Zkouška z předmětu KMA/PST

1. Anotace předmětu

Náhodné jevy, pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost. Nezávislé náhodné jevy. Náhodná veličina, distribuční funkce. Diskrétní a absolutně spojitá náhodná veličina. Číselné charakteristiky náhodné veličiny. Základní rozdělení pravděpodobností. Náhodný vektor, distribuční funkce náhodného vektoru. Diskrétní a absolutně spojitý náhodný vektor, číselné charakteristiky náhodného vektoru. Marginální rozdělení, nezávislé náhodné veličiny, podmíněné rozdělení. Rozdělení χ^2, t, F. Slabý zákon velkých čísel, klasické limitní věty teorie pravděpodobnosti. Úvod do metod Monte Carlo (generování hodnot náhodné veličiny s daným rozdělením, příklady užití metod Monte Carlo).

2. Průběh zkoušky

- Písemná část teoretická: student(ka) si náhodně vylosuje dvě otázky, obsahující stěžejní pojmy učiva (viz seznam níže). Ty musí být zcela bezchybně zodpovězeny, aby mohla být písemná část zkoušky úspěšně zakončena. Rozsah cca 5 - 10 minut.
- Ústní část: student(ka) si náhodně vylosuje dvě teoretické otázky, pokrývající učivo celého semestru, plus důkaz či odvození vybraného tvrzení (viz seznam níže). Na přípravu odpovědí bude 40 minut, na následné zodpovězení dalších 20 minut. Při jejich přípravě může být využit podpůrný materiál, uvedený níže; je přitom nutno zareagovat na každou z nich. Důraz bude kladen zejména na porozumění tématu. Ústní část nebude dokončena, když student(ka) prokáže neznalost základních pojmů předmětu (viz níže) a jejich souvislostí nebo základních matematických pojmů a jejich vlastností (v rozsahu sylabů předmětů Matematická analýza 1, 2 a Lineární algebra I).

3. Hodnocení zkoušky

Rozhodující vliv na stanovení celkové známky budou mít obě teoretické otázky, samozřejmě s přihlédnutím k důkazu, resp. odvození vybraného tvrzení. Do známky jsou zahrnuty i výsledky zápočtových testů.

4. Základní pojmy

... jsou zejména jev, operace s jevy, jevové pole, náhodný jev, pravděpodobnost, klasická pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost, nezávislé náhodné jevy, náhodná veličina, rozdělení pravděpodobností, distribuční funkce, diskrétní a spojité rozdělení pravděpodobností, střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny, α-kvantil, náhodný vektor, marginální rozdělení pravděpodobností, nezávislost náhodných veličin, podmíněná pravděpodobnostní funkce a hustota, podmíněná střední hodnota a rozptyl, střední hodnota náhodného vektoru, kovariance, korelační koeficient, varianční matice, korelační matice, konvergence podle pravděpodobnosti.

Poznámka. Tento výčet neznamená, že jsou ostatní pojmy a vlastnosti méně důležité. Pouze vyzdvihuje ty z nich, při jejichž neznalosti (a neznalosti odpovídajících souvislostí) se není dále o čem bavit.

5. Zkoušené důkazy a odvození

- vlastnosti pravděpodobnosti v1 - v8
- ověření axiomů pravděpodobnosti u klasické pravděpodobnosti
- věta 1.2, Bayesova věta, věta 1.6 - 1.9, věta 1.14
- vlastnosti distribuční funkce V_1, V_2, $V_3a)$, V_4, věta 2.4
- Čebyševova nerovnost, Věta 2.8
- odvození střední hodnoty a rozptylu u alternativního, binomického, rovnoměrného a normálního rozdělení
- věta o marginálním rozdělení, Věta 3.11, 3.12a), 3.15, 3.18
- vlastnosti 1 - 5 kovariance a korelačního koeficientu
- věta 3.19, 3.20, 3.21, 3.23 - 1. krok
- Čebyševova věta, Bernoulliho věta, věta o aritmetickém průměru
- integrální věta Moivreova - Laplaceova

- věta 9.1

V Olomouci, dne 30. 11. 2023

prof. RNDr. Karel Hron, Ph.D.

