MATEMATICKÁ NEKONFERENCE

OD ROVNIC K REALITĚ

28.1.2026

Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci

O nás

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

- Výzkum v oblasti diferenciálních rovnic, optimalizace a statistiky
- Organizace bakalářských, navazujících i doktorských studijních programů zaměřených na aplikovanou matematiku
- Úzká spolupráce s průmyslem prostřednictvím Technologické platformy

O nás

<u>Bakalářské studium</u>

Aplikovaná matematika

- specializace Data Science
- specializace Průmyslová matematika
- specializace Matematika v ekonomické praxi
- specializace Matematika pro udržitelné inovace

<u>Magisterské studium</u>

- Aplikovaná matematika

O nás

Spolupráce s průmyslem – Technologická platforma KMA

- Řešení praktických projektů pocházejících z průmyslu
- Transfer znalostí do praxe
- Zapojení studentů pod supervizí akademiků
- Pravidelná setkávání s průmyslovými partnery na Diskuzním klubu KMA
- Aktivní členství v České asociaci umělé inteligence

O nás

<u>Spolupráce se středními školami</u>

- Nabídka bezplatných přednášek pro studenty SŠ
- Vedení studentů v rámci programů Badatel a SOČ

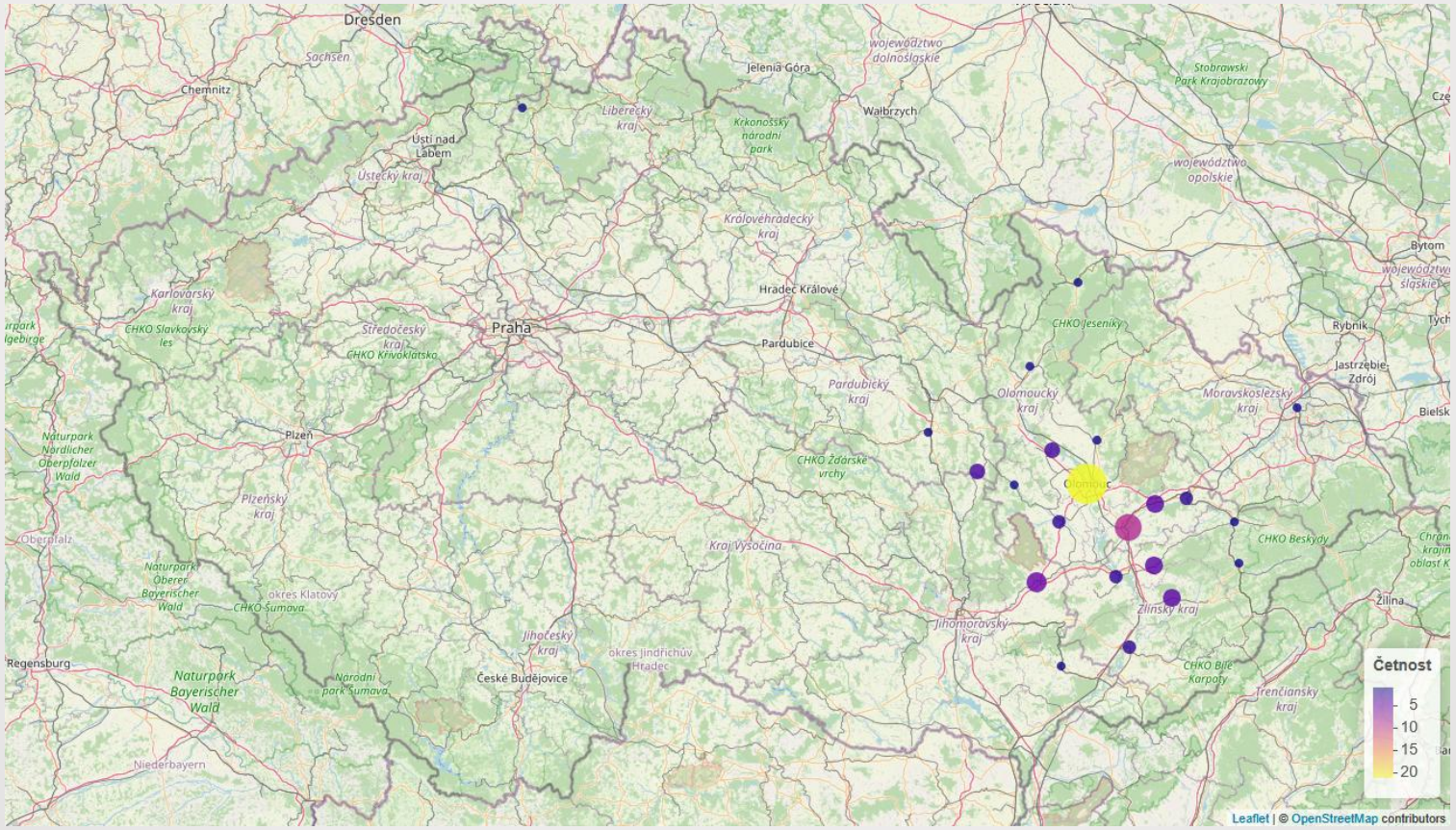
  https://www.prf.upol.cz/badatel/
- Studium nanečisto – program Newton

  https://www.prf.upol.cz/verejnost/pro-skoly/program-newton/
- Nabídka kurzů DVPP

  https://kma.upol.cz/zajemci-o-studium/kurzy-dalsiho-vzdelavani-pedagogickych-pracovniku/

O vás

Na kurz DVPP bylo registrováno 71 učitelů z 31 škol.



K čemu ta matika je?

doc. RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.

docent na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky

Matematické modelování

Digitální dvojče

AI všude kolem nás

Matematické modelování

aneb jak matematika popisuje svět
… a proto je dobré o ní něco vědět

Matematické modelování

Matematické kyvadlo

- Newtonův zákon

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

- Tečná složka síly

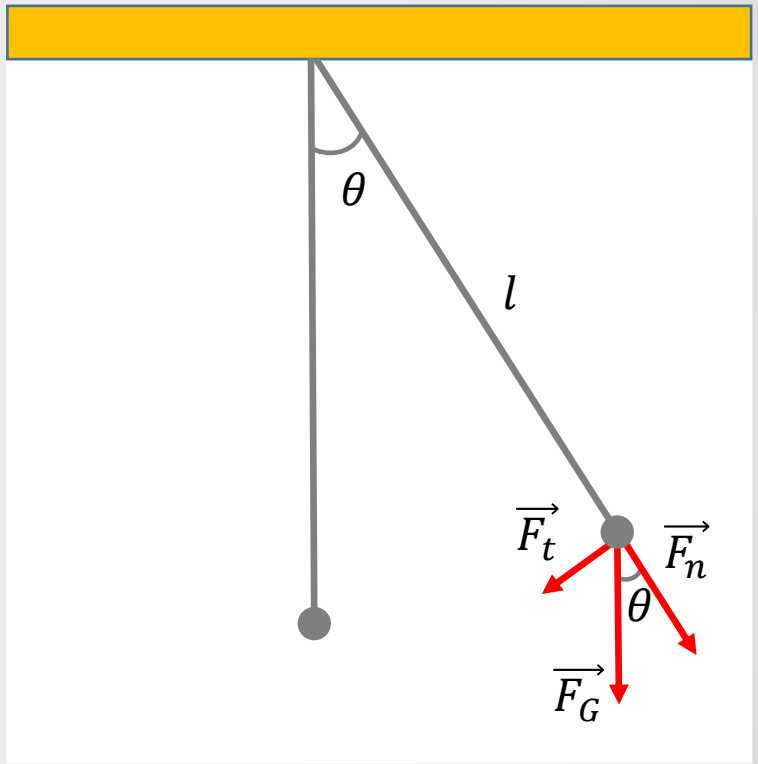
$$F_t = m\,a_t = -\,mg\sin\Theta$$

- Tečné zrychlení

$$a_t = \frac{dv}{dt} = l\frac{d\omega}{dt} = l\frac{d^2\Theta}{dt^2}$$

- Rovnice matematického kyvadla

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\Theta = 0$$



Matematické modelování

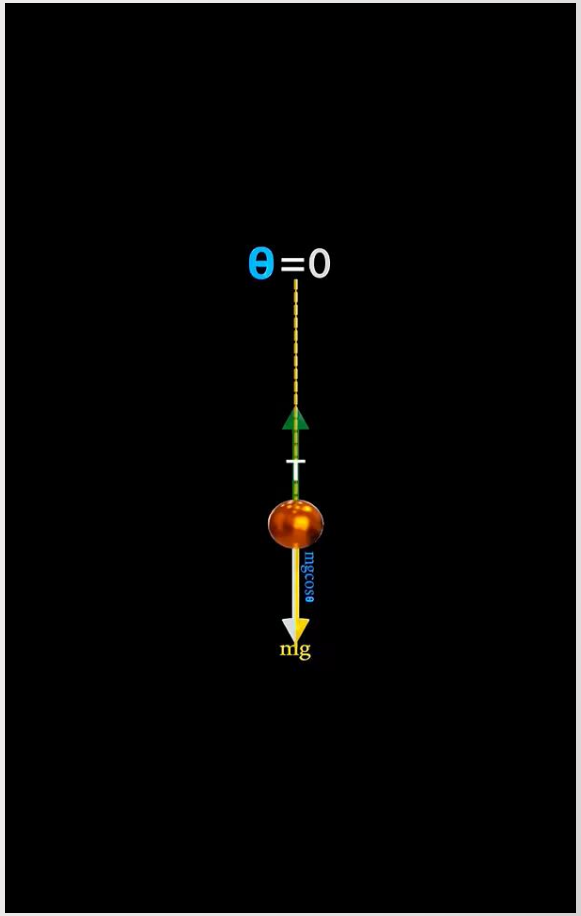
Numerická simulace kyvadla

- Rovnice kyvadla: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$
- Soustava rovnic 1. řádu: $$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$ $$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$
- Eulerova metoda:

$$\frac{d}{dt}f(t) \approx \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \Rightarrow f(t+h) \approx f(t)+h\,\frac{d}{dt}f(t)$$

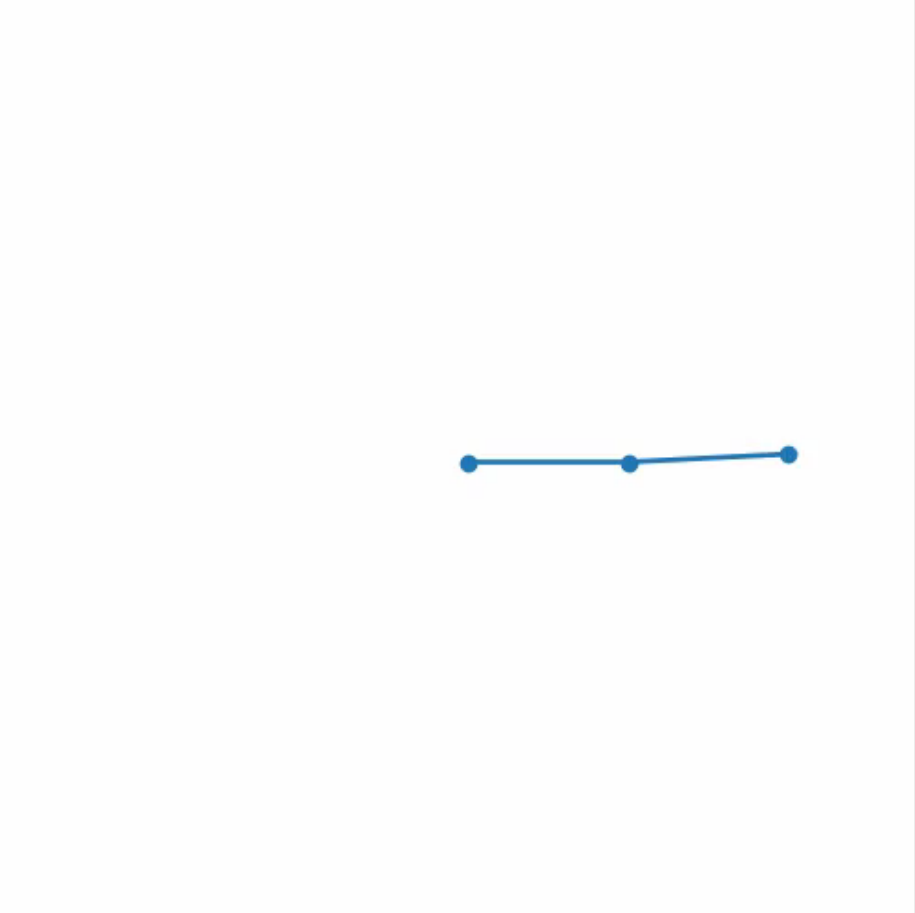
- Eulerovo schéma: $$\theta(t+h) = \theta(t) + h\omega(t)$$

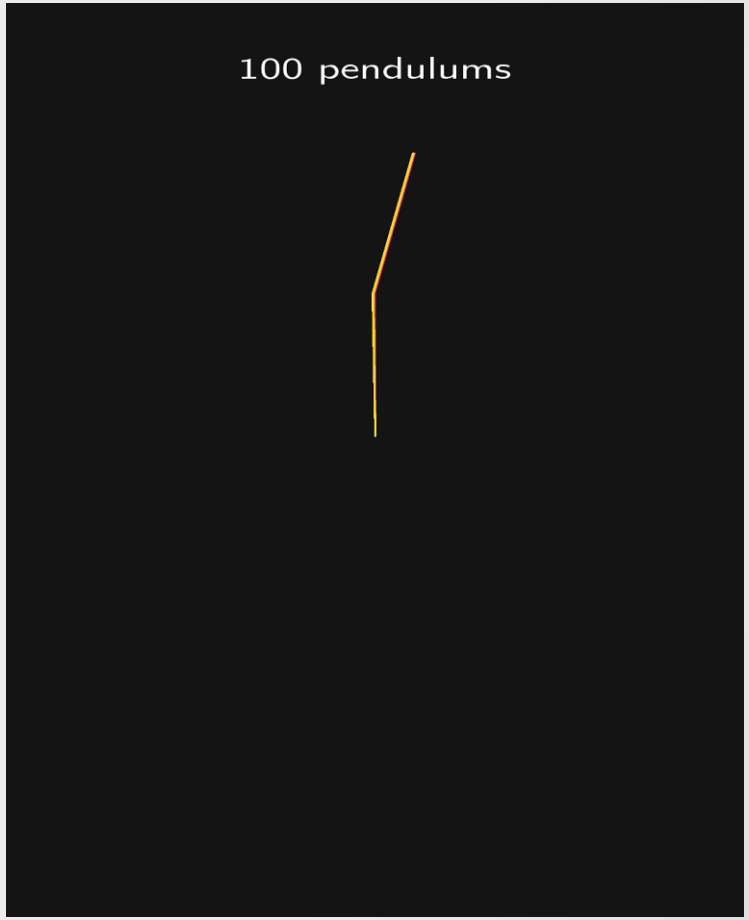
$$\omega(t+h) = \omega(t) - h\frac{g}{l}\sin\theta(t)$$



Matematické modelování

Dvojité kyvadlo a chaos

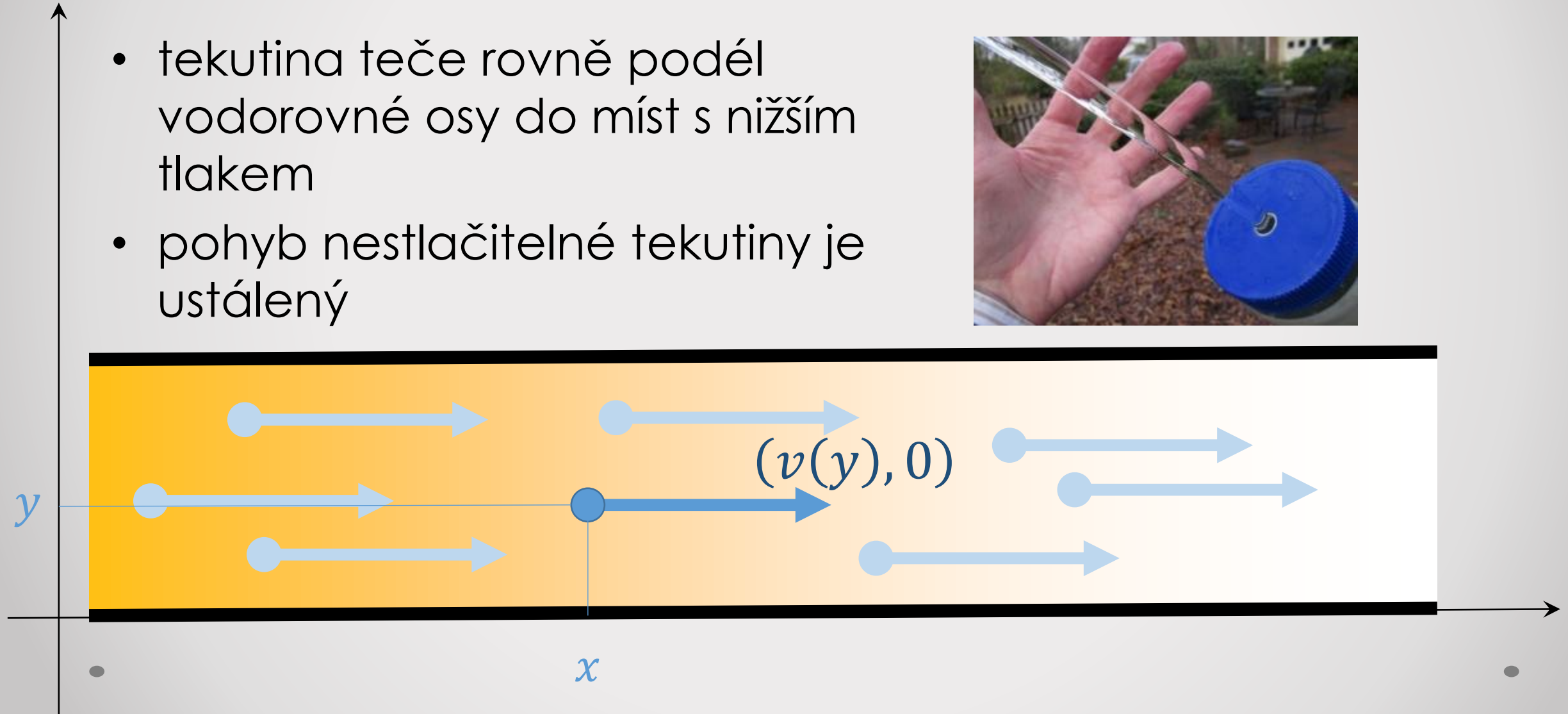




Matematické modelování

2D laminární proudění - úvod

- tekutina teče rovně podél vodorovné osy do míst s nižším tlakem
- pohyb nestlačitelné tekutiny je ustálený



Matematické modelování

2D laminární proudění - rovnice

- viskózní síly jsou přímo úměrné změně tlaku
- tlak lineárně klesá ve směru osy x: $p = p(x) = Px + p_0, \; P < 0$

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2}(y) = \frac{dp}{dx}(x), \qquad \mu > 0$$

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2}(y) = P$$

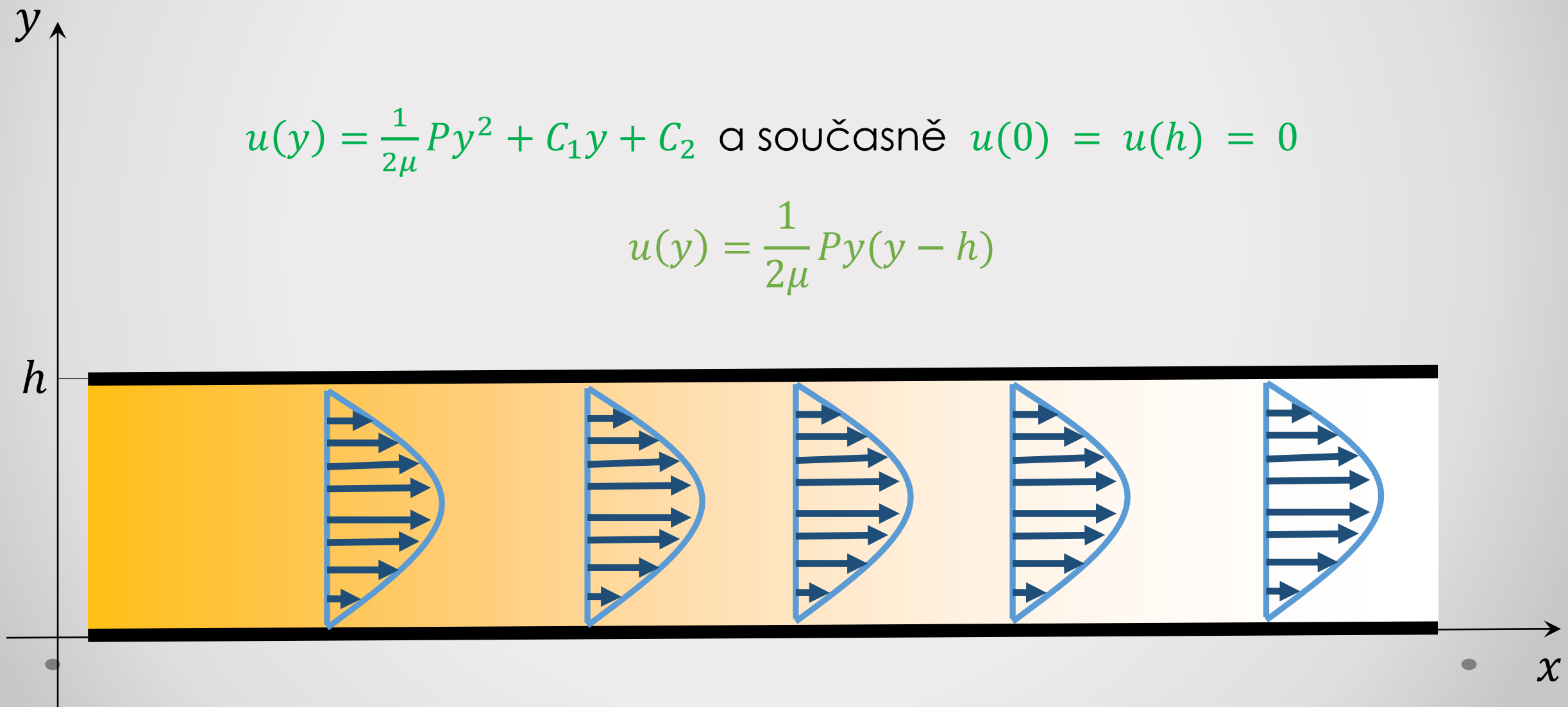
obyčejná diferenciální rovnice!

Matematické modelování

2D laminární proudění - řešení

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} P y^2 + C_1 y + C_2 \quad \text{a současně} \quad u(0) = u(h) = 0$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} P y (y - h)$$

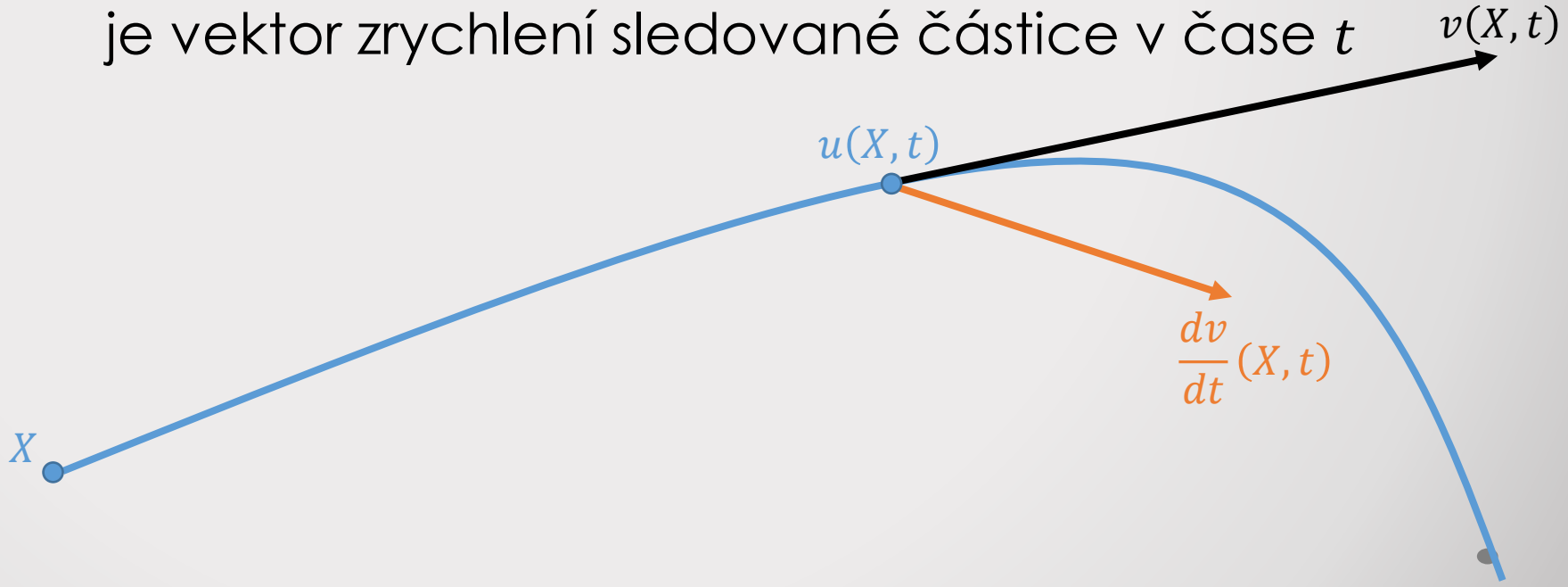


Matematické modelování

Navierovy-Stokesovy rovnice

<u>Modelování pohybu tekutiny/nestlačitelného plynu</u>:

- $X = (X_1, X_2, X_3) \in R^3$ je počáteční pozice sledované částice
- $u(X,t) \in R^3$ je pozice sledované částice v čase t
- $v(X,t) \in R^3$ je vektor rychlosti sledované částice v čase t
- $\frac{dv}{dt}(X,t) \in R^3$ je vektor zrychlení sledované částice v čase t



Matematické modelování

Navierovy-Stokesovy rovnice

(tři) rovnice hybnosti

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho f$$

2. Newtonův zákon

$F = ma$

Gradient tlaku:

"tlak okolní tekutiny tlačí na částici"

Viskózní síly:

- Okolní částice mají jinou rychlost
- Rychlejší brzdí
- Pomalejší urychluje

Vnější objemové síly, např:

- Gravitace
- Coriolisova síla
- Elektromagnetické síly

(jedna) rovnice kontinuity

$$\nabla \cdot v = 0$$

Matematické modelování

Navierovy-Stokesovy rovnice

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right) + \rho f_1$$

$$\rho \frac{dv_2}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right) + \rho f_2$$

$$\rho \frac{dv_3}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right) + \rho f_3$$

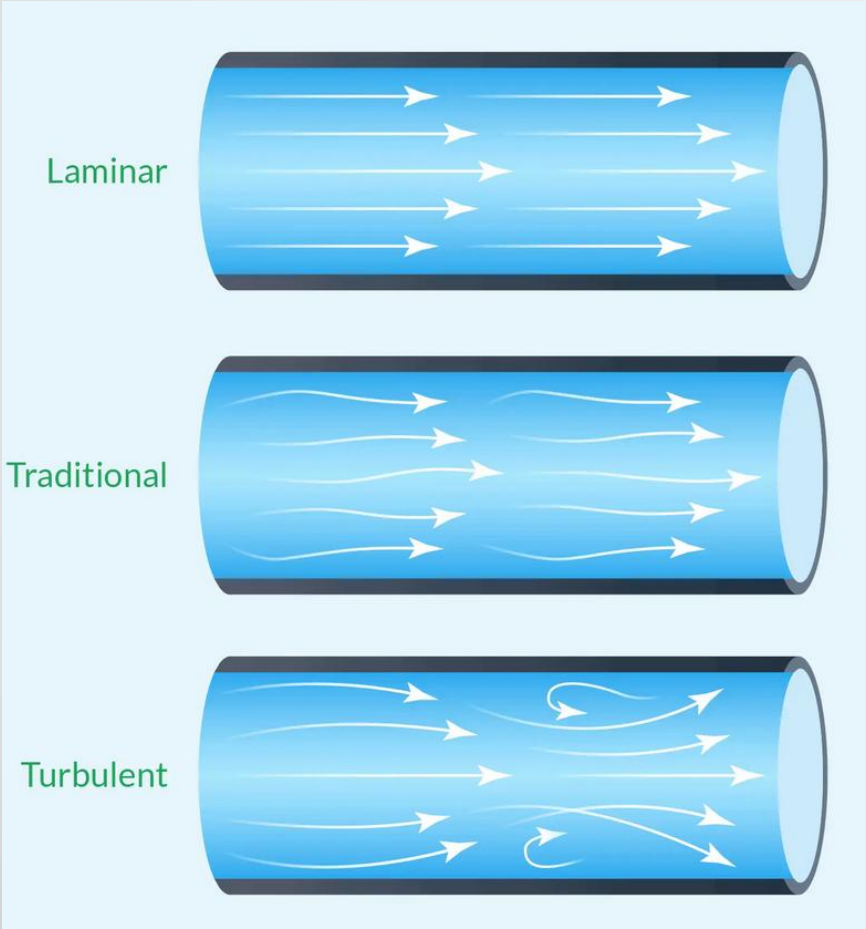
rovnice hybnosti

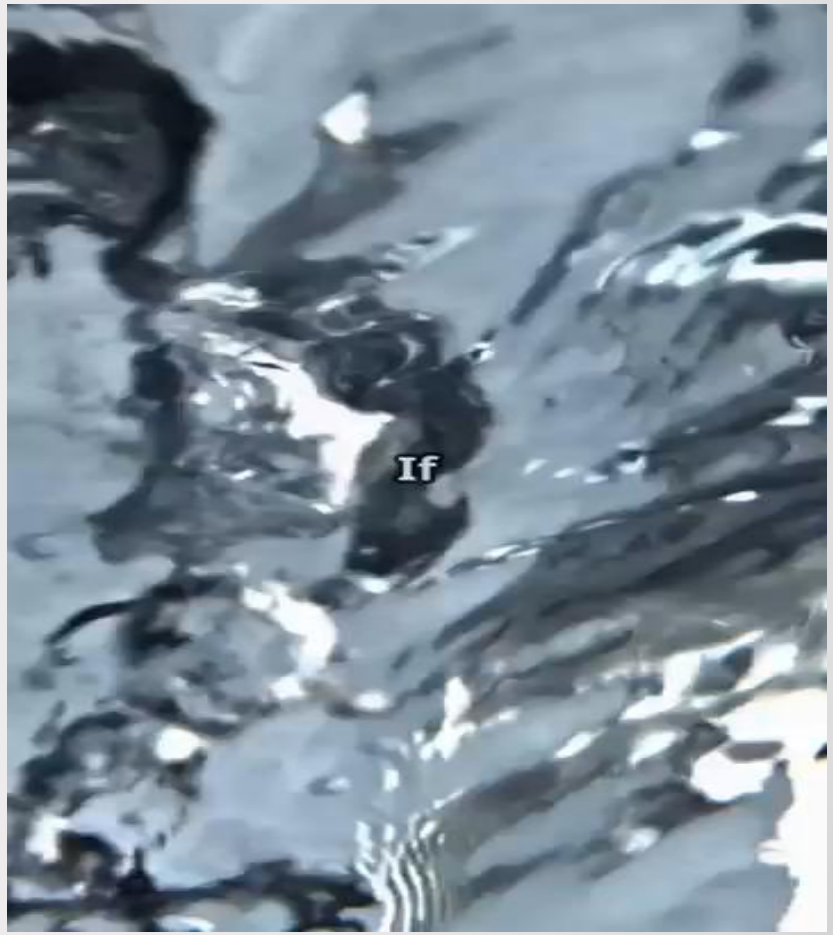
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

rovnice kontinuity

Matematické modelování

Typy proudění vody

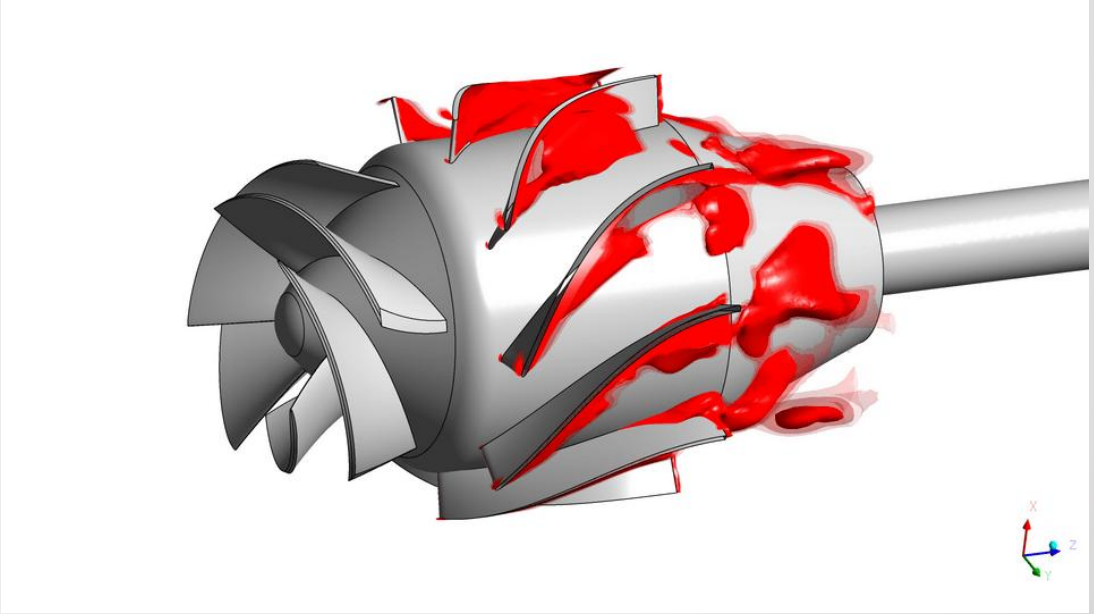




Matematické modelování

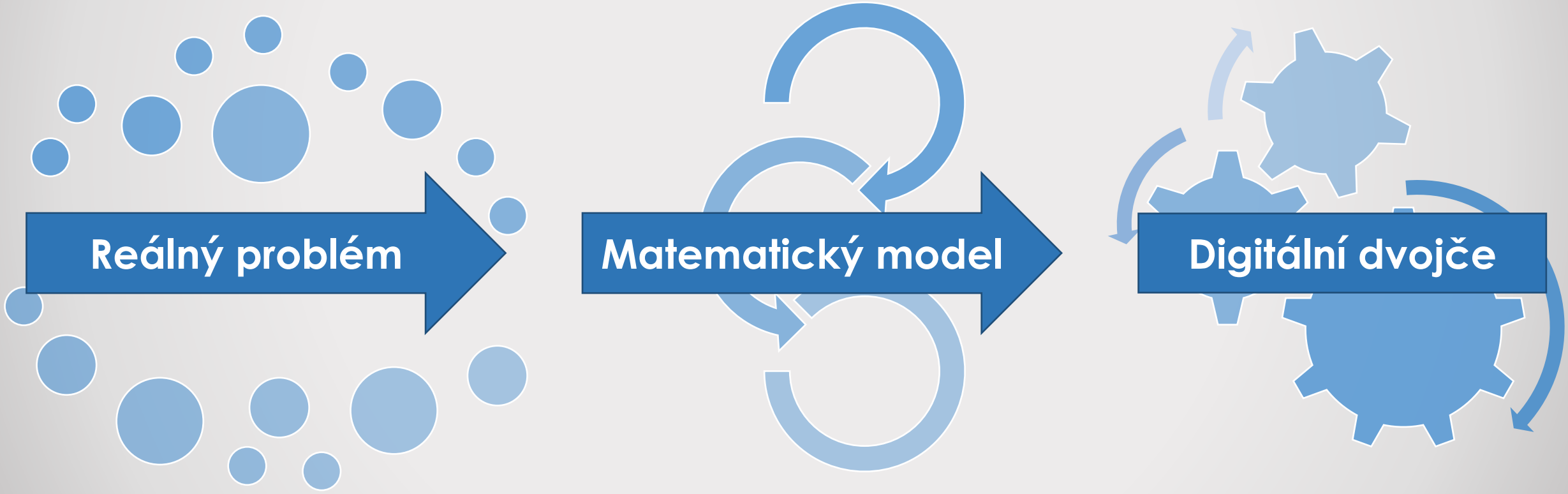
A kde to využijeme?

- Aerodynamika
- Hydrodynamika
- Meteorologie
- Biomedicína
- Geofyzika
- Počítačová grafika



Matematické modelování

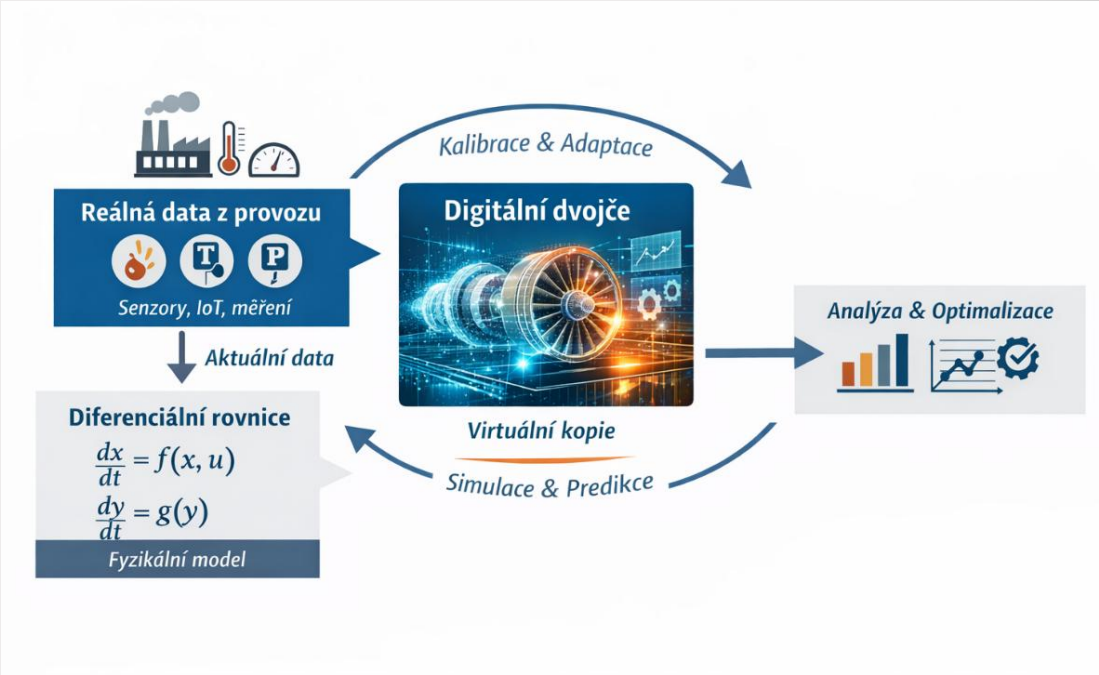
Od modelování k digitálnímu dvojčeti



Digitální dvojče

- Virtuální kopie reálného objektu
- Propojení s reálným světem
- Simulace, optimalizace, predikce
- Odpověď na otázku:

  Co se stane když?



Digitální dvojče
Vztah k neuronovým sítím

- Neuronová síť – mozek bez těla
  - matematický model
  - učí se z dat
  - nereprezentuje konkrétní objekt
  - nemá části, nezná vazby

- Digitální dvojče – tělo + smysly + mozek
  - je svázáno s originálním objektem
  - má historii a aktuální stav
  - kombinuje data, pravidla, modely
  - obsahuje komponenty, zná vazby

Digitální dvojče

Aplikace

- Průmysl
  - Monitorování strojů a výrobních linek
  - Predikce poruchovosti
  - Optimalizace výrobních procesů
- Doprava
  - Optimalizace tras
  - Spotřeba paliva
  - Plánování údržby
- Budovy a města
  - Optimalizace energetické náročnosti
  - Řízení dopravy v reálném čase
  - Simulace požáru
- Energetika
  - Řízení elektráren
  - Analýza rizik a poruch
  - Optimalizace provozu

Matematika za umělou inteligencí

Co si představit pod umělou inteligencí?

Definice:

Umělá inteligence

je schopnost strojů (počítačů) vykonávat lidské činnosti jako je učit se, přemýšlet, řešit úlohy, vnímat a rozhodovat.

Použití:

Zpracování jazyka

analýza a generování lidského jazyka

Počítačové vidění

zpracování a analýza obrazových dat

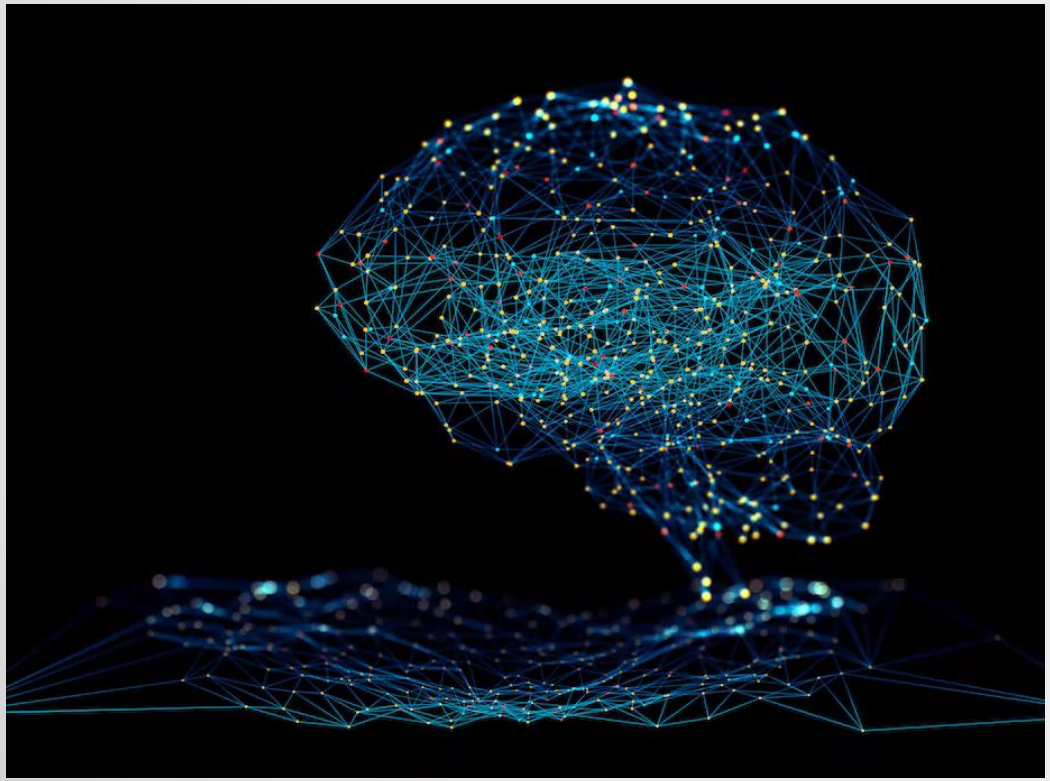
Strojové učení

analýza dat a predikce

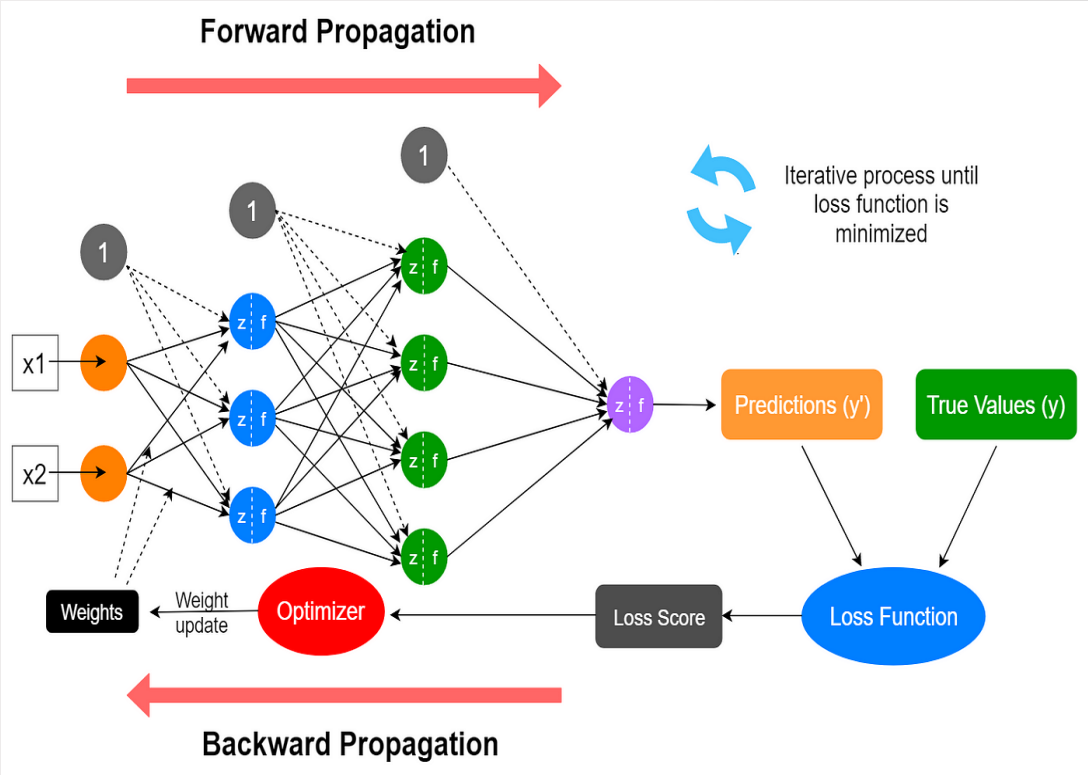
Matematika za umělou inteligencí

Neuronové sítě

Lidský mozek



Model neuronové sítě

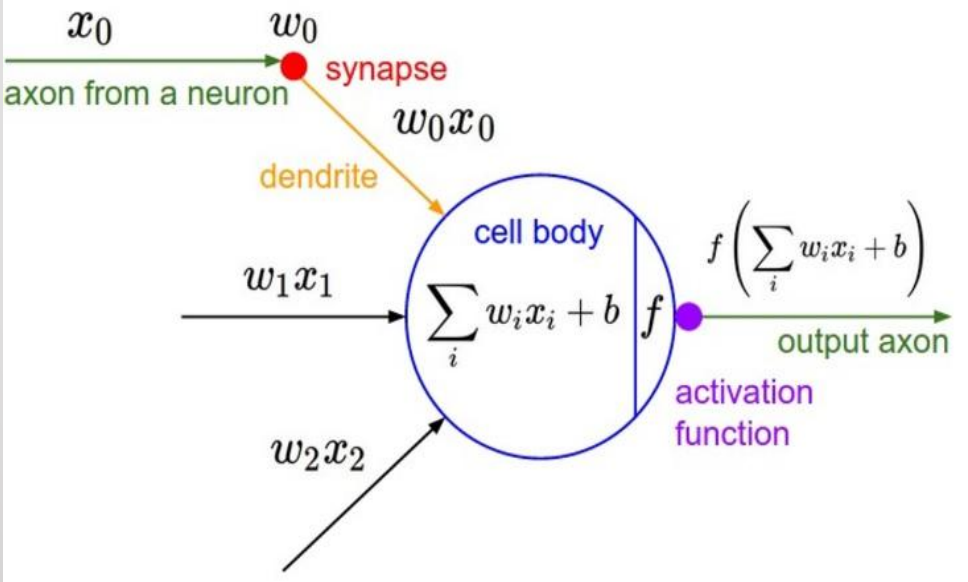


Matematika za umělou inteligencí

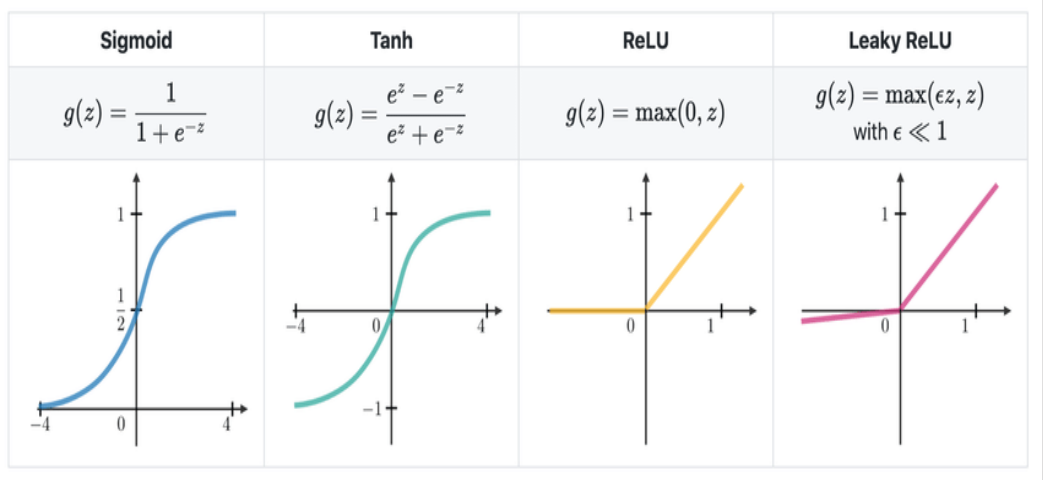
Neuronové sítě

Jak funguje matematický model neuronu?

Neuron



Aktivační funkce



Matematika za umělou inteligencí

Neuronové sítě

<u>Jak vyhodnotíme kvalitu modelu?</u>

Účelové funkce

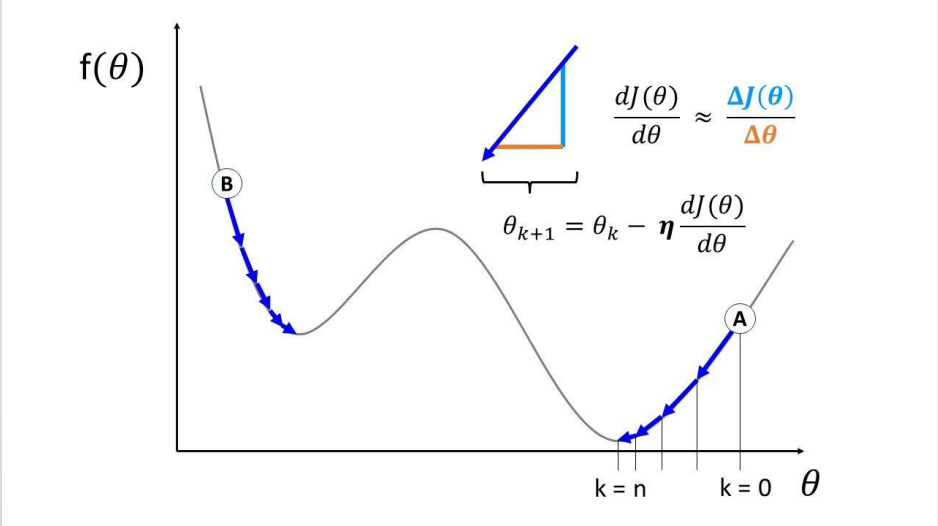
- Střední kvadratická chyba $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$
- Průměrná absolutní chyba $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i|$
- Cross entropy $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i\log(\hat{y}_i) - (1 - y_i)\log(1 - \hat{y}_i)]$

Matematika za umělou inteligencí

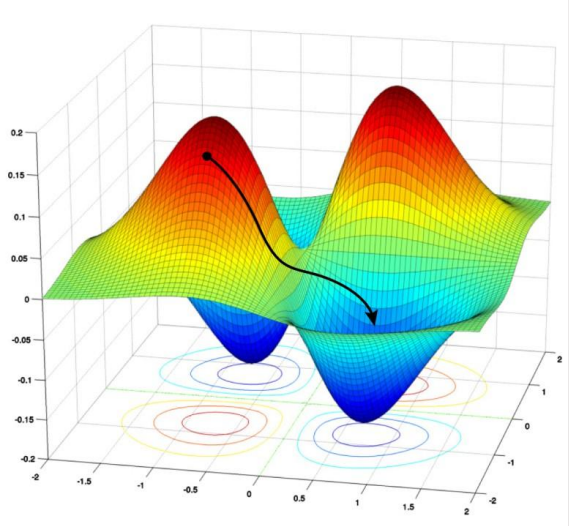
Neuronové sítě

Jak probíhá trénování (učení) neuronové sítě?

Metoda největšího spádu 1D



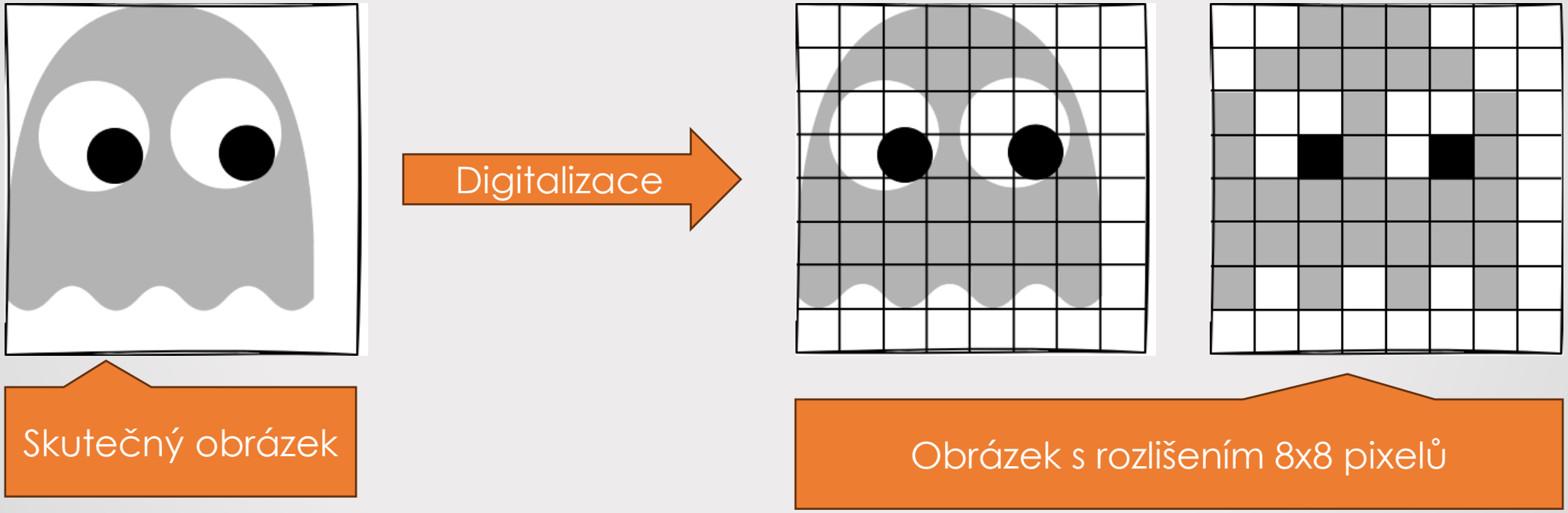
Metoda největšího spádu 2D



Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Obraz v počítači



Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Obraz v počítači

- Obrázek = číselná matice
- Černobílý obrázek - 1matice
- Barevný obrázek - 3 matice (RGB)
- Hodnoty pixelů – i/255, i = 0,…,255

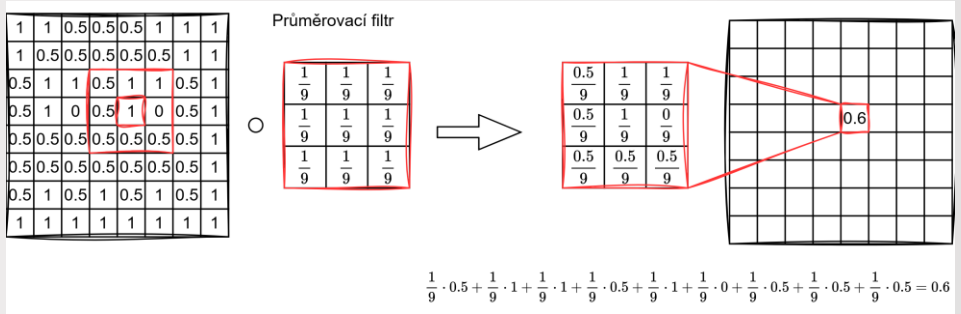
1	1	0,5	0,5	0,5	1	1	1
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
0,5	1	1	0,5	1	1	0,5	1
1	1	0	1	1	0	0,5	1
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1
1	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1
1	1	1	1	1	1	1	1

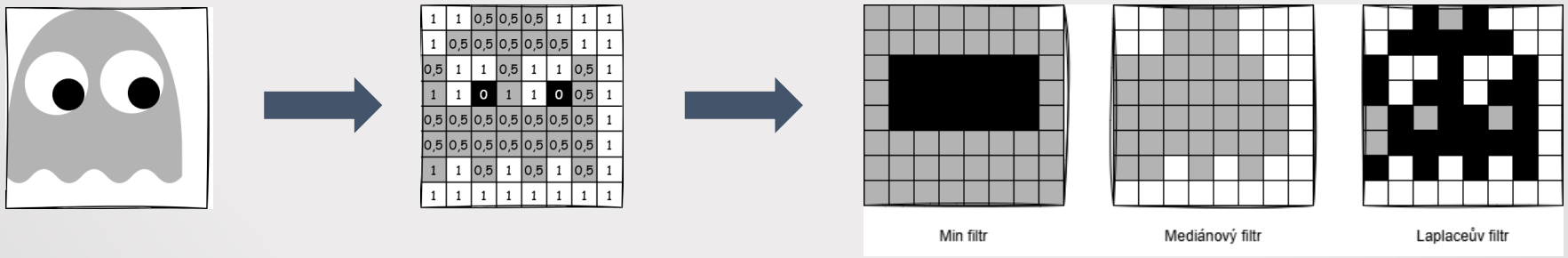
Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Konvoluce

Aplikujeme tzv. filtry, které pomáhají hledat vzory, textury a tvary





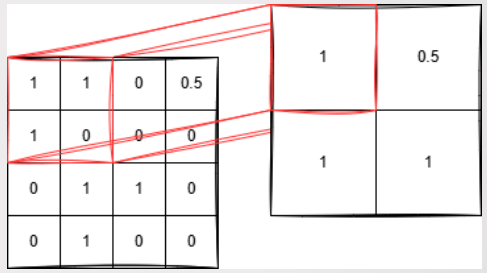
https://www.marketa-trneckova.cz/cnn.html

Matematika za umělou inteligencí

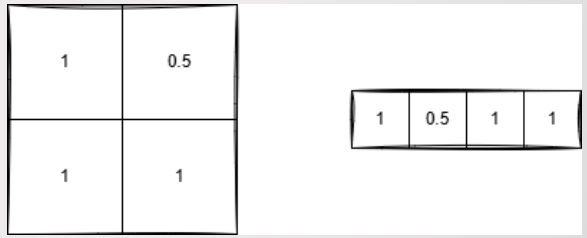
Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Pooling + Flatten

1. Pooling: Pomocí filtrů obrázek postupně zmenšujeme
   např. se vezme maximum z 2 x 2 pixelů



2. Flatten: Nakonec z matic vytvoříme číselný vektor



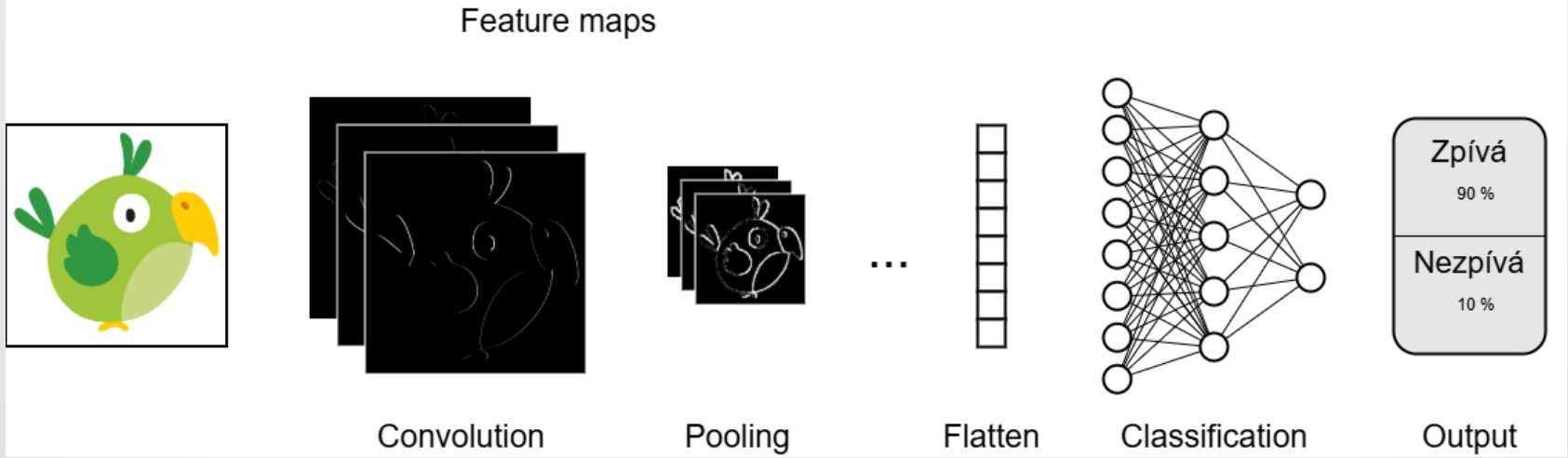
Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Jak AI pracuje s obrazy?

Připravený číselný vektor je vstupem do plně propojené neuronové sítě.

Výstup ze sítě je ve smyslu klasifikace nebo regrese.



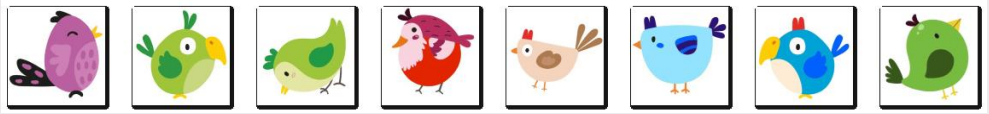
Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Zkusme si to na příkladu

Máme dvě skupiny ptáků o kterých víme, zda umí zpívat, nebo ne:

Umí zpívat



Neumí zpívat

Umí tito ptáci zpívat?

➡ klasifikace

https://teachablemachine.withgoogle.com/

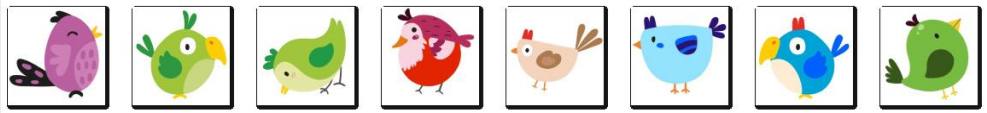
Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Zkusme si to na příkladu

Máme dvě skupiny ptáků o kterých víme, zda umí zpívat, nebo ne:

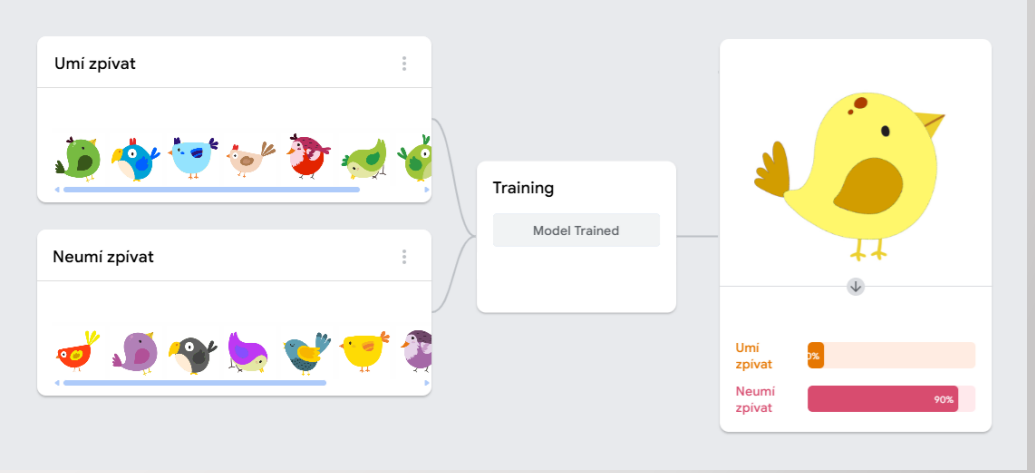
Umí zpívat



Neumí zpívat

Umí tito ptáci zpívat?

➡ klasifikace



https://teachablemachine.withgoogle.com/

Matematika za umělou inteligencí

Konvoluční neuronové sítě – analýza obrazu

Na co si dát pozor

Máme třídu hrnků naučenou na následujících obrázcích:

Proč následující obrázky nejsou klasifikovány jako hrnky?

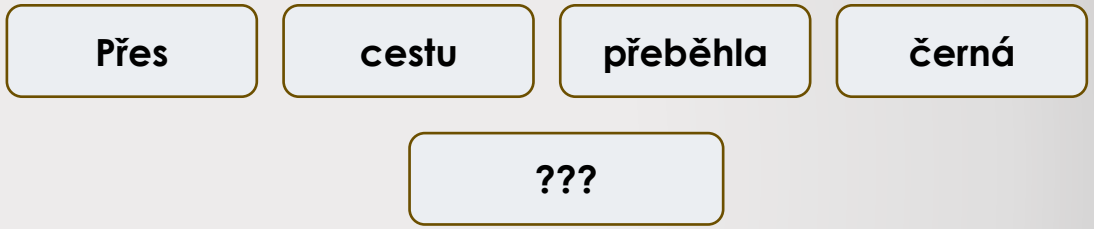
Matematika za umělou inteligencí

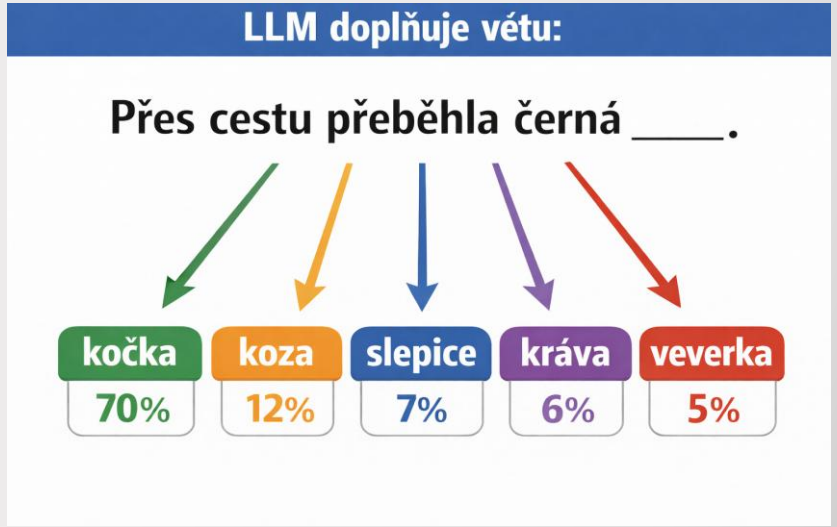
Velké jazykové modely (LLM) – analýza textu

Jak fungují velké jazykové modely?

- Prakticky je to nástroj, který predikuje následující slovo v textu
- Matematicky jde o funkci, která na základě předchozích slov odhaduje následující.

  Optimální slovo vybírá na základě pravděpodobností.





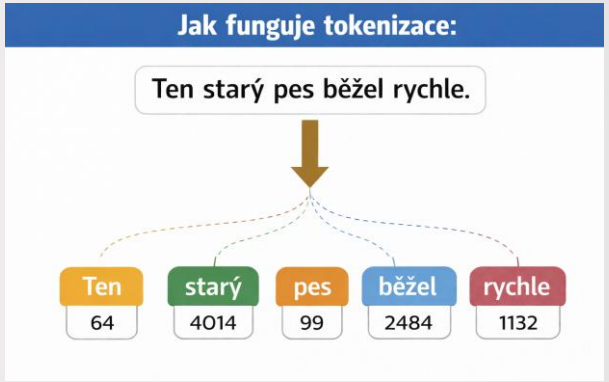
Matematika za umělou inteligencí

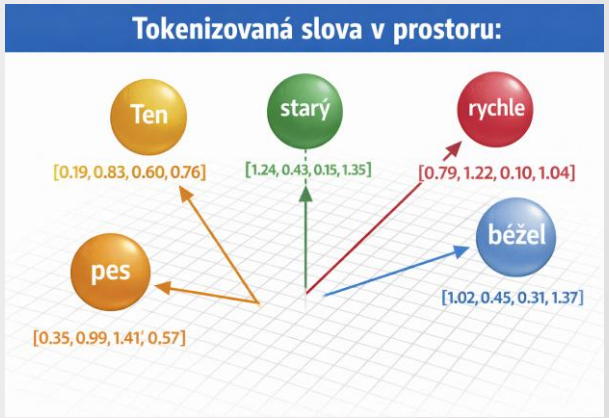
Velké jazykové modely (LLM) – analýza textu

Tokenizace

LLM nepracují s konkrétními slovy/významy, ale s čísly (Tokeny):

- Rozdělení textu na objekty (odstavce, věty, slova,…)
- Slova v základním tvaru (1.osoba, infinitiv,…)
- Tokenizace pro ČJ - projekt LINDAT (online)





Matematika za umělou inteligencí

Velké jazykové modely (LLM) – analýza textu

Sinusové kódování pozice

Poskytuje komplexní informace o pozici tokenu, k čemuž využívá posloupnosti funkcí sinus a cosinus:

- spojité goniometrické funkce,
- vyjádření blízkosti: tokeny vyskytující se v textu blízko sebe mají podobný poziční vektor,
- periodicita funkcí: zohlednění relativní vzdálenosti v krátkých resp. v dlouhých větách,
- jednoznačnost: díky většímu počtu funkcí sinus a cosinus lze unikátně popsat pozici každého tokenu.

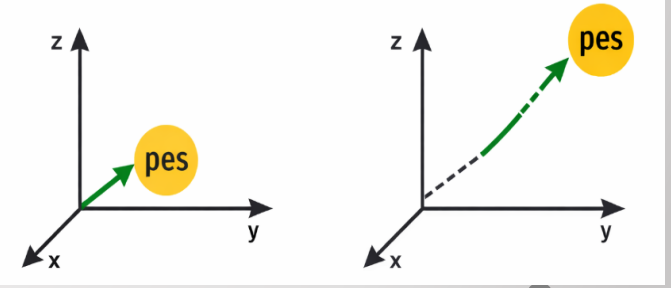
Matematika za umělou inteligencí

Velké jazykové modely (LLM) – analýza textu

Sinusové kódování pozice – Jak to tedy funguje:

- Jako podobná slova chápeme ta, u kterých je častý společný výskyt.
- Vztah mezi slovy chápeme jako analogii vzdálenosti bodů v prostoru.
- Je nutné zachování informace podstatné pro význam věty.
- Ke každému tokenu (resp. jeho číselné reprezentaci) navíc přičítáme jeho poziční vektor.

Tedy pro větu „Ten (0) starý (1) pes (2) běžel (3) rychle (4).“
Je poziční vektor slova pes: [sin(2), cos(2)] = [0.91, −0.42].
A součet tokenu a pozičního vektoru můžeme chápat takto



Matematika za umělou inteligencí

Neuronové sítě

<u>Neuronové sítě mají mnoho variant</u>

Např. rozpoznání různě psaných čísel může probíhat takto:

Matematika za umělou inteligencí

Neuronové sítě

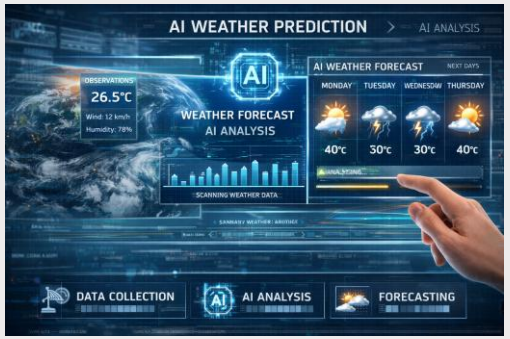
Kde všude se tedy potkáme s neuronovými sítěmi?

Analýza obrazu
- identifikace osob,
- rozpoznávání SPZ,
- autonomní vozidla,
- analýza rentgenových snímků.

Analýza textu
- překlady,
- chatbot,
- analýza sentimentu.

Generování obsahu
- text, obraz, hudba, video.

Predikce z dat
- výskyt nemoci, počasí, poptávka.



RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

odborný asistent na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky

Stavba Eiffelovy věže

PageRank algoritmus aneb vektor za 25 miliard dolarů

Jak si s pomocí teorie grafů optimálně naplánovat cestu

Využití konstrukční geometrie při 3D tisku

„I have never done anything ‚useful.' No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world."

G. H. Hardy

„Neexistuje žádná oblast matematiky, jakkoli abstraktní, která by jednou nemohla být použita k popisu jevů reálného světa."

N. I. Lobačevskij

„I have never done anythi
No discovery of mine has
likely to make, directly or i
for good or ill, the least dif
the amenity of the world."

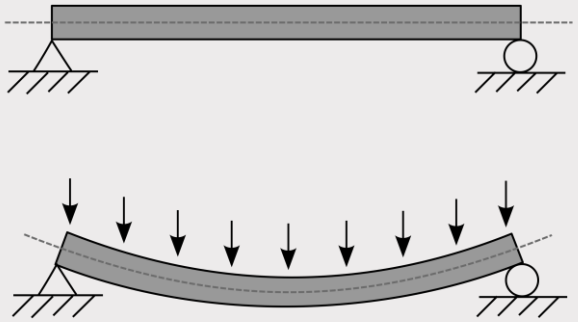
G. H. Hardy

je žádná oblast
iky, jakkoli abstraktní, která
u nemohla být použita k
vů reálného světa."

čevskij

Jak to bylo s Eiffelovou věží

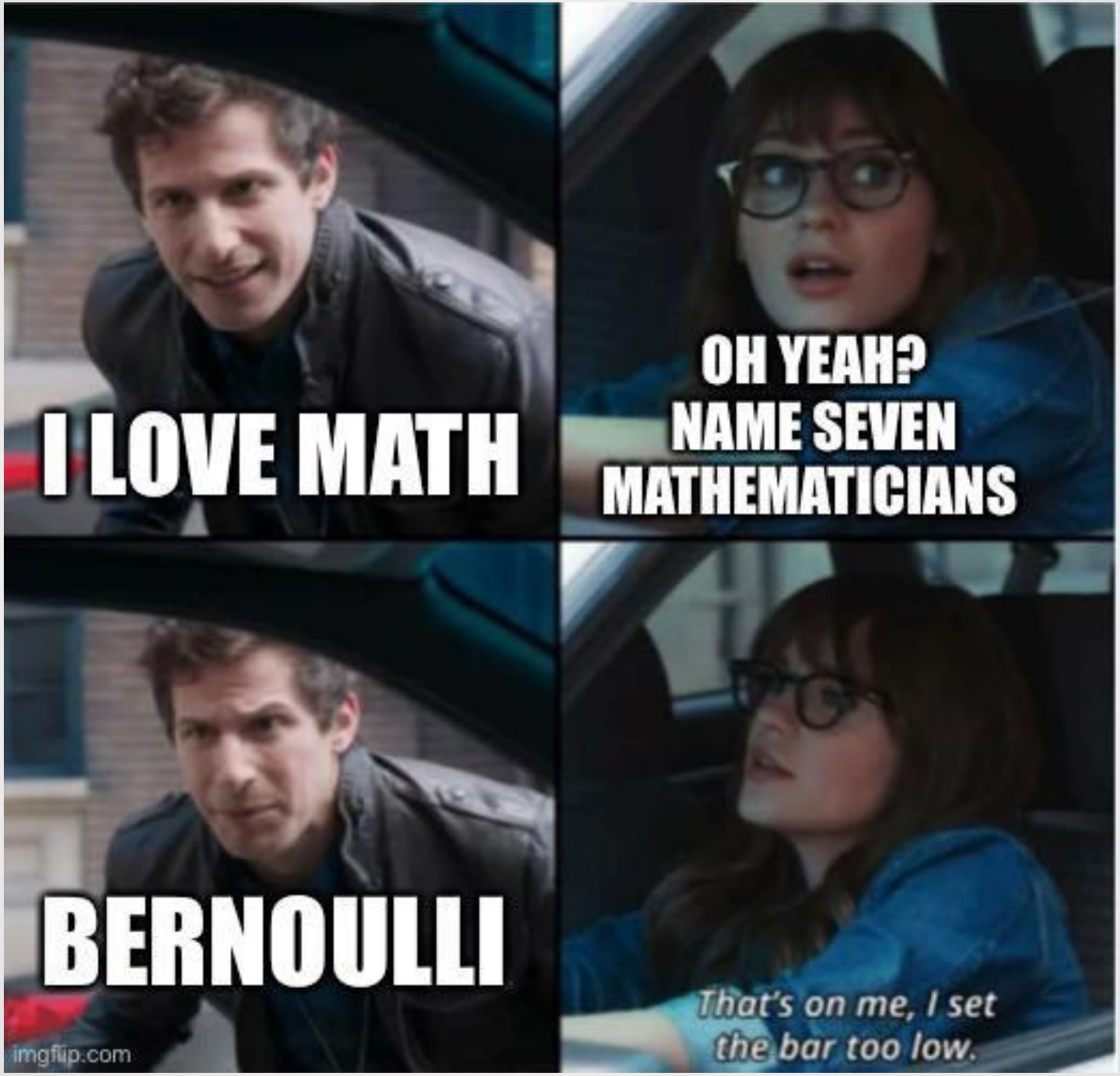
Někdy kolem roku 1700 se člen významné švýcarské rodiny Bernoulli z Basileje Jacob Bernoulli (1654 – 1705) pokouší sestavit rovnici popisující průhyb nosníku.



Chce to zařídit tak, aby 3D těleso dokázal popsat pomocí obyčejné diferenciální rovnice v 1D.

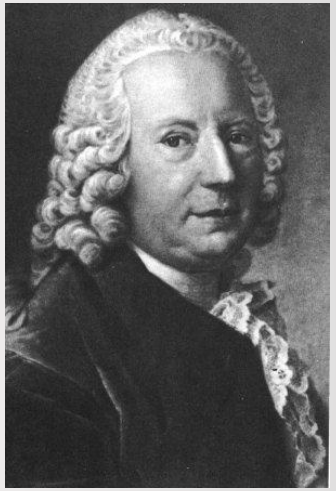
➡ některé z nich lze řešit analyticky.

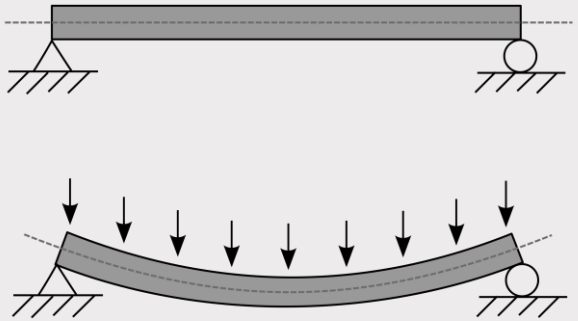
Než to stihne dokončit, umírá.


I LOVE MATH
OH YEAH?
NAME SEVEN
MATHEMATICIANS
BERNOULLI
That's on me, I set
the bar too low.
imgflip.com

Jak to bylo s Eiffelovou věží

Jeho zápisky se pak dostanou k jeho synovci jménem Daniel Bernoulli (1700 – 1782).





Ten se problémem začne zabývat, až když získá v roce 1725 placené místo na katedře matematiky v Sankt-Petěrburgu.

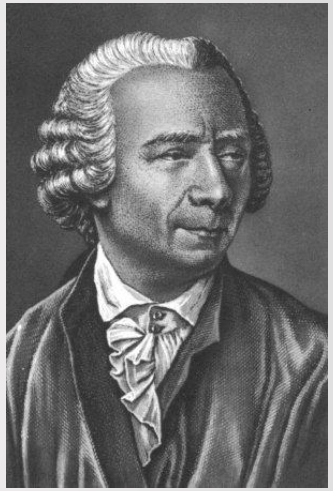
Zde se za 2 roky setká s někým, koho zná už ze společné vlasti.

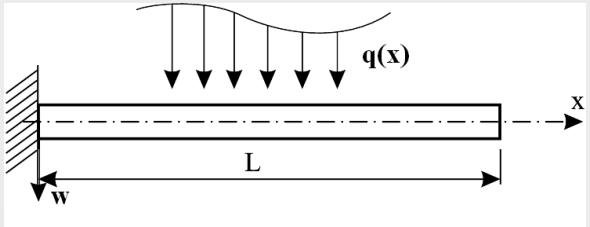
Jak to bylo s Eiffelovou věží

Tou osobou je Leonhard Euler (1707 – 1783).

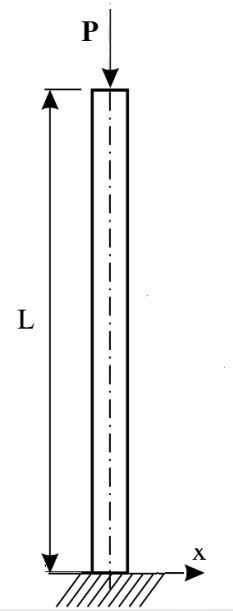
Jejich spolupráce vede k tomu, že se rovnici pro nosník nakonec podaří dokončit.

Euler navíc přidá problematiku stability sloupu.





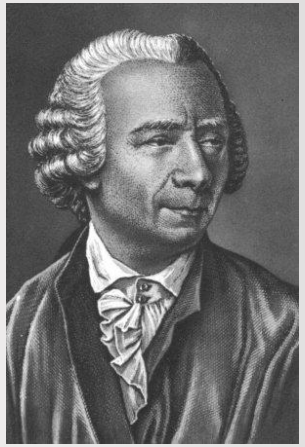
Úloha o nosníku

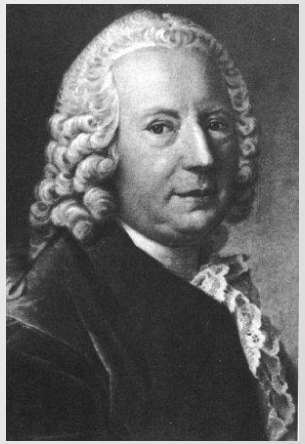


Úloha o sloupu

Jak to bylo s Eiffelovou věží

Kolem roku 1750, když už je Bernoulli zpátky v Basileji a Euler zaměstnán na dvoře pruského krále Friedricha II, se v jejich korespondenci objevuje výsledná rovnice pro <u>ohyb nosníku a stabilitu sloupu</u>.

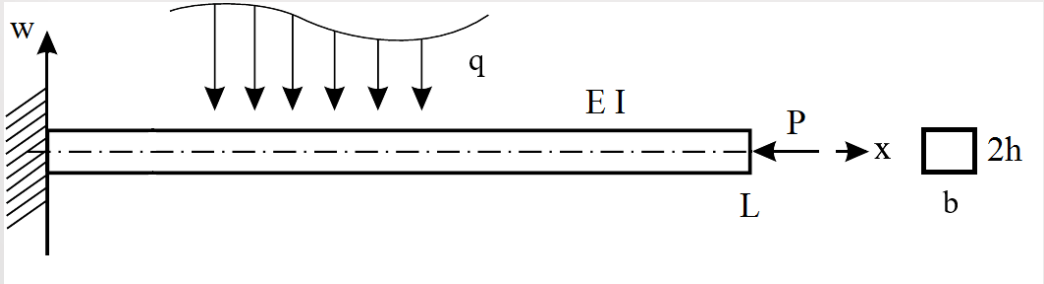




<u>Euler-Bernoulliho rovnice</u>:

$$EIw'''' + Pw'' = q \qquad \text{v} \qquad (0, L)$$

kde E je materiál nosníku a $I = \frac{2}{3}h^3 b$.



Jak to bylo s Eiffelovou věží

V 19. století úsilím převážně lidí s polytechnickým vzděláním se postupně vybudují postupy umožňující řešení obecnějších úloh.

To umožní použití Euler-Bernoulliho rovnice při projektování staveb.

První velkou stavbou, která vděčí za svůj vznik této rovnici, je stavba Eiffelovy věže v letech 1887–1889.

Jak to bylo s Eiffelovou věží

Jak to bylo s Eiffelovou věží

Stavba věže vděčí za svůj vznik Světové výstavě v Paříži v roce 1889.

Radní vypsali soutěž o vstupní bránu na výstaviště, kterou vyhrál Alexandre Gustave Eiffel (1832 - 1923).

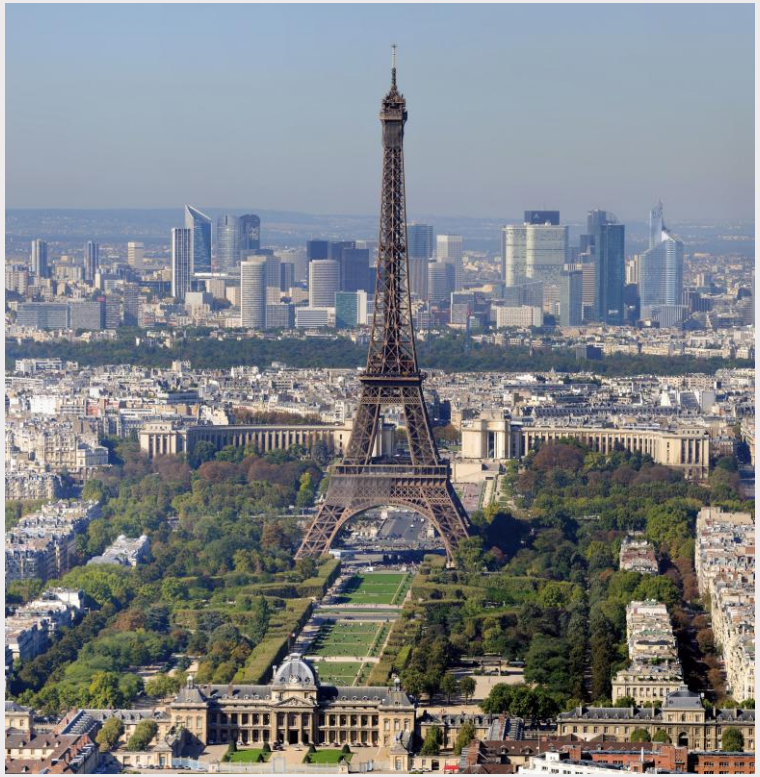
Na projektu pracovalo v Eiffelově firmě kolem 50 inženýrů již několik let předem.

Věž pak v roce 1889 navštívily téměř dva miliony návštěvníků.

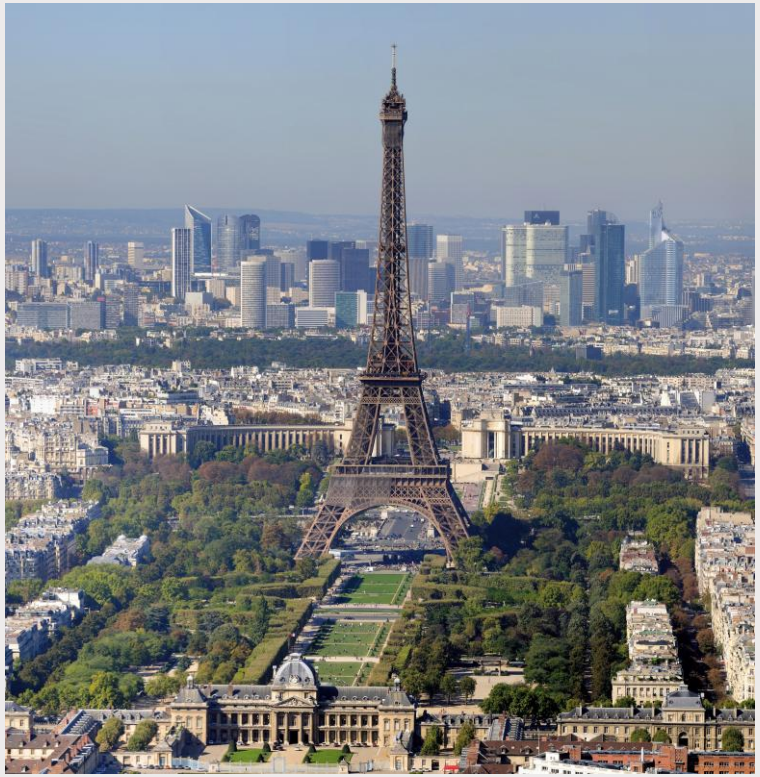
Bez použití matematiky a speciálně řešení rovnice nosníku (nebo sloupu) by však Eiffel tak rozsáhlou stavbu vysokou 300 metrů nedokázal realizovat.

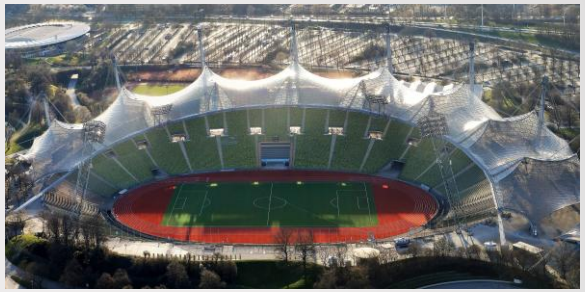
G. Eiffel: *Křivka čtyř vnějších rohů věže, tak jak ji nadiktovaly matematické výpočty, vytváří mohutný dojem pevnosti a krásy.*

Jak to bylo s Eiffelovou věží



Jak to bylo s Eiffelovou věží



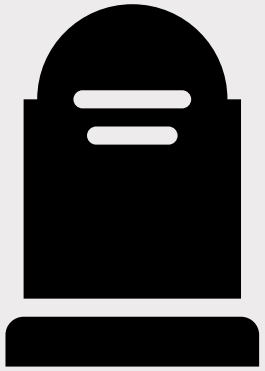


PageRank algoritmus

<u>Příběh jednoho úspěchu</u>

- 1998: Objevil se Google jako veřejně dostupný vyhledávač.
- Původně šlo o studentský projekt Larryho Page a Sergeye Brina na Stanfordu.
- Dříve se vyhledávalo: AltaVista, Yahoo!, Lycos, Excite, HotBot, …

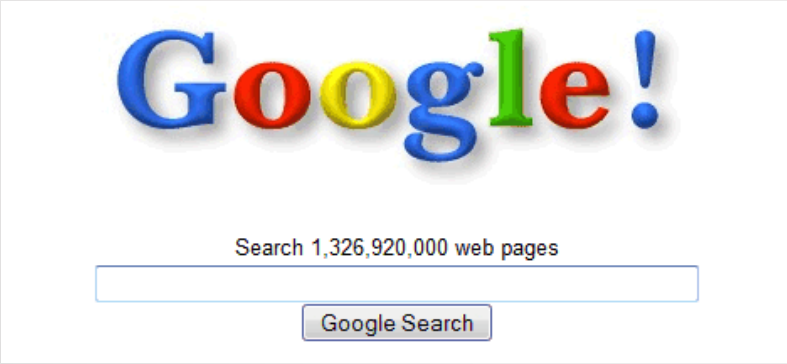
:



PageRank algoritmus

Od začátku bylo vidět, že Google nějakým zázrakem ukazuje na předních místech vyhledávání ty nejpodstatnější výsledky.

Konkurenti Googlu zobrazovali výsledky hledání ve zdánlivě nahodilém pořadí a uživatel dlouho hledal chtěný odkaz. Poměřoval se třeba počet výskytů hledaných slov.



PageRank algoritmus

Jak to ten Google dělá?

1. Procházet web a vyhledat všechny webové stránky s veřejným přístupem.
2. Indexovat data z kroku 1 tak, aby v nich bylo možné efektivně vyhledávat relevantní klíčová slova nebo fráze.
3. Ohodnotit důležitost každé stránky v databázi tak, aby při vyhledávání a nalezení podmnožiny stránek s požadovanými informacemi mohly být nejdůležitější stránky zobrazeny jako první.

→ Jak ale hodnotit důležitost stránky?

PageRank algoritmus

Jak to ten Google dělá?

1. Procházet web a vyhledat všechny webové stránky s veřejným přístupem.
2. Indexovat data z kroku 1 tak, aby v nich bylo možné efektivně vyhledávat relevantní klíčová slova nebo fráze.
3. Ohodnotit důležitost každé stránky v databázi tak, aby při vyhledávání a nalezení podmnožiny stránek s požadovanými informacemi mohly být nejdůležitější stránky zobrazeny jako první.

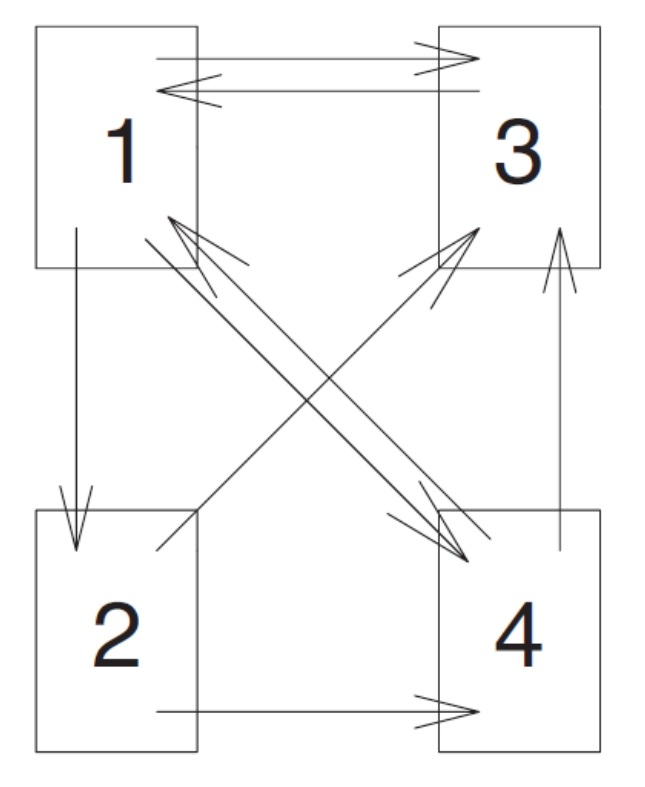
→ PageRank – číselné hodnocení stránky, které odráží její důležitost

Pokud na stránku vede hodně odkazů, zvyšuje to její důležitost.

Odkaz z důležité stránky je cennější než odkaz z málo důležité stránky.

PageRank algoritmus

Mám malý web…



- **Na stránku 1** vedou odkazy z: 3, 4.
- **Na stránku 2** vede odkaz z: 1.
- **Na stránku 3** vedou odkazy z: 1, 2, 4.
- **Na stránku 4** vedou odkazy z: 1, 2.

- $P_1 = \frac{P_3}{1} + \frac{P_4}{2}$
- $P_2 = \frac{P_1}{3}$
- $P_3 = \frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{2} + \frac{P_4}{2}$
- $P_4 = \frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{2}$

PageRank algoritmus

<u>Matice, aneb proč psát čísla do tabulky?</u>

Označíme-li matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak řešíme maticovou rovnici

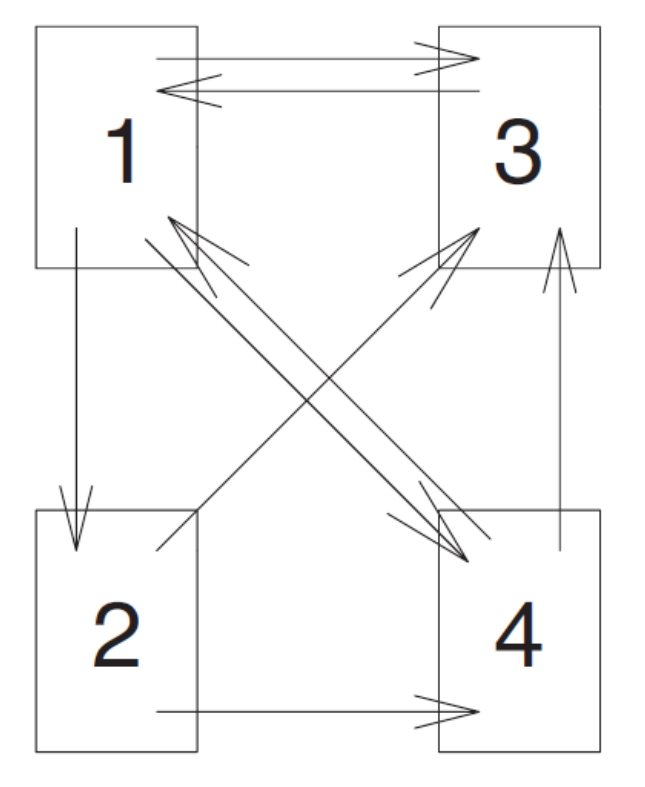
$$Ax = x,$$

kde x obsahuje hodnocení jednotlivých stránek P_1, P_2, P_3, P_4.

Vektoru x se říká vlastní vektor matice A.

PageRank algoritmus

Vyhodnocení



Vychází:

- $P_1 = 12,$
- $P_2 = 4,$
- $P_3 = 9,$
- $P_4 = 6.$

Nebo libovolný násobek těchto hodnot, např. $P_1 = 0.387, P_2 = 0.129,$
$P_3 = 0.290, P_4 = 0.194.$

Nejvyšší ohodnocení získala stránka 1, přestože nejvíce odkazů míří na stránku 3.

PageRank algoritmus

Všimněte si, že součet prvků v každém sloupci naší matice je 1.
Takové matici říkáme <u>sloupcově stochastická.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hluboká <u>Perronova-Frobeniova věta</u> říká, že pro takovou matici vždy existuje nenulové řešení rovnice $Ax = x$.

→ Jak najít toto řešení, když je matice veliká? A internet je obrovský…

PageRank algoritmus

<u>Maticové násobení není jen hříčka</u>

K řešení maticové rovnice (což je vlastně soustava lineárních rovnic) se v tomto speciálním případě lze přiblížit opakovaným násobením maticí A.

Začneme ohodnocením např. (1/4,1/4,1/4,1/4) a násobíme maticí A:

1. (0.38, 0.08, 0.33, 0.21)
2. (0.44, 0.12, 0.27, 0.17)
3. (0.35, 0.14, 0.29, 0.21)
4. (0.4, 0.12, 0.3, 0.2)

…

7. (0.39, 0.13, 0.29, 0.19) – přesně na 2 desetinná místa

PageRank algoritmus

Skutečnost je složitější

Problémem jsou stránky, ze kterých nevedou žádné odkazy.

Ohodnocení nemusí být jednoznačné – je třeba zvolit to nejvhodnější.

Aktuální podoba Google PageRank není veřejná, ale podle známých dílčích informací je mnohem sofistikovanější a bere v úvahu daleko více parametrů.

PageRank algoritmus

<u>Další využití PageRanku</u>

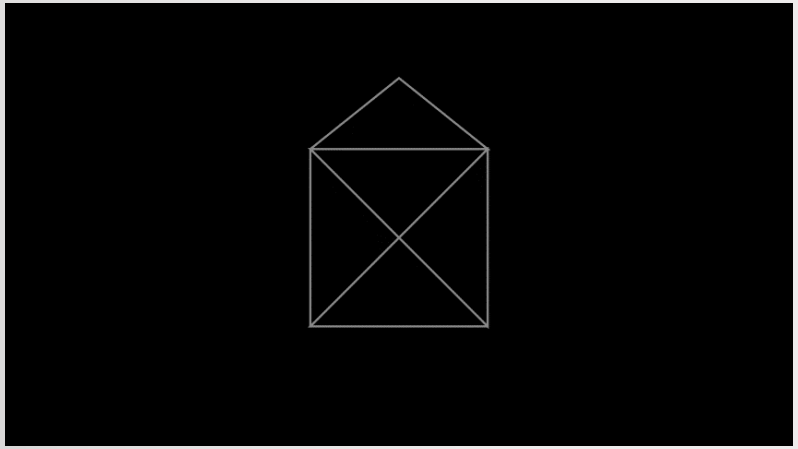
- Chemie
- Biologie
- Neurověda
- Inženýrské systémy
- Matematické systémy
- Sport

- Literatura
- Bibliometrie
- Databáze a znalostní systémy
- Doporučovací systémy
- Sociální sítě

Plánování cesty s teorií grafů

Jednotažka a Eulerovský tah

Nakreslete jedním tahem



V teorii grafů jde o hledání Eulerovského tahu

Platí jednoduché pravidlo:

0 vrcholů s lichým stupněm
→ začneme i skončíme ve stