $-\frac{49}{384}$ v $(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{48})$



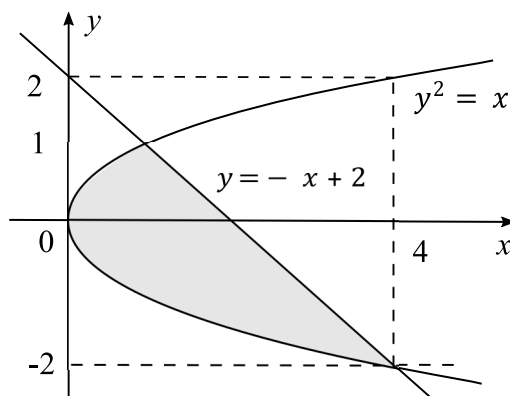
2.14 Elementární množiny v $\mathbb{R}^2$

V zápisech množin má operace kartézského součinu (tj. $\times$) vždy přednost před sjednocením (tj. $\cup$).

- $M = \langle 1, e^2 \rangle \times \langle -\ln x, x - 1 \rangle,$
 $M = \langle e^{-y}, e^2 \rangle \times \langle -2, 0 \rangle \cup \langle y + 1, e^2 \rangle \times \langle 0, e^2 - 1 \rangle$

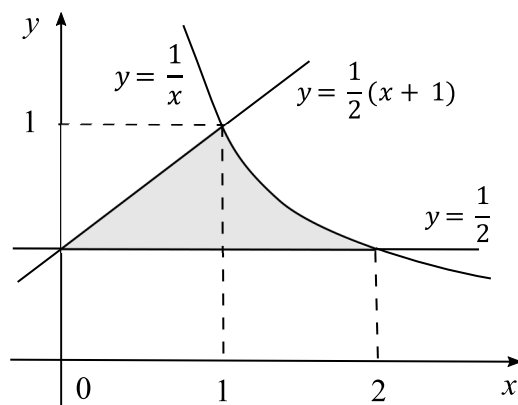


- $M = \langle y^2, 2 - y \rangle \times \langle -2, 1 \rangle,$
 $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle -\sqrt{x}, \sqrt{x} \rangle \cup \langle 1, 4 \rangle \times \langle -\sqrt{x}, -x + 2 \rangle$



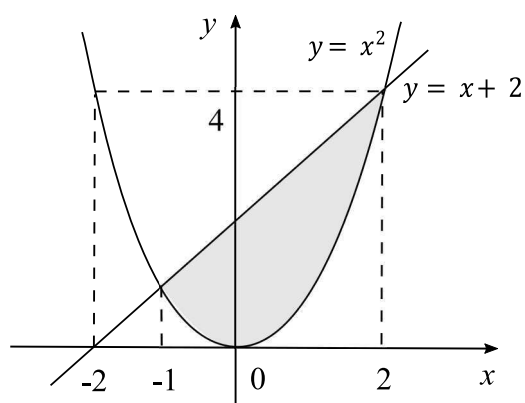
$$3. \quad M = \left\langle 2y - 1, \frac{1}{y} \right\rangle \times \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle,$$

$$M = \langle 0, 1 \rangle \times \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(x+1) \right\rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \times \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{x} \right\rangle$$

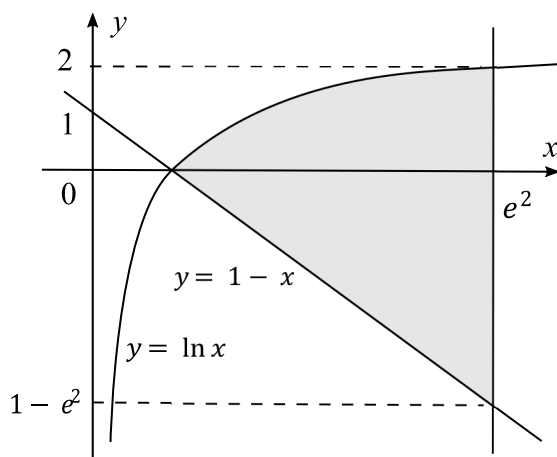


$$4. \quad M = \langle -1, 2 \rangle \times \langle x^2, x+2 \rangle,$$

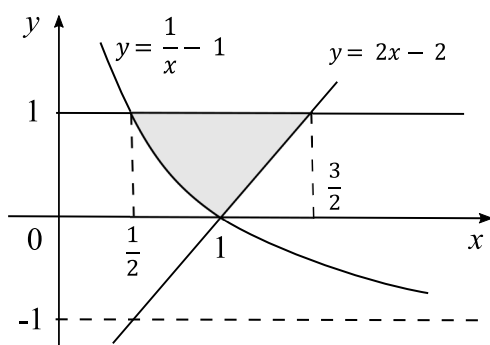
$$M = \langle -\sqrt{y}, \sqrt{y} \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \cup \langle y-2, \sqrt{y} \rangle \times \langle 1, 4 \rangle$$



5. $M = \langle 1, e^2 \rangle \times \langle 1 - x, \ln x \rangle,$
 $M = \langle 1 - y, e^2 \rangle \times \langle 1 - e^2, 0 \rangle \cup \langle e^y, e^2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$

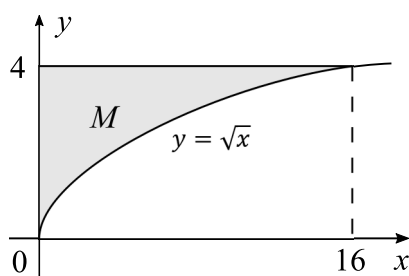


6. $M = \left\langle \frac{1}{y+1}, \frac{1}{2}(y+2) \right\rangle \times \langle 0, 1 \rangle,$
 $M = \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle \times \left\langle \frac{1}{x} - 1, 1 \right\rangle \cup \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle \times \langle 2x - 2, 1 \rangle$

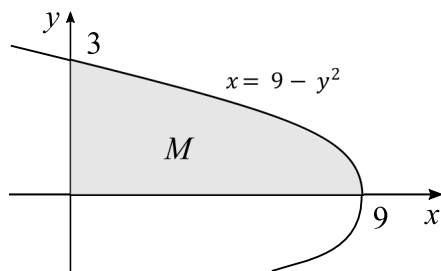


2.15 Dvojný integrál

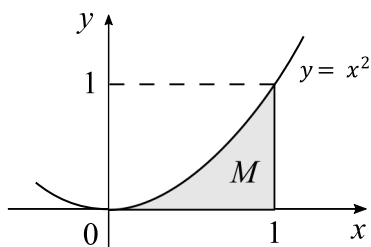
$$1. \quad I = \int_0^4 \left(\int_0^{y^2} x \ln(y^5 + 1) \, dx \right) dy = \frac{1}{10} [(4^5 + 1) \ln(4^5 + 1) - 4^5]$$



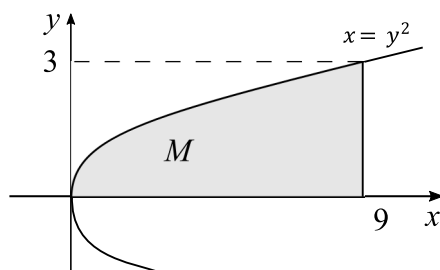
$$2. \quad I = \int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{9-x}} \sin^2(\sqrt{9-x})^3 \, dy \right) dx = 9 - \frac{\sin 54}{6}$$



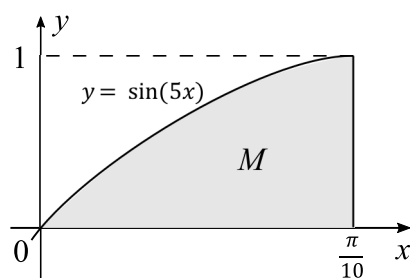
$$3. \quad I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} y \operatorname{tg}(x^5) \, dy \right) dx = -\frac{1}{10} \ln |\cos 1|$$



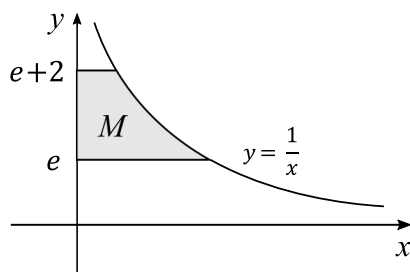
$$4. \quad I = \int_0^9 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \sin(1 - 2x^2) \, dy \right) dx = \frac{1}{8} (\cos 161 - \cos 1)$$



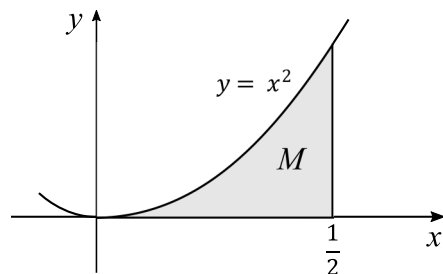
$$5. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \left(\int_0^{\sin(5x)} \cos(5x) e^{\cos(5x)} \, dy \right) dx = \frac{1}{5}$$



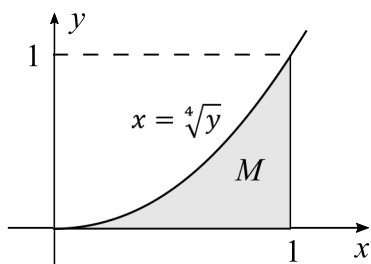
$$6. \quad I = \int_e^{e+2} \left(\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{\ln y + 2 \ln^2 y} \, dx \right) dy = \ln \frac{3 \ln(e+2)}{1 + 2 \ln(e+2)}$$



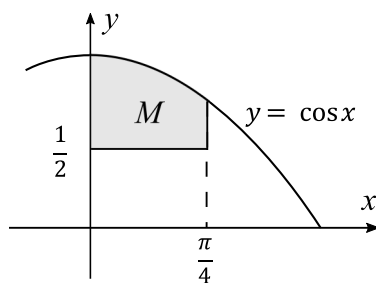
$$7. \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{x^2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-y)^3}} dy \right) dx = \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} + 2$$



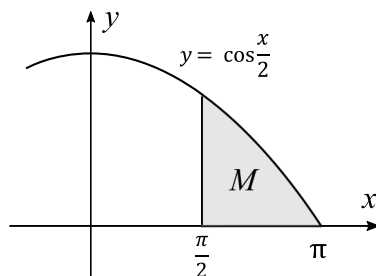
$$8. \quad I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt[4]{y}} 2x \ln(\sqrt{y^3} + 4) dx \right) dy = \frac{2}{3} \left(\ln\left(\frac{5^5}{4^4}\right) - 1 \right)$$



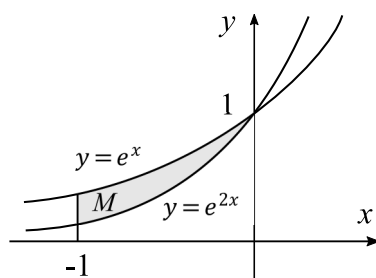
$$9. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\cos x} \frac{\operatorname{tg} x}{y^3} dy \right) dx = -\frac{1}{4} \left(1 + 8 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$



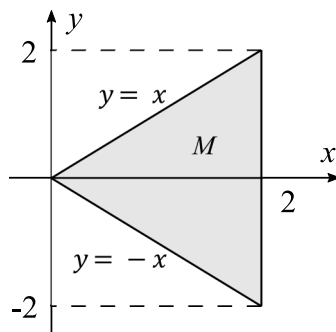
$$10. \ I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{\cos \frac{x}{2}} \ln \left(\sin \frac{x}{2} \right) dy \right) dx = -\sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2$$



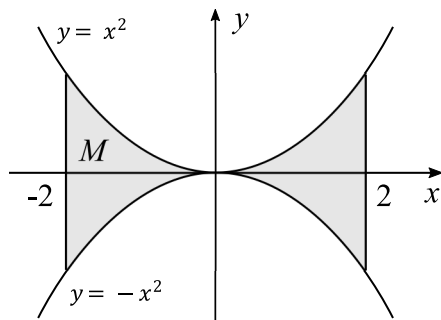
$$11. \ I = \int_{-1}^0 \left(\int_{e^{2x}}^{e^x} \frac{1}{e^{2x} + 4} dy \right) dx = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2e} - \ln \frac{5}{e^{-2} + 4} \right)$$



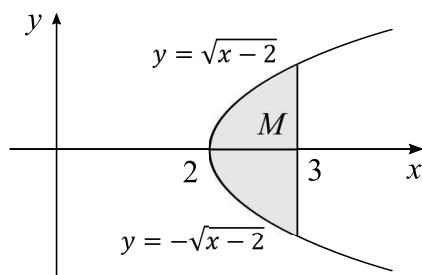
$$12. \ I = \int_0^2 \left(\int_{-x}^x y^2 \sin(2x^4 + 1) dy \right) dx = \frac{1}{12} (-\cos 33 + \cos 1)$$



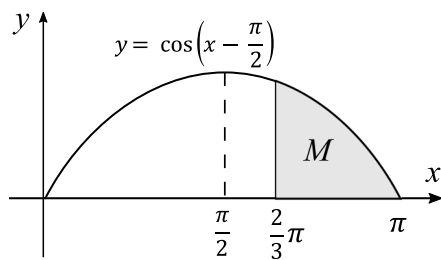
$$13. \quad I = \int_{-2}^2 \left(\int_{-x^2}^{x^2} \sin^2(x^3) \, dy \right) dx = \frac{2}{3} \left(8 - \frac{1}{2} \sin 16 \right)$$



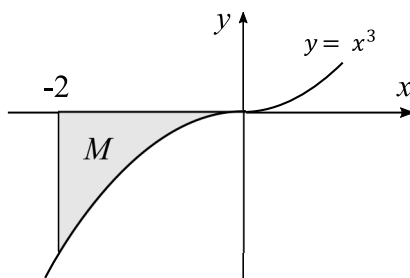
$$14. \quad I = \int_2^3 \left(\int_{-\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x-2}} \sin \sqrt{x-2} \, dy \right) dx = 4 \cos 1 + 8 \sin 1 - 8$$



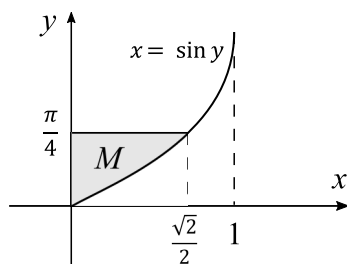
$$15. \quad I = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\cos(x-\frac{\pi}{2})} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \ln \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \, dy \right) dx = \frac{1}{16} (2 \ln 2 - 3)$$



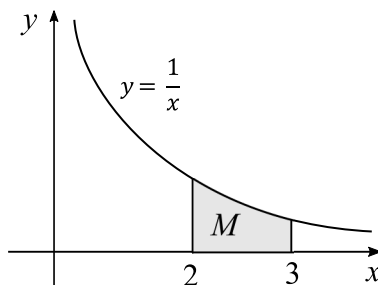
$$\begin{aligned}
 16. \quad I &= \int_{-2}^0 \left(\int_{x^3}^0 \operatorname{arctg}(2x^4 + 4) \, dy \right) dx = \\
 &= \frac{1}{8} (36 \operatorname{arctg} 36 - 4 \operatorname{arctg} 4 + \frac{1}{2} \ln 17 - \frac{1}{2} \ln(36^2 + 1))
 \end{aligned}$$



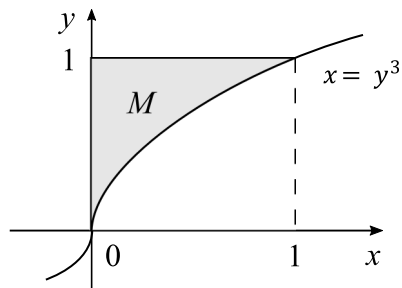
$$17. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sin y} \ln(\cos y) \, dx \right) dy = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + \sqrt{2} \right)$$



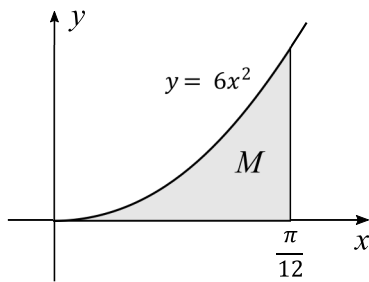
$$18. \quad I = \int_2^3 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} (y + \ln(\ln x)) \, dy \right) dx = \frac{1}{12} + \ln \frac{2}{3} + \ln 3 \ln(\ln 3) - \ln 2 \ln(\ln 2)$$



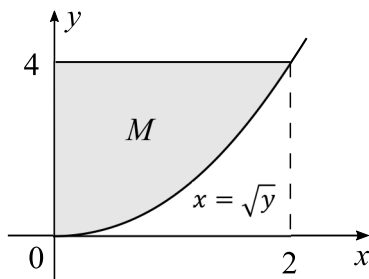
$$19. \quad I = \int_0^1 \left(\int_0^{y^3} \ln(y^4 + 1) \, dx \right) dy = \frac{1}{4} (2 \ln 2 - 1)$$



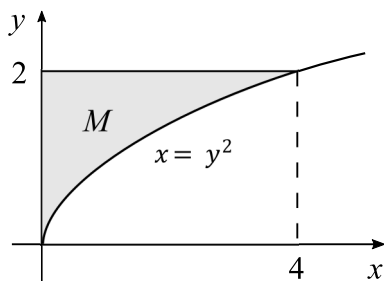
$$20. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \left(\int_0^{6x^2} \operatorname{tg} \left(x^3 + \frac{\pi}{4} \right) dy \right) dx = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{12^3} (\pi^2 + 5184) \right) \right|$$



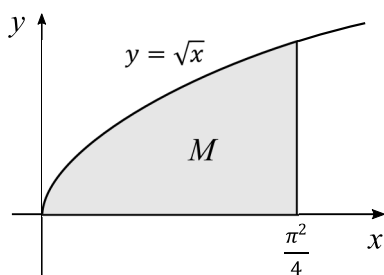
$$21. \quad I = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \cos \sqrt{y} \, dx \right) dy = 4 (\sin 2 + 2 \cos 2)$$



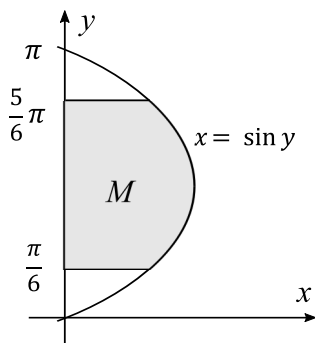
$$22. \quad I = \int_0^2 \left(\int_0^{y^2} \sin(y^3) \, dx \right) dy = \frac{1}{3}(1 - \cos 8) = \frac{2}{3} \sin^2(4)$$



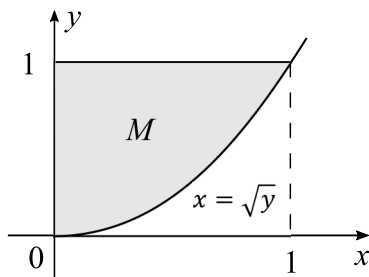
$$23. \quad I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} y \sin \sqrt{x} \, dy \right) dx = \frac{3}{4} \pi^2 - 6$$



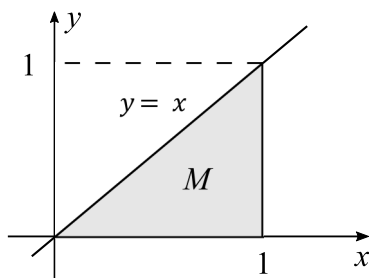
$$24. \quad I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\int_0^{\sin y} \arcsin(\cos y) \, dx \right) dy = 0$$



$$25. \quad I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \operatorname{tg} \sqrt{y^3} \, dx \right) dy = -\frac{2}{3} \ln |\cos 1|$$



$$26. \quad I = \int_0^1 \left(\int_0^x xy \sin(x^4 + 1) \, dy \right) dx = \frac{1}{8} (\cos 1 - \cos 2)$$



2.16 Mocninné řady

Ve výsledcích označuje x_0 střed mocninné řady, r poloměr konvergence, IAK interval absolutní konvergence a OK obor konvergence mocninné řady.

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{4^n(n+1)} (x-2)^{n+1}, \quad x_0 = 2, \quad r = 2, \quad IAK = (0, 4), \quad OK = (0, 4)$$

$$s(x) = 2x - 4 - 4 \ln \left| \frac{x}{2} \right|, \quad x \in IAK$$

$$2. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^n(2-2n)} \left(x - \frac{4}{3} \right)^{n-1}, \quad x_0 = \frac{4}{3}, \quad r = \frac{2}{3}, \quad IAK = \left(\frac{2}{3}, 2 \right), \quad OK = \left(\frac{2}{3}, 2 \right)$$

$$s(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3x-2}{2} \right|, \quad x \in IAK$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x-2)^n, \quad x_0 = 2, \quad r = 2, \quad IAK = (0, 4), \quad OK = \langle 0, 4 \rangle$$

$$s(x) = \ln \left| \frac{2}{4-x} \right|, \quad x \in IAK$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n2^{n+1}} \left(x - \frac{5}{3}\right)^n, x_0 = \frac{5}{3}, r = \frac{2}{3}, IAK = (1, \frac{7}{3}), OK = (1, \frac{7}{3})$$

$$s(x) = \ln \sqrt{\frac{2}{|3-3x|}}, x \in IAK$$

$$5. \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(x - \frac{2}{5}\right)^{n+1}, x_0 = \frac{2}{5}, r = \frac{3}{5}, IAK = (-\frac{1}{5}, 1),$$

$$OK = (-\frac{1}{5}, 1)$$

$$s(x) = \frac{1}{2} (3 \ln |1+5x| - 3 \ln 3 - 5x + 2), x \in IAK$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{2n+1}}{5^{n+2}(2n+1)} \left(x - \frac{1}{3}\right)^{2n+1}, x_0 = \frac{1}{3}, r = \frac{\sqrt{5}}{3}, IAK = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right) = OK,$$

$$s(x) = \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+1-3x}{\sqrt{5}-1+3x} \right|, x \in IAK$$

$$7. 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)2^n} (x-5)^{n+2}, x_0 = 5, r = \frac{2}{3}, IAK = (\frac{13}{3}, \frac{17}{3}), OK = \langle \frac{13}{3}, \frac{17}{3} \rangle$$

$$s(x) = -8 \left(x - 5 + \frac{2}{3} \ln \left| \frac{17-3x}{2} \right| \right), x \in IAK$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(3n+3)5^n} \left(x - \frac{5}{2}\right)^{n+1}, x_0 = \frac{5}{2}, r = \frac{5}{2}, IAK = (0, 5), OK = (0, 5)$$

$$s(x) = -\frac{1}{15} \left(25 \ln x - 20x + 2x^2 - 25 \ln \frac{5}{2} + \frac{75}{2} \right), x \in IAK$$

$$9. 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{4+4n} \left(x + \frac{4}{3}\right)^{n+1}, x_0 = -\frac{4}{3}, r = \frac{1}{6}, IAK = (-\frac{9}{6}, -\frac{7}{6}), OK = \langle -\frac{9}{6}, -\frac{7}{6} \rangle$$

$$s(x) = -\frac{3}{4}x - 1 - \frac{1}{8} \ln |6x+7|, x \in IAK$$

$$10. \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{n+1}} (x-2)^n, x_0 = 2, r = 2, IAK = (0, 4), OK = (0, 4)$$

$$s(x) = -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x}{2} \right|, x \in IAK$$

$$11. 25 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(-3)^n} (x+2)^{n+2}, x_0 = -2, r = 3, IAK = (-5, 1), OK = (-5, 1)$$

$$s(x) = 75 \left(x + 2 + 3 \ln \left| \frac{3}{x+5} \right| \right), x \in IAK$$

12. $-4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(x - \frac{3}{4}\right)^{n+1}, x_0 = \frac{3}{4}, r = \frac{5}{4}, IAK = (-\frac{1}{2}, 2),$
 $OK = \langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$
 $s(x) = -20 \ln \left| \frac{4x-8}{5} \right|, x \in IAK$
13. $-30 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{18}{5}\right)^{n+1} \frac{1}{n+2} \left(x - \frac{1}{3}\right)^{n+2}, x_0 = \frac{1}{3}, r = \frac{5}{18}, IAK = (\frac{1}{18}, \frac{11}{18}),$
 $OK = \langle \frac{1}{18}, \frac{11}{18} \rangle$
 $s(x) = \frac{25}{3} (\ln |11 - 18x| + \ln 5) + 10(3x - 1), x \in IAK$
14. $-3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n \frac{1}{n+1} \left(x - \frac{1}{3}\right)^{n+1}, x_0 = \frac{1}{3}, r = \frac{5}{3}, IAK = (-\frac{4}{3}, 2),$
 $OK = \langle -\frac{4}{3}, 2 \rangle$
 $s(x) = 5 \ln \frac{5}{|4 + 3x|}, x \in IAK$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+3}}{(n+3)2^{3n}} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{n+3}, x_0 = -\frac{1}{2}, r = 2, IAK = (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}),$
 $OK = \langle -\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \rangle$
 $s(x) = 64 \left(8 \ln \frac{4}{|3 - 2x|} - x^2 - 5x - \frac{9}{4} \right), x \in IAK$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^{n-1}} (x+2)^{n+1}, x_0 = -2, r = 3, IAK = (-5, 1), OK = (-5, 1)$
 $s(x) = 9 \ln |5 + x| - 9 \ln 3, x \in IAK$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+4}}{n+4} (x+2)^{n+4}, x_0 = -2, r = \frac{1}{3}, IAK = (-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}), OK = \langle -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3} \rangle$
 $s(x) = -\frac{(3x+6)^3}{3} - \frac{(3x+6)^2}{2} - (3x+6) - \ln |3x+5|, x \in IAK$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n} (x-3)^n, x_0 = 3, r = 4, IAK = (-1, 7), OK = \langle -1, 7 \rangle$
 $s(x) = \ln \frac{4}{|7-x|}, x \in IAK$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{2n+3} (x+7)^{2n+3}, x_0 = -7, r = 1, IAK = (-8, -6), OK = \langle -8, -6 \rangle$
 $s(x) = x - \arctg(x+7) + 7, x \in IAK$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} (x-3)^n, x_0 = 3, r = 4, IAK = (-1, 7), OK = (-1, 7)$
 $s(x) = \ln |1+x| - \ln 4, x \in IAK$
21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n-1}} (x-3)^{n+1}, x_0 = 3, r = 2, IAK = (1, 5), OK = \langle 1, 5 \rangle$
 $s(x) = 4 \ln \frac{2}{|5-x|}, x \in IAK$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (x+2)^{2n}, x_0 = -2, r = 1, IAK = (-3, -1), OK = IAK$
 $s(x) = -\frac{1}{2} \ln |1 - (x+2)^2|, x \in IAK$
23. $5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n} (x-1)^{n+1}, x_0 = 1, r = 2, IAK = (-1, 3), OK = (-1, 3)$
 $s(x) = 5(x-1) + 10 \ln \frac{2}{|x+1|}, x \in IAK$
24. $-6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x-3)^n, x_0 = 3, r = 2, IAK = (1, 5), OK = \langle 1, 5 \rangle$
 $s(x) = 6 \ln \frac{|5-x|}{2}, x \in IAK$
25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n-1}} (x+4)^{n+1}, x_0 = -4, r = 2, IAK = (-6, -2), OK = (-6, -2)$
 $s(x) = 4 \ln \frac{|6+x|}{2}, x \in IAK$
26. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2n+1} (x+2)^{2n+1}, x_0 = -2, r = 1, IAK = (-3, -1), OK = IAK$
 $s(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{3+x}{x+1} \right|, x \in IAK$

3 Řešené příklady

Příklad 1.4.20 *Zakreslete množinu*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 - x - y \geq 0, \ln(x - 3) - y \geq 0, -1 \leq y \leq 0\}$$

a pomocí určitého integrálu vypočtete její obsah.

Řešení:

Úlohu budeme řešit ve dvou krocích. Nejprve identifikujeme a zakreslíme množinu M a poté spočítáme její obsah.

a) Identifikace a grafické znázornění množiny M

Množina M je určena třemi podmínkami:

$$4 - x - y \geq 0 \tag{1}$$

$$\ln(x - 3) - y \geq 0 \tag{2}$$

$$-1 \leq y \leq 0 \tag{3}$$

Podmínka (1) vyjadřuje vztah mezi proměnnými x a y . Je ve tvaru nerovnosti, tudíž půjde o nějakou část roviny $\mathbb{R}^2$, která bude ohraničena křivkou popsanou rovnicí $4 - x - y = 0$. Jedná se zjevně o rovnici přímky. Pro lepší názornost si vyjádříme jednu z proměnných (tradičně to bývá proměnná y), abychom rovnici přímky obdrželi ve směrniciovém tvaru a přímka se nám lépe kreslila, tj.

$$y = 4 - x.$$

Z tohoto zápisu je již zřejmé, že půjde o přímku klesající se směrnici -1 . Bude to tedy přímka rovnoběžná s osou druhého a čtvrtého kvadrantu protínající souřadnicovou osu x v bodě 4 a souřadnicovou osu y také v bodě 4. Tato přímka rozdělí rovinu $\mathbb{R}^2$ na dvě poloroviny. Jedna z těchto polorovin bude odpovídat zadané podmínce (1). Která ze dvou polorovin to bude, určíme například tak, že si vybereme nějaký bod z jedné z polorovin a dosadíme ho do zadané nerovnice. Dospějeme-li po dosazení tohoto bodu k pravdivému výroku, je uvažovaná polorovina tou správnou polorovinou, kterou popisuje zadaná nerovnice. Pokud bude výrok nepravdivý, hledanou polorovinou je zrovna ta, kterou nezkoumáme. V našem příkladě je za účelem této kontroly výhodné zvolit bod $(0, 0)$. Po dosazení souřadnic tohoto bodu do nerovnice (1) dospějeme k výroku $4 \geq 0$. Jedná se o pravdivý výrok, tudíž jsme odhalili, že první podmínka určující množinu M popisuje polorovinu definovanou přímkou $y = 4 - x$ a bodem $(0, 0)$.

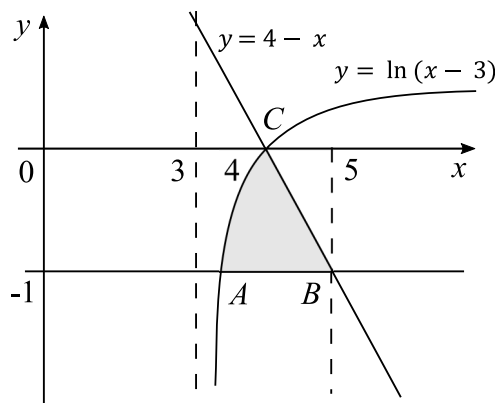
Podmínka (2) opět popisuje vztah mezi proměnnými x a y a opět je ve tvaru nerovnosti. Bude se tedy jednat o nějakou část roviny $\mathbb{R}^2$, kterou bude ohraničovat křivka popsaná rovnicí $\ln(x-3) - y = 0$. Z rovnosti vyjádříme proměnnou y ve tvaru

$$y = \ln(x-3), \quad \text{kde } x \in (3, \infty).$$

Hledanou hraniční křivkou tedy bude graf jedné ze základních elementárních funkcí, a to $y = \ln(x)$, který se však musí posunout o tři jednotky doprava. Posunutý graf bude protínat souřadnicovou osu x v bodě 4, s osou y se neprotne. Abychom zjistili, která ze dvou částí roviny $\mathbb{R}^2$ je popsána podmínkou (2), dosadíme do této podmínky například bod $(4, 1)$. Obdržíme výrok $-1 \geq 0$, což je nepravdivý výrok, tento bod nevyhovuje podmínce. Řešením nerovnice (2) je tedy ta část roviny ohraničená grafem funkce $y = \ln(x-3)$, v níž bod $(4, 1)$ neleží.

Poslední podmínka se týká pouze proměnné y . Podmínce (3) vyhovují všechny body roviny, jejichž y -ová souřadnice patří do uzavřeného intervalu $\langle -1, 0 \rangle$. O x -ové souřadnici podmínka nehovoří, tu mohou mít hledané body libovolnou. Podmínku (3) tedy budou splňovat všechny body z roviny $\mathbb{R}^2$, které leží v pásu ohraničeném přímkami $y = -1$ a $y = 0$.

Všechny tři podmínky mají být splněny současně. Množina M proto bude průnikem dílčích řešení. Její výsledná podoba je znázorněna na obrázku 1.



Obrázek 1: Množina M

Zbývá určit souřadnice bodů, v nichž se protínají křivky ohraničující množinu M . Jedná se o tři body, které jsou na obrázku 1 označeny písmeny A , B a C .

V bodě A se protíná graf funkce $y = \ln(x-3)$ s přímkou popsanou rovnicí $y = -1$. Souřadnice bodu A tedy musí vyhovovat oběma rovnicím současně. Řešíme proto soustavu dvou rovnic o dvou neznámých ve tvaru

$$\begin{aligned} y &= \ln(x-3) \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je bod $(\frac{1}{e} + 3, -1)$, což je hledaný bod A . Obdobně najdeme souřadnice zbývajících průsečíků: $B = (5, -1)$ a $C = (4, 0)$.

b) Obsah množiny M

Splnili jsme první část úlohy. Identifikovali a zakreslili jsme množinu M . Zbývá spočítat její obsah. Zde máme dvě možnosti:

• **Možnost 1:**

Množinu M zapíšeme elementárně vzhledem k proměnné x . To se nám ale nepodaří, protože se nejedná o množinu, která by byla elementární vzhledem k této proměnné. Můžeme však množinu M rozdělit přímkou $x = 4$ na dvě podmnožiny M_1 a M_2 (tyto už elementární vzhledem k proměnné x jsou) a poté zapsat množinu M pomocí jejich sjednocení, tj. $M = M_1 \cup M_2$. Pro M_1 , M_2 a M bude platit:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{e} + 3 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq \ln(x-3) \right\}, \\ M_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 4 \leq x \leq 5, -1 \leq y \leq 4-x \right\}, \\ M &= M_1 \cup M_2. \end{aligned}$$

Obsah množiny M , který si označíme písmenem S , pak spočítáme pomocí součtu dvou určitých integrálů, tj.

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{e}+3}^4 (\ln(x-3) - (-1)) \, dx + \int_4^5 (4-x - (-1)) \, dx = \\ &= \int_{\frac{1}{e}+3}^4 \ln(x-3) \, dx + \int_{\frac{1}{e}+3}^4 1 \, dx + \int_4^5 (5-x) \, dx. \end{aligned}$$

Na první integrál použijeme metodu *per partes*, přičemž volíme $u = \ln(x-3)$ a $v' = 1$ a dopočítáme $u' = \frac{1}{x-3}$ a $v = x-3$. Potom

$$S = \left[(x-3) \ln(x-3) \right]_{\frac{1}{e}+3}^4 - \int_{\frac{1}{e}+3}^4 1 \, dx + \int_{\frac{1}{e}+3}^4 1 \, dx + \int_4^5 (5-x) \, dx.$$

Dva dílčí integrály se odečtou, u posledního snadno najdeme primitivní funkci k funkci $f(x) = 5-x$ a integrál dopočteme

$$S = \left[(x-3) \ln(x-3) \right]_{\frac{1}{e}+3}^4 + \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_4^5.$$

Použijeme Newtonův-Leibnizův vzorec pro výpočet určitého integrálu a pro S dostáváme

$$S = \left(-\frac{1}{e}(-1)\right) + \left(25 - \frac{25}{2} - (20 - 8)\right) = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{2+e}{2e}.$$

V závěru výpočtu si lze všimnout, že celkový obsah S je roven součtu hodnot $\frac{1}{e}$ (obsah množiny M_1) a $\frac{1}{2}$ (obsah množiny M_2).

• **Možnost 2:**

Množinu M si zapíšeme elementárně vzhledem k proměnné y . To se nám podaří celkem snadno:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 0, e^y + 3 \leq x \leq 4 - y\}.$$

Potom obsah S spočítáme pomocí jediného určitého integrálu

$$S = \int_{-1}^0 ((4 - y) - (e^y + 3)) \, dy.$$

Po úpravě lze zapsat ekvivalentně

$$S = \int_{-1}^0 (1 - y - e^y) \, dy.$$

Snadno nalezneme primitivní funkci k funkci $g(y) = 1 - y - e^y$, tj.

$$S = \left[y - \frac{y^2}{2} - e^y \right]_{-1}^0$$

a použijeme Newtonův-Leibnizův vzorec

$$S = (-1) - \left(-1 - \frac{1}{2} - e^{-1}\right) = \frac{2+e}{2e}.$$

Příklad 1.5.20 *Rozhodněte o konvergenci nevlastního integrálu a pokud je to možné, integrál spočítejte*

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

Řešení:

Nejprve zkontrolujeme definiční obor integrované funkce. Jedná se o funkci ve tvaru podílu, musíme si tedy dát pozor, abychom nedělili nulou. Odtud plyne první podmínka

$$\sqrt{25 - x^2} \neq 0.$$

Zároveň je ve jmenovateli druhá odmocnina, pod níž nemůže být záporné číslo. Tedy musíme přidat další podmínku

$$25 - x^2 \geq 0.$$

Definiční obor integrované funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ tvoří všechna reálná čísla vyhovující oběma podmínkám současně, tj.

$$Df = (-5, 5).$$

Z tvaru definičního oboru je patrné, že bod $x = 5$ je tzv. singulárním bodem integrace. Na žádném levém okolí tohoto bodu není funkce f omezená. Jedná se tedy o nevlastní integrál vlivem funkce.

Přejdeme nyní k výpočtu nevlastního integrálu pomocí rovnosti

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 5^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}. \quad (4)$$

Určíme si primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ na intervalu $(0, 5)$. Integrovanou funkci upravíme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}},$$

použijeme substituci $y = \frac{x}{5}$ ($dy = \frac{1}{5}dx$) a dostáváme

$$\frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(y) + c = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primitivní funkci dosadíme do vztahu (4) a dopočítáme limitu:

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 5^-} \left[\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow 5^-} \left(\arcsin\left(\frac{t}{5}\right) - \arcsin(0) \right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Odtud pak

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad 1.7.19 *Dokažte, že limita*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x}$$

neexistuje.

Řešení:

Chceme-li dokázat, že dvojná limita neexistuje, stačí ukázat, že hodnota limity závisí na cestě, po které se do bodu $(2, 1)$ přibližujeme. Existuje několik metod, jak to udělat. Mezi ty nejpoužívanější patří metoda postupných limit, kdy se do bodu $(2, 1)$ přibližujeme po lomených čarách rovnoběžných se souřadnicovými osami. Princip spočívá v tom, že se spočítají dvě postupné limity

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x} \right)$$

a

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 1} \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x} \right).$$

Pokud se hodnota L_1 nebude rovnat hodnotě L_2 , bude neexistence dvojné limity dokázána. Víme totiž, že v každém bodě (a tedy i v bodě $(2, 1)$) může mít funkce $f(x, y) = \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x}$ nejvýše jednu limitu.

Pokud však budou hodnoty L_1 a L_2 shodné, nelze tuto metodu k důkazu neexistence dvojné limity použít a je potřeba poohlédnout se po metodě jiné (metoda svazku přímk, metoda svazku parabol, využití polárních souřadnic apod.).

Spočítáme tedy hodnoty postupných limit

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 4)}{2 - x} = -8,$$

$$L_2 = \lim_{y \rightarrow 1} \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4xy}{y^2 + y - x} \right) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{2^3 - 8y}{y^2 + y - 2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{8(1 - y)}{(y + 2)(y - 1)} = -\frac{8}{3}.$$

Hodnota L_1 se liší od hodnoty L_2 , neexistence dvojné limity je dokázána.

Příklad 1.8.4 Určete, zapíšte a zakreslete definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{x \ln y} + \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right);$$

vypočítejte parciální derivace f'_x a f'_y .

Řešení:

Nejdříve stanovíme a zakreslíme definiční obor a v druhém kroku potom vypočteme obě parciální derivace a určíme jejich definiční obory.

a) Stanovení Df

Definiční obor funkce f stanovíme analýzou předpisu funkce. V první části předpisu se nachází druhá odmocnina. Pod druhou odmocninou nikdy nemůže být záporné číslo, tj. první podmínka pro stanovení definičního oboru této funkce bude ve tvaru

$$x \ln y \geq 0. \quad (5)$$

Dále se podíváme na výraz, který se nachází pod zmíněnou druhou odmocninou. Jde o součin, v němž jeden ze součinitelů je přirozený logaritmus. Argument logaritmu musí být vždy kladný, takže musíme přidat podmínku

$$y > 0. \quad (6)$$

Tímto jsme s první částí funkčního předpisu hotovi a podobně analyzujeme i druhou část. V druhé části funkčního předpisu figuruje funkce sinus. Tato funkce je definována na celé množině reálných čísel, tudíž odtud nám žádná omezení neplynou. V argumentu funkce sinus však vidíme podíl. Na podíl si vždy musíme dát pozor, abychom nepřipustili dělení nulou. Jmenovatel zlomku musí být vždy různý od nuly, což zapíšeme jako

$$4xy \neq 0. \quad (7)$$

Definiční obor zadané funkce je tedy definován podmínkami (5), (6) a (7). Funkce f je funkcí dvou proměnných, definiční obor tedy bude podmnožina množiny $\mathbb{R}^2$. Půjde o množinu bodů, které splňují současně všechny tři výše stanovené podmínky. Zapíšeme ji takto

$$Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ln y \geq 0, y > 0, 4xy \neq 0\}.$$

Tuto množinu nyní znázorníme graficky. Půjde o množinu bodů v rovině $\mathbb{R}^2$, která obsahuje body, jejichž souřadnice splňují současně podmínky (5), (6) a (7). Poslední z podmínek, podmínka (7), říká, že do definičního oboru funkce f nepatří body na souřadnicových osách. V podmínce (6) je zakódovaná informace, že půjde pouze o body ležící nad osou x . Podmínku (5) je potřeba blíže prozkoumat.

Jedná se o součin, jehož výsledkem má být nezáporné číslo. Tato situace nastane ve dvou případech:

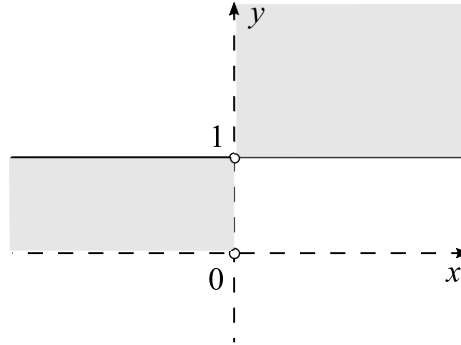
1. oba činitele jsou současně nezáporní, tj. $x \geq 0 \wedge \ln(y) \geq 0$
Jde o body ležící vpravo od osy y nebo na ní ($x \geq 0$) a zároveň body ležící nad přímkou $y = 1$ nebo na ní (podmínka $\ln y \geq 0$ bude splněna právě tehdy, když $y \geq 1$).

2. oba součinitelé jsou současně nekladní, tj. $x \leq 0 \wedge \ln(y) \leq 0$

Zde se jedná o body vlevo od osy y nebo na ní ($x \leq 0$) a současně pod přímkou $y = 1$ nebo na ní (podmínka $\ln y \leq 0$ bude splněna pro $y \leq 1$).

Mezi první a druhou situací je vztah „nebo“, tudíž do obrázku zakreslíme body, které budou vyhovovat prvnímu případu, i body, které popisuje druhý případ.

Celkový výsledek, tj. definiční obor funkce f , je znázorněn na obrázku 2.



Obrázek 2: Množina $Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ln y \geq 0, y > 0, 4xy \neq 0\}$

b) Výpočet parciálních derivací

Nyní přejdeme k druhé části úkolu a určíme obě parciální derivace funkce f , tedy f'_x a f'_y . Nejdříve si ukážeme parciální derivaci podle proměnné x . Připomeňme si předpis zadané funkce, který je tvaru

$$f(x, y) = \sqrt{x \ln y} + \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right).$$

Funkční předpis je vyjádřen jako součet dvou dílčích funkcí $f_1(x, y) = \sqrt{x \ln y}$ a $f_2(x, y) = \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right)$. Derivovat budeme nejdříve jednu a pak druhou.

První funkci, tj. $f_1(x, y) = \sqrt{x \ln y}$, lze ekvivalentně zapsat ve tvaru $f_1(x, y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln y)^{\frac{1}{2}}$. Derivujeme-li podle proměnné x , je výraz $(\ln y)^{\frac{1}{2}}$ pouhou konstantou, kterou je přenásobena funkce $x^{\frac{1}{2}}$. Platí tedy

$$(f_1)'_x(x, y) = \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot (\ln(y))^{\frac{1}{2}} \right)'_x = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)'_x \cdot (\ln(y))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot (\ln(y))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ln(y)}{x}}.$$

Podívejme se na druhou část předpisu funkce, tj. na $f_2(x, y) = \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right)$. Jde o funkci složenou, kdy vnější funkcí je funkce sinus a vnitřní funkce je ve tvaru podílu dvou polynomů. Tomu uzpůsobíme i výpočet parciální derivace podle proměnné x a postupně tak dostaneme

$$\begin{aligned}
(f_2)'_x(x, y) &= \left(\sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \right)'_x = \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \cdot \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right)'_x = \\
&= \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \cdot \frac{5x^4 \cdot 4xy - (x^5 - 4)4y}{(4xy)^2} = \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \cdot \frac{x^5 + 1}{x^2 y}.
\end{aligned}$$

Protože $(f)'_x(x, y) = (f_1)'_x(x, y) + (f_2)'_x(x, y)$, získáme hledanou parciální derivaci funkce f podle proměnné x jako součet výše vypočtených dílčích derivací, tj. ve tvaru

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ln(y)}{x}} + \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \cdot \frac{x^5 + 1}{x^2 y}.$$

Podobně určíme i parciální derivaci funkce f podle proměnné y . Oproti derivování podle proměnné x zde však budou drobné změny.

Vzhledem k proměnné y je první část předpisu funkce (tj. funkce f_1) nyní funkcí složenou. Vnější funkcí je druhá odmocnina, vnitřní funkcí je pak logaritmus, který je navíc pronásoben konstantou x . Tuto část funkce f tedy musíme derivovat jako složenou funkci, tj.

$$(f_1)'_y(x, y) = \left((x \cdot \ln y)^{\frac{1}{2}} \right)'_y = \frac{1}{2} (x \cdot \ln y)^{-\frac{1}{2}} \cdot x \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x \ln(y)}} \cdot \frac{x}{y}.$$

Druhá část předpisu funkce f je také funkcí složenou, ale na rozdíl od derivování podle proměnné x , zde nebudeme derivovat podíl. Platí totiž

$$f_2(x, y) = \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) = \sin \left(\frac{x^5 - 4}{4x} \cdot y^{-1} \right).$$

Z upraveného zápisu je zřejmé, že vnější funkcí je opět funkce sinus, ale vnitřní funkce je funkce $g(y) = y^{-1}$, která je přenásobená konstantou $\frac{x^5 - 4}{4x}$. Potom platí

$$\begin{aligned}
(f_2)'_y(x, y) &= \left(\sin \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \right)'_y = \\
&= \left(\sin \left(\frac{x^5 - 4}{4x} \cdot y^{-1} \right) \right)'_y = \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \cdot \frac{x^5 - 4}{4x} \cdot (-1)y^{-2} = \\
&= -\cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right) \cdot \frac{x^5 - 4}{4xy^2} = -\frac{x^5 - 4}{4xy^2} \cdot \cos \left(\frac{x^5 - 4}{4xy} \right).
\end{aligned}$$

Sečtením $(f_1)'_y(x, y)$ a $(f_2)'_y(x, y)$, získáváme parciální derivaci funkce f podle proměnné y ve tvaru

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x \ln(y)}} \cdot \frac{x}{y} - \frac{x^5 - 4}{4xy^2} \cdot \cos\left(\frac{x^5 - 4}{4xy}\right).$$

Definiční obory obou parciálních derivací funkce f jsou ve tvaru

$$Df'_x = Df'_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \ln y > 0, y > 0, 4xy \neq 0\}.$$

Příklad 1.9.1 Vypočítejte parciální derivaci druhého řádu f''_{xy} pro funkci

$$f(x, y) = \sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}.$$

Řešení:

Máme-li vypočítat konkrétní parciální derivaci druhého řádu, je nutno se zaměřit na proměnné, podle kterých budeme derivovat. Z našeho zadání snadno zjistíme, že budeme muset derivovat podle obou proměnných. Konkrétně v tomto případě nejdříve podle proměnné x a teprve potom podle proměnné y .

Začneme tedy parciální derivací prvního řádu funkce f podle proměnné x . Funkce f je funkce složená z funkcí $g(x) = \sqrt{x}$ a $h(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$, tj. platí

$$f(x, y) = g(h(x, y)).$$

Při derivování podle proměnné x začneme od vnější funkce $g(x)$ a potom se budeme věnovat funkci vnitřní $h(x, y)$, tj.

$$f'_x(x, y) = g'(h(x, y)) \cdot h'_x(x, y).$$

Tedy

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}} \cdot (6x - 2y) = \frac{3x - y}{\sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}}.$$

Abychom získali funkci f''_{xy} , musíme ještě jednou parciálně derivovat. Tentokrát budeme derivovat funkci f'_x podle proměnné y . Nejprve opět prozkoumáme tvar funkce f'_x . Nyní je situace komplikovanější. Funkce f'_x je tvořena podílem dvou funkcí $u(x, y) = 3x - y$ a $v(x, y) = \sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}$. Přitom funkce $v(x, y)$ je opět funkcí složenou z funkcí $v_1(y) = \sqrt{y}$ a $v_2(x, y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$ tak, že $v(x, y) = v_1(v_2(x, y))$. Tedy

$$f'_x(x, y) = \frac{u(x, y)}{v_1(v_2(x, y))}.$$

To znamená, že při derivování funkce f'_x podle proměnné y budeme muset použít pravidlo pro derivování podílu a pravidlo pro derivování složené funkce, tj.

$$f''_{xy}(x, y) = ((f'_x))'_y(x, y) = \frac{u'_y(x, y) \cdot v_1(v_2(x, y)) - u(x, y) \cdot v'_1(v_2(x, y)) \cdot (v_2)'_y(x, y)}{v^2(x, y)}.$$

Tedy

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{(-1) \cdot \sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2} - (3x - y) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}} \cdot (-2x + 10y)}{\left(\sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}\right)^2}.$$

Po úpravě

$$f''_{xy} = -\frac{14xy}{\left(\sqrt{3x^2 - 2xy + 5y^2}\right)^3}.$$

Na konec ještě pro úplnost doplníme definiční obory obou funkcí

$$Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 2xy + 5y^2 \geq 0\}$$

a

$$Df''_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x^2 - 2xy + 5y^2 > 0\}.$$

Příklad 1.10.9 Pomocí diferenciálu prvního řádu vhodné funkce dvou proměnných přibližně vypočítejte hodnotu

$$\frac{(0, 98)^2 - (3, 03)^2}{\sqrt[3]{0, 98}}$$

Řešení:

Výchozím bodem při řešení této úlohy je stanovení správné funkce, jejíž diferenciál prvního řádu nám pomůže přibližně určit požadovanou hodnotu. Předpis hledané funkce závisí na tvaru zadané hodnoty. V našem případě zvolíme funkci $f(x, y)$ zadanou předpisem

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Hledaná hodnota je tedy rovna funkční hodnotě funkce f v bodě

$$(x, y) = (0, 98; 3, 03),$$

tj. platí

$$f(0, 98; 3, 03) = \frac{(0, 98)^2 - (3, 03)^2}{\sqrt[3]{0, 98}}.$$

Nebude snadné tuto hodnotu vypočítat přímo, proto využijeme toho, že známe funkční hodnotu funkce f v bodě $(x_0, y_0) = (1, 3)$, který leží „blízko“ bodu $(0, 98; 3, 03)$. Přitom snadno dopočteme

$$f(x_0, y_0) = f(1, 3) = -8.$$

Funkce f je spojitá na okolí bodu (x_0, y_0) , tudíž je zřejmé, že funkční hodnota této funkce v bodě $(0, 98; 3, 03)$ bude blízká číslu -8 . To, zda hledaná hodnota bude menší, nebo větší než číslo -8 , nám pomůže zjistit diferenciál funkce f . Tento diferenciál nám pomůže i jinak. Stanoví přibližnou hodnotu, kterou je třeba přičíst k číslu -8 , abychom získali hledanou přibližnou funkční hodnotu funkce f v bodě $(0, 98; 3, 03)$. Pro diferenciál prvního řádu funkce f v bodě (x_0, y_0) (značíme $df(x_0, y_0, x, y)$) platí

$$df(x_0, y_0, x, y) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Určíme potřebné parciální derivace prvního řádu

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{2x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2}{x\sqrt[3]{x}}, \\ f'_y(x, y) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(-2y), \end{aligned}$$

a jejich hodnotu v bodě $(x_0, y_0) = (1, 3)$

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= \frac{14}{3}, \\ f'_y(x_0, y_0) &= -6. \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty dosadíme do předpisu diferenciálu, tj.

$$df(1, 3, x, y) = \frac{14}{3}(x - 1) - 6(y - 3).$$

Funkční hodnotu funkce f v bodě (x, y) pak přibližně vypočítáme jako

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0, x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{14}{3}(x - 1) - 6(y - 3).$$

Po dosazení $(x, y) = (0, 98; 3, 03)$ pak dostáváme

$$\begin{aligned} f(0, 98; 3, 03) &= \frac{(0, 98)^2 - (3, 03)^2}{\sqrt[3]{0, 98}} \approx -8 + \frac{14}{3}(0, 98 - 1) - 6(3, 03 - 3) = \\ &= -8 - \frac{82}{300} = -\frac{1241}{150} = -8, 27\bar{3}. \end{aligned}$$

Příklad 1.11.2 *Vypočítejte lokální extrémy funkce*

$$f(x, y) = 4 - x(x + 4y^2 - 3y).$$

Řešení:

Hledání lokálních extrémů je záležitost dvou kroků. Nejdříve vytipujeme body z definičního oboru, v nichž by mohl lokální extrém nastat (tzv. body podezřelé z lokálních extrémů). Následně tyto podezřelé body prověříme, zda v nich lokální extrém nastává a případně určíme typ tohoto extrému (minimum/maximum).

a) Vytipování bodů podezřelých z lokálních extrémů

Funkce může nabývat lokálních extrémů pouze v několika typech bodů z Df :

- body, v nichž jsou obě parciální derivace prvního řádu nulové (stacionární body),
- body, v nichž je jedna parciální derivace prvního řádu nulová a druhá neexistuje,
- body, v nichž neexistuje ani jedna z parciálních derivací prvního řádu.

Výchozím bodem tedy bude určit obě parciální derivace prvního řádu. Platí

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= -2x - 4y^2 + 3y \\ f'_y(x, y) &= -8xy + 3x, \end{aligned}$$

přičemž $Df = Df'_x = Df'_y = \mathbb{R}^2$. Obě parciální derivace srovnáme s nulou, čímž získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tedy

$$\begin{aligned} -2x - 4y^2 + 3y &= 0 \\ -8xy + 3x &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou tři body $(0, 0)$, $(0, \frac{3}{4})$ a $(\frac{9}{32}, \frac{3}{8})$. Jedná se o stacionární body funkce f . V těchto bodech může funkce nabývat lokálních extrémů. Aby byl seznam podezřelých bodů úplný, je potřeba zkontrolovat, zda neexistují

některé body z Df , ve kterých parciální derivace neexistují (stačí, když neexistuje jedna a druhá je nulová). Toto provedeme snadno srovnáním definičního oboru původní funkce f s definičními obory obou parciálních derivací. Protože $Df = Df'_x = Df'_y = \mathbb{R}^2$, je zřejmé, že neexistují žádné body z definičního oboru původní funkce, ve kterých by nebyla definována některá z parciálních derivací. Neexistují tudíž žádné další body, v nichž by funkce f mohla nabývat lokálních extrémů. Náš seznam podezřelých bodů je tedy úplný a obsahuje tři výše nalezené body, tj. $(0, 0)$, $(0, \frac{3}{4})$ a $(\frac{9}{32}, \frac{3}{8})$.

b) Prověření nalezených bodů a určení typu extrému

Všechny podezřelé body, jsou stacionárními body. K prověření, zda se jedná o lokální extrémy funkce f , tudíž použijeme parciální derivace druhého řádu. Platí

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= -2 \\ f''_{xy}(x, y) &= -8y + 3 \\ f''_{yx}(x, y) &= -8y + 3 \\ f''_{yy}(x, y) &= -8x. \end{aligned}$$

Tyto parciální derivace druhého řádu použijeme pro sestavení determinantu $D_2(x, y)$

$$D_2(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8y + 3 \\ -8y + 3 & -8x \end{vmatrix}$$

Hodnota determinantu bude záviset na hodnotách proměnných x a y . Pomocí tohoto determinantu postupně prověříme všechny tři podezřelé body

$$\begin{aligned} D_2(0, 0) &= -9 < 0, \\ D_2\left(0, \frac{3}{4}\right) &= -9 < 0, \\ D_2\left(\frac{9}{32}, \frac{3}{8}\right) &= \frac{9}{2} > 0. \end{aligned}$$

V bodech $(0, 0)$ a $(0, \frac{3}{4})$ je hodnota determinantu záporná. Znamená to, že v těchto bodech funkce nenabývá lokálních extrémů a jedná se pouze o tzv. sedlové body funkce f . Po dosazení bodu $(\frac{9}{32}, \frac{3}{8})$ je hodnota D_2 kladná, funkce f tedy nabývá v tomto bodě lokálního extrému. Zbývá zjistit, zda půjde o lokální maximum, nebo minimum. S tím nám pomůže hodnota $D_1(x, y) = f''_{xx}(x, y)$ v bodě $(\frac{9}{32}, \frac{3}{8})$. Snadno zjistíme, že $f''_{xx}(\frac{9}{32}, \frac{3}{8}) = -2$. Jedná se o záporné číslo, tudíž funkce f nabývá v bodě $(\frac{9}{32}, \frac{3}{8})$ ostré lokální maximum.

Příklad 1.12.1 Vypočítejte vázané lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy + y^2 - x^2$ s vazbou $y - 2x - 3 = 0$.

Řešení:

Nejdříve se podíváme na zadanou funkci a určíme si její definiční obor. V našem případě bude platit $Df = \mathbb{R}^2$. Při hledání vázaného lokálního extrému je důležitý tvar vazby. Záleží na tom, zda se z vazební podmínky dá snadno vyjádřit jedna z proměnných, či nikoli. To bude mít vliv na volbu metody řešení.

V této úloze je vazbou lineární funkce, jejímž grafem je přímka. Z vazby tak snadno vyjádříme např. proměnnou y , tj.

$$y = 2x + 3.$$

Vzhledem k jednoduchosti vazby a snadnému vyjádření jedné z proměnných zkusíme použít metodu přímého dosazení a převést úlohu na hledání lokálního extrému funkce jedné proměnné. Výše vyjádřenou proměnnou y tedy dosadíme do předpisu funkce f a získáváme novou funkci $F(x)$, kde

$$F(x) = f(x, 2x + 3) = 5x^2 + 15x + 9.$$

Funkce F je funkcí pouze jedné proměnné, pro kterou platí $DF = \mathbb{R}$. Pokud najdeme lokální extrémy funkce F , snadno dopočítáme vázané lokální extrémy funkce f . Začneme vytipováním bodů, ve kterých by funkce F mohla nabývat lokálního extrému. Mohou to být dvě skupiny bodů, a to

1. stacionární body, v nichž platí $F'(x) = 0$,
2. body z DF , v nichž derivace funkce F neexistuje.

Postupně prozkoumáme obě skupiny bodů.

- Zaměříme se nejprve na stacionární body. Platí

$$F'(x) = 10x + 15, \quad DF' = \mathbb{R}.$$

Derivaci srovnáme s nulou a získáme jednoduchou lineární rovnici

$$10x + 15 = 0,$$

které vyhovuje jediný bod $x_0 = -\frac{3}{2}$. Jedná se o stacionární bod funkce F . V tomto bodě funkce F může, ale také nemusí mít lokální extrém. To, zda tam extrém existuje, zjistíme pomocí druhé derivace funkce F . Platí

$$F''(x) = 10 \quad \forall x \in DF'' = \mathbb{R}.$$

Druhá derivace funkce F je zjevně konstantní funkcí na svém definičním oboru, tudíž bude platit $F''(-\frac{3}{2}) = 10$. Vzhledem k tomu, že druhá derivace funkce F je v bodě $x_0 = -\frac{3}{2}$ kladná, můžeme učinit závěr, že funkce F nabývá v bodě $x_0 = -\frac{3}{2}$ lokálního minima.

- Funkce F však může nabývat lokálních extrémů i mimo stacionární body. Je nutné prozkoumat i body z DF , v nichž $F'(x)$ neexistuje. Porovnáme proto definiční obory funkcí F a F' . Platí

$$DF = \mathbb{R} \quad \text{a} \quad DF' = \mathbb{R}.$$

Oba definiční obory jsou stejné, tedy v definičním oboru funkce F nenajdeme žádný bod, ve kterém by funkce F' nebyla definována.

- Funkce F nabývá lokálního extrému (a to lokálního minima) pouze v jednom jediném bodě, a to $x_0 = -\frac{3}{2}$.

K vyřešení úlohy tak zbývá poslední krok. Jestliže funkce F nabývá lokálního minima v bodě $x_0 = -\frac{3}{2}$, bude funkce f nabývat vázaného lokálního minima v bodě $(x_0, y_0) = (x_0, 2x_0 + 3) = (-\frac{3}{2}, 0)$.

Příklad 1.11.10 Vypočítejte vázané lokální extrémy funkce $f(x, y) = x - 2y + 3$ s vazbou $y^2 = 1 - x^2$.

Řešení:

Definičním oborem funkce f je celá rovina $\mathbb{R}^2$. Vazební podmínku, kterou lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 = 1$, splňují body ležící na kružnici se středem v bodě $(0, 0)$ a poloměrem 1. Vyjadřování jedné proměnné z vazební podmínky by bylo zbytečně komplikované, proto k nalezení vázaného lokálního extrému funkce f použijeme Lagrangeovu funkci $L(x, y)$ s parametrem λ . Funkce L je dána předpisem

$$L(x, y) = x - 2y + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Vázané lokální extrémy funkce f budeme hledat v bodech, kde funkce L nabývá lokálních extrémů. Přešli jsme tedy k úloze jiného typu, hledáme lokální extrémy funkce L .

Definičním oborem funkce L je celá rovina $\mathbb{R}^2$, parametr λ může být jakékoli reálné číslo. Najdeme si stacionární body funkce L , tj. parciální derivace

$$\begin{aligned} L'_x(x, y) &= 1 + 2\lambda x, \\ L'_y(x, y) &= -2 + 2\lambda y \end{aligned}$$

položíme rovny nule a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda x &= 0, \\ -2 + 2\lambda y &= 0. \end{aligned}$$

K těmto dvěma rovnicím přidáme také vazební podmínku, což je vlastně derivace funkce L podle proměnné λ , tj.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Této soustavě (o neznámých x , y a parametru λ) vyhovují dva body

$$P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right), \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Abychom zjistili, zda v těchto bodech nabývá funkce L lokálního extrému, sestojíme si matici parciálních derivací druhého řádu, tj. Hessovu matici

$$\begin{pmatrix} L''_{xx}(x, y) & L''_{xy}(x, y) \\ L''_{yx}(x, y) & L''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Determinant Hessovy matice si označíme jako $D_2(x, y)$. Jeho hodnota obecně závisí na hodnotách proměnných x a y i parametru λ . V našem případě dostáváme $D_2(x, y) = 4\lambda^2$.

Pro oba podezřelé body P_1 a P_2 dostáváme po dosazení kladnou hodnotu D_2 , tj. v obou těchto bodech funkce L nabývá lokálního extrému. Typ extrému je určen znaménkem parciální derivace druhého řádu funkce L podle proměnné x v příslušném bodě, v našem příkladu máme

$$f''_{xx}(x, y) = 2\lambda.$$

V případě bodu P_1 je $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ a tedy

$$f''_{xx}(P_1) > 0.$$

Z toho plyne, že funkce L nabývá v bodě P_1 lokálního minima.

Analogicky prozkoumáme bod P_2 a zjistíme, že platí

$$f''_{xx}(P_2) < 0,$$

což vede k závěru, že v bodě P_2 funkce L nabývá lokálního maxima.

Vzhledem k tvaru parciálních derivací prvního řádu funkce L (obě parciální derivace prvního řádu existují na celé rovině $\mathbb{R}^2$) můžeme soudit, že jsme našli všechny lokální extrémy funkce L .

Vraťme se k funkci f . Má-li funkce L v nějakém bodě lokální extrém, má v tomtéž bodě funkce f vázaný lokální extrém stejného typu. Z toho plyne, že funkce f nabývá v bodě P_1 vázaného lokálního minima s vazbou $y^2 = 1 - x^2$ a v bodě P_2 nabývá vázaného lokálního maxima s vazbou $y^2 = 1 - x^2$.

Příklad 1.13.8 Vypočítejte globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^3 - 2xy + 4xy^2$ na množině M , kde M je uzavřený trojúhelník s vrcholy v bodech $(-1, 0)$, $(5, 2)$ a $(-3, 2)$.

Řešení:

Zadaná funkce je spojitá na celém svém definičním oboru ($Df = \mathbb{R}^2$) a množina M je kompaktní (uzavřená a omezená), tudíž existence globálních extrémů funkce f na této množině je zaručená. Body, v nichž funkce bude nabývat globálních extrémů, mohou ležet ve vnitřku množiny M , nebo na hranici této množiny. Prohledávat je budeme postupně.

a) Hledání bodů podezřelých z glob. extrémů na vnitřku množiny M

Uvnitř množiny M může funkce f nabývat globálních extrémů pouze v těch bodech, ve kterých nabývá lokálních extrémů. Při hledání podezřelých bodů tedy budeme postupovat stejně jako v případě hledání bodů podezřelých z lokálních extrémů, tj. prostřednictvím parciálních derivací prvního řádu. Platí

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x - 2y + 4y^2 \\ f'_y(x, y) &= 6y^2 - 2x + 8xy, \end{aligned}$$

kde $Df'_x = Df'_y = \mathbb{R}^2$. Obě parciální derivace srovnáme s nulou a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 4y^2 &= 0 \\ 6y^2 - 2x + 8xy &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou tři body $(0, 0)$, $(-1, 1)$ a $(\frac{3}{32}, \frac{1}{8})$. Zkontrolujeme, který z bodů leží ve vnitřku množiny M , a zjistíme, že

$$(0, 0) \notin M^0, \quad (-1, 1) \in M^0, \quad \left(\frac{3}{32}, \frac{1}{8}\right) \notin M^0.$$

Definiční obory obou parciálních derivací jsou stejné jako definiční obor původní funkce. Ve vnitřku množiny M tedy leží pouze jediný bod, ve kterém může funkce f nabývat globálního extrému, a tím bodem je bod $(-1, 1)$. Tento bod si označíme jako P_1 a zařadíme ho mezi body podezřelé z globálního extrému. Později prověříme, zda v něm globální extrém nastává, nebo nenastává.

b) Hledání bodů podezřelých z glob. extrémů na hranici množiny M

Hranici množiny M tvoří tři úsečky (strany trojúhelníka), které lze popsat rovnicemi ve tvaru

$$y = -x - 1, \quad x \in (-3, -1) \tag{8}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \quad x \in (-1, 5) \tag{9}$$

$$y = 2, \quad x \in (-3, 5), \tag{10}$$

a tři body (vrcholy trojúhelníka) se souřadnicemi $(-1, 0)$, $(5, 2)$ a $(-3, 2)$.

Každou z výše uvedených částí hranice množiny M prověříme zvlášť. Budeme hledat body podezřelé z vázaných lokálních extrémů funkce f s vazbami nejprve (8), poté (9) a nakonec (10).

- Začneme tedy s vazbou (8). Vazba má jednoduchý tvar, hodnota proměnné y je vyjádřena v závislosti na proměnné x a to ve tvaru $y = -x - 1$. Toho můžeme využít a převést funkci $f(x, y)$ na funkci $F_1(x) = f(x, -x - 1)$, tj.

$$F_1(x) = x^2 + 2(-x - 1)^3 - 2x(-x - 1) + 4x(-x - 1)^2, \quad \text{kde } x \in (-3, -1).$$

Tímto jednoduchým způsobem jsme převedli úlohu hledání bodů podezřelých z vázaných lokálních extrémů funkce f na úlohu hledání bodů podezřelých z lokálních extrémů funkce F_1 na intervalu $(-3, -1)$. Stačí najít stacionární body funkce F_1 . Nejdříve si vyjádříme derivaci funkce F_1

$$F_1'(x) = 2x + 6(-x - 1)^2(-1) - 2(-x - 1) + 2x + 4(-x - 1)^2 + 8x(-x - 1)(-1),$$

kterou si upravíme do jednoduššího tvaru, tj.

$$F_1'(x) = 2x(3x + 5).$$

Derivaci srovnáme s nulou a dostaneme jednoduchou rovnici

$$2x(3x + 5) = 0.$$

Řešením této rovnice jsou dva body $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{5}{3}$. Zkontrolujeme, zda body náleží do intervalu $(-3, -1)$ (viz podmínka (8)) a zjistíme, že

$$x_1 \notin (-3, -1) \quad \text{a} \quad x_2 \in (-3, -1).$$

Dále tedy pracujeme pouze s bodem x_2 , protože bod x_1 nesplňuje vazební podmínku, takže tento dále neuvažujeme. K bodu x_2 dopočítáme y -ovou složku. Provedeme to jednoduše. Hledaný podezřelý bod musí ležet na hranici množiny M , tj. musí splňovat rovnici v podmínce (8). Bude platit

$$y_2 = -x_2 - 1,$$

což vede k řešení $y_2 = \frac{2}{3}$.

Získali jsme tak druhý bod, v němž může funkce f nabývat globálního extrému. Tento bod si označíme $P_2 = (-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$. Dáme ho do seznamu podezřelých bodů k bodu P_1 a později ho prověříme.

- Analogicky prohledáme druhou část hranice množiny M . Půjde o část popsanou podmínkou (9).

Začneme vytvořením funkce $F_2(x) = f(x, \frac{1}{3}x + \frac{1}{3})$, tj.

$$F_2(x) = x^2 + 2 \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right)^3 - 2x \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right) + 4x \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \right)^2,$$

kde $x \in (-1, 5)$. Tuto funkci zderivujeme, derivaci upravíme do jednoduchého tvaru a srovnáme s nulou, čímž získáme rovnici

$$\frac{2}{9}x(7x + 13) = 0.$$

Řešením jsou dva body $x_3 = 0$ a $x_4 = -\frac{13}{7}$. Bod x_4 nesplňuje vazební podmínku (9), protože platí $-\frac{13}{7} \notin (-1, 5)$. Bod x_3 tuto vazební podmínku splňuje, proto k němu dopočítáme i y -ovou souřadnici a získáme bod $P_3 = (0, \frac{1}{3})$.

- Nakonec prohledáme i třetí část hranice popsanou rovnicí (10).

Vytvoříme funkci

$$F_3(x) = f(x, 2) = x^2 + 12x + 16, \quad \text{kde } x \in (-3, 5).$$

Protože $F_3'(x) = 2x + 12$, je stacionárním bodem funkce F_3 pouze bod $x_5 = -6$, pro který platí $-6 \notin (-3, 5)$. Na třetí úsečce, která tvoří hranici množiny M , tedy neexistuje žádný bod, v němž by funkce f mohla nabývat globálního extrému na množině M .

c) Prověření podezřelých bodů

V tomto kroku řešení zadané úlohy spočítáme funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech. Platí

$$f(P_1) = 1, \quad f(P_2) = \frac{71}{27}, \quad f(P_3) = \frac{2}{27}.$$

Doplňme ještě funkční hodnoty ve vrcholech zadaného trojúhelníku, tj.

$$f(-3, 2) = -11, \quad f(5, 2) = 101, \quad f(-1, 0) = 1.$$

Nyní porovnáme všech šest funkčních hodnot. Největší funkční hodnota, kterou jsme vypočítali, je hodnota 101. Funkce jí nabývá v bodě $(5, 2)$. Hodnota 101 je globálním maximem funkce f na množině M . Naopak, nejmenší funkční hodnotu nabývá tato funkce v bodě $(-3, 2)$. Jedná se o hodnotu -11 , což je tedy globální minimum funkce f na množině M .

Příklad 1.15.14 *Vypočítejte dvojný integrál*

$$I = \iint_M \sin \sqrt{x-2} \, dx dy,$$

kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y^2 + 2, x \leq 3\}.$$

Řešení:

Výpočet provedeme ve dvou krocích. Nejprve identifikujeme obor integrace, tj. množinu M . Teprve pak přistoupíme k samotnému výpočtu zadaného integrálu.

a) Identifikace a grafické znázornění množiny M

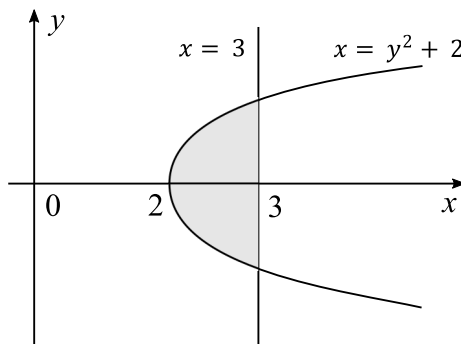
Abychom zvolili správnou metodu výpočtu daného dvojného integrálu, musíme vědět, jak vypadá množina M a jak si ji vhodně zapsat. Dle zadání jde o množinu bodů v rovině, které splňují dvě podmínky

$$\begin{aligned} x &\geq y^2 + 2 \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

- První podmínka $x \geq y^2 + 2$ popisuje vztah mezi proměnnými x a y a je ve tvaru nerovnosti. Půjde tedy o nějakou množinu bodů v rovině, kterou bude ohraničovat křivka popsána rovnicí $x = y^2 + 2$. Jedná se o rovnici paraboly, jejíž osa je shodná s x -ovou souřadnicovou osou a jejíž vrchol je v bodě $(2, 0)$. Tato parabola rozděluje rovinu $\mathbb{R}^2$ na dvě části. To, která z nich vyhovuje nerovnosti $x \geq y^2 + 2$, zjistíme jednoduše. Vybereme si jeden bod z roviny (který neleží na naší parabole) a jeho souřadnice dosadíme do nerovnosti. Pokud bude nerovnost splněna, trefili jsme se do té části roviny, kterou hledáme. Často se volí např. bod $(0, 0)$. Když dosadíme tento bod do nerovnosti $x \geq y^2 + 2$, získáme výrok $0 \geq 2$. Tento výrok je nepravdivý, bod $(0, 0)$ tedy neleží v množině, kterou hledáme. Z toho plyne, že body splňující danou nerovnost budou ležet „vpravo“ od naší paraboly nebo na ní.
- Druhá podmínka $x \leq 3$ je opět ve tvaru nerovnosti. Všimněme si, že zde vystupuje pouze jedna proměnná. Tato podmínka tedy stanovuje omezení pouze na x -ovou souřadnici bodů, zatímco y -ová souřadnice může být libovolná. Půjde tedy o body, jejichž x -ová souřadnice je menší nebo rovna číslu 3. Znázorníme-li tento požadavek graficky, půjde o body ležící vlevo od přímky $x = 3$ nebo na ní. Jedná se o přímku kolmou na osu x , která prochází bodem $(3, 0)$.

Body z množiny M musí splňovat obě výše diskutované podmínky. Abychom získali množinu M , musíme najít průnik obou získaných množin. Množina M

je tedy uzavřená množina (obsahuje celou svou hranici) bodů, které leží vpravo od paraboly $x = y^2 + 2$ a zároveň vlevo od přímky $x = 3$. Grafickou podobu množiny zachycuje obrázek 3.



Obrázek 3: Množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y^2 + 2, x \leq 3\}$

Abychom mohli spočítat integrál přes množinu M , je potřeba ji vyjádřit ve speciálním tvaru, tj. elementárně vzhledem k proměnné x nebo elementárně vzhledem k proměnné y . Zkusíme si množinu zapsat oběma způsoby a poté se rozhodneme, který z tvarů použijeme pro výpočet integrálu I . Platí

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2 \leq x \leq 3, -\sqrt{x-2} \leq y \leq \sqrt{x-2}\} \quad (11)$$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1, y^2 + 2 \leq x \leq 3\}. \quad (12)$$

b) Výpočet dvojnásobného integrálu

Vzhledem k tvaru integrované funkce využijeme pro výpočet integrálu zápis množiny M ve tvaru (11), tj. elementárně vzhledem k x . Protože jsou splněny předpoklady Fubiniovy věty, můžeme s její pomocí přepsat zadaný dvojný integrál do podoby integrálu dvojnásobného, tj.

$$\iint_M \sin \sqrt{x-2} \, dx \, dy = \int_2^3 \left(\int_{-\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x-2}} \sin \sqrt{x-2} \, dy \right) dx.$$

Při výpočtu dvojnásobného integrálu začínáme integrálem vnitřním a teprve pak se věnujeme integrálu vnějšímu. V našem případě tedy začínáme integrací podle proměnné y , tj.

$$\int_2^3 \left(\int_{-\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x-2}} \sin \sqrt{x-2} \, dy \right) dx = \int_2^3 [y \cdot \sin \sqrt{x-2}]_{-\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x-2}} dx.$$

Odtud po dosazení obou mezí integrace a malé úpravě přicházíme k rovnosti

$$I = \int_2^3 2\sqrt{x-2} \sin \sqrt{x-2} \, dx.$$

Dostali jsme se tak k určitému integrálu funkce jedné proměnné. Volbou substituce $t = \sqrt{x-2}$ (a přepočítáním mezí integrace) převedeme integrál do tvaru

$$I = \int_0^1 4t^2 \sin t \, dt.$$

Na tento integrál uplatníme dvakrát metodu *per partes* a dostáváme se k výsledku

$$I = 4 \cos(1) + 8 \sin(1) - 8.$$

Příklad 1.16.9 *Určete interval absolutní konvergence, obor konvergence a součet řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n}.$$

Řešení:

Jedná se o mocninnou řadu. Abychom s ní mohli dále pracovat, převedeme si ji do standardního tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n} = \left(x - \frac{1}{3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)5^n} \left(x - \frac{1}{3}\right)^n.$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že řada má střed konvergence v bodě $x_0 = \frac{1}{3}$. Nalezení středu konvergence je prvním krokem k určení intervalu absolutní konvergence.

a) Interval absolutní konvergence

Interval absolutní konvergence mocninné řady (dále budeme označovat jako *IAK*) určíme pomocí středu konvergence x_0 a poloměru konvergence ρ . Platí

$$IAK = (x_0 - \rho, x_0 + \rho).$$

Poloměr konvergence ρ stanovíme jako převrácenou hodnotu k číslu λ , které si spočítáme pomocí limity

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Protože v našem případě platí $a_n = \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)5^n}$, po dosazení dostáváme

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-3)^{n+2}(n+1)5^n}{(-3)^{n+1}(n+2)5^{n+1}} \right| = \frac{3}{5} \quad \text{a tedy} \quad \rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{3}.$$

Nic víc pro stanovení intervalu absolutní konvergence nepotřebujeme. Platí $IAK = \left(-\frac{4}{3}, 2\right)$.

b) Obor konvergence

Víme, že na intervalu $IAK = (-\frac{4}{3}, 2)$ zadaná řada konverguje absolutně. Dále víme, že na sjednocení intervalů $(-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (2, \infty)$ řada diverguje. Poněkud tajemné zůstávají body $-\frac{4}{3}$ a 2 . V těchto dvou bodech řada může konvergovat, nebo divergovat. Je proto nutné je prozkoumat zvlášť. V každém z těchto dvou bodů vyšetříme konvergenci naší mocninné řady samostatně.

- Bod $x = -\frac{4}{3}$ dosadíme do funkční řady a obdržíme číselnou řadu ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n+1}.$$

Abychom zjistili, zda zadaná mocninná řada konverguje v bodě $x = -\frac{4}{3}$, musíme vyšetřit konvergenci takto získané číselné řady. K tomu použijeme například srovnávací kritérium. Platí

$$\frac{5}{n+1} \geq \frac{5}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2n}$ je tedy minorantou k řadě $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n+1}$. Minorantní řadu lze dále upravit do tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2n} = \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ je tzv. harmonická řada a víme o ní, že tato řada diverguje a má součet nekonečno.

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, pak i řada $\frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Diverguje-li minorantní řada k řadě $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n+1}$, pak diverguje i řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n+1}$. Odtud můžeme učinit závěr, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n}$ diverguje v bodě $x = -\frac{4}{3}$.

- Analogicky vyšetříme bod $x = 2$. Po dosazení bodu do mocninné řady, dostáváme řadu číselnou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{n+1}.$$

Jedná se o alternující řadu, která může konvergovat absolutně nebo relativně (samozřejmě může i divergovat). Proto nejprve vyšetříme absolutní konvergenci, tj. konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 5}{n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n+1}.$$

Tuto řadu jsme již prozkoumali dříve a zjistili jsme, že diverguje. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{n+1}$ tedy jistě nebude konvergovat absolutně, ale může konvergovat relativně. K prozkoumání relativní konvergence alternující řady typu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ použijeme Leibnizovo kritérium. Lze snadno ukázat, že

1. $a_n = \frac{5}{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
2. posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{5}{n+1}\right\}$ je nerostoucí ($a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$)
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$.

Tyto tři výše uvedené vlastnosti jsou postačující podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{n+1}$. Tato řada tedy konverguje relativně. Odtud plyne, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n}$ konverguje relativně v bodě $x = 2$.

- Závěry plynoucí z předchozích úvah využijeme pro stanovení oboru konvergence mocninné řady (*OK*). Do oboru konvergence budou patřit všechny body, ve kterých mocninná řada konverguje (ať už absolutně, nebo relativně). Tedy platí

$$OK = \left(-\frac{4}{3}, 2\right).$$

c) Součet mocninné řady

Posledním úkolem je na intervalu IAK najít součtovou funkci $s(x)$, tj. funkci, pro kterou bude platit $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n}$. Součet naší řady hledáme pouze na intervalu IAK , protože na tomto intervalu řada konverguje absolutně a také stejnoměrně. Stejnoměrná konvergence nám navíc dovolí provádět různé operace, např. derivovat mocninnou řadu člen po členu, tj. bude platit

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1-3x)^{n+1}}{(n+1)5^n} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^n (-3)}{5^n} = -3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-3x}{5} \right)^n.$$

Obdrželi jsme tak geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1-3x}{5}$ a prvním členem -3 . Pro $x \in IAK$ platí nerovnost $|q| < 1$, což stačí k tomu, aby tato geometrická řada konvergovala a měla součet. Součet takové geometrické řady se spočítá jako podíl prvního členu řady a hodnoty $1 - q$. Odtud plyne

$$s'(x) = \frac{-3}{1 - \frac{1-3x}{5}} = -\frac{15}{4+3x}.$$

Hledanou funkci $s(x)$ pak získáme integrací funkce $s'(t)$ na intervalu $\langle x_0, x \rangle$, tj. bude platit

$$s(x) = \int_{\frac{1}{3}}^x -\frac{15}{4+3t} dt.$$

Po vypočtení tohoto jednoduchého integrálu se dostáváme k hledané součtové funkci

$$s(x) = 5 \ln \left(\frac{5}{|4+3x|} \right) = 5 \ln \left(\frac{5}{4+3x} \right), \quad \text{kde } x \in IAK = \left(-\frac{4}{3}, 2\right).$$

Literatura

- Demidovič, B. P.: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, Havlíčkův Brod, 2003.
- Kojecká, J., Rachůnková, I.: *Řešené příklady z matematické analýzy III*, 3. vyd., Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 1998.
- Kouřilová, P., Pavlačková, M.: *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2013.
- Mádrová, V.: *Matematická analýza I*, 2. vyd., Univerzita Palackého, Olomouc, 2004.
- Mádrová, V., Marek, J.: *Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I*, Univerzita Palackého, Olomouc, 2004.
- Moučka, J., Rádl, P.: *Matematika pro studenty ekonomie*, Grada, Praha, 2010.
- Mračnová, L.: *Parciální derivace funkce více proměnných – princip řešení a sbírka příkladů*, 2013, Bakalářská práce, Univerzita Palackého, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.
- Rektorys, K.: *Přehled užití matematiky 1*, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1988.
- Rozenský, Z., Martan, F., Brabec, J.: *Matematická analýza 1*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1989.
- Šušková, M.: *Dvojný integrál – princip řešení a sbírka příkladů*, 2013, Bakalářská práce, Univerzita Palackého, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.
- Složilová, E.: *Mocninné řady – sbírka příkladů*, 2013, Bakalářská práce, Univerzita Palackého, Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky.

Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.

Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Co bylo na písemce?

Sbírka příkladů ke kurzu Matematika 2

Výkonný redaktor prof. RNDr. Karel Lemr, Ph.D.

Odpovědný redaktor Bc. Otakar Loutocký

Technická redakce autorky

Návrh obálky Bc. Karina Pavlíková

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci

Křížkovského 8, 771 47 Olomouc

www.vydavatelstvi.upol.cz

www.e-shop.upol.cz

vup@upol.cz

1. vydání

Olomouc 2018

Ediční řada – Studijní literatura

ISBN 978-80-244-5420-7

Publikace k dispozici zdarma

VUP 2018/0347