6. Doplněk: vybrané vzorce z KMA/PST(1) (podpůrný materiál)

$$\mathsf{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad \mathsf{P}(X=k)=(1-p)^k p$$

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & x>0\end{cases}$$

$$g_n(y)=\begin{cases}0, & \text{pro}\ \ y\le 0,\\ \dfrac{y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, & \text{pro}\ \ y>0.\end{cases}\qquad h_n(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{z^{n-1}e^{-\frac{z^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})}, & z>0.\end{cases}$$

$$f_n(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad t\in R^1$$

$$g(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\Big(\dfrac{n_1}{n_2}\Big)^{\frac{n_1}{2}}y^{\frac{n_1}{2}-1}\Big(1+\dfrac{n_1}{n_2}y\Big)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\qquad \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n \mathsf{A}_i\Big)=\sum_{i=1}^n \mathsf{P}(\mathsf{A}_i)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n \mathsf{P}(\mathsf{A}_i\cap\mathsf{A}_j)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^n \mathsf{P}(\mathsf{A}_i\cap\mathsf{A}_j\cap\mathsf{A}_k)-\cdots+(-1)^{n-1}\mathsf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n \mathsf{A}_i\Big).$$

$$p_Y(y_n)=p_X[\varphi^{-1}(y_n)]\quad g_Y(y)=f_X[\varphi^{-1}(y)]\,|[\varphi^{-1}(y)]'|,\ \forall y\in R^1$$

$$\alpha_3(X)=\frac{\mathsf{E}[(X-\mathsf{E}(X))^3]}{(\sqrt{\mathrm{var}(X)})^3}\quad \alpha_4(X)=\frac{\mathsf{E}[(X-\mathsf{E}(X))^4]}{(\sqrt{\mathrm{var}(X)})^4}-3$$

$$\mathsf{P}(a_1<X_1\le b_1,\dots,a_n<X_n\le b_n)=\sum(-1)^{\sum\varepsilon_j}F_{\mathbf{X}}(c_1,\dots,c_n)\ge 0$$

$$\mathsf{P}(\mathbf{X}=\mathbf{x}_m)=\mathsf{P}(X_1=x_{1m},X_2=x_{2m},X_3=x_{3m})=$$
$$=\binom{r}{x_{1m}}\binom{r-x_{1m}}{x_{2m}}\binom{r-x_{1m}-x_{2m}}{x_{3m}}(p_1)^{x_{1m}}(p_2)^{x_{2m}}(p_3)^{x_{3m}}$$

$$\mathsf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}, & x_1 + \dots + x_k = n, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\Big[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big]\Big\}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\mathbf{V})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\{x_2:\varphi(x_1,x_2)\le y\}} f_2(x_2)dx_2\right] f_1(x_1)dx_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{\{x_1:\varphi(x_1,x_2)\le y\}} f_1(x_1)dx_1\right] f_2(x_2)dx_2, \quad y \in R^1. \end{aligned}$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y-t)f_1(t)\,dt \quad g(y) = \int_0^{\infty} x f_1(yx) f_2(x)\,dx, \quad \forall y \in R^1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big) &= \sum_{j=1}^n \operatorname{var}(X_j) + 2\sum\sum_{i<j}\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \operatorname{var}(X_j) + \sum\sum_{i\ne j}\operatorname{cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

$$I = (r-k)(b-a)\int_0^1 \frac{h[a+(b-a)z]-k}{r-k}\,dz + (b-a)k$$

$$Y_1 = \sqrt{-2\ln(X_1)}\cos(2\pi X_2), \qquad Y_2 = \sqrt{-2\ln(X_1)}\sin(2\pi X_2)$$

$$x_1 = \begin{cases} u & \text{s pravděpodobností } p = \min\left(\exp\{\frac{h(u)-h(x_0)}{T}\}, 1\right), \\ x_0 & \text{s pravděpodobností } 1-p. \end{cases}$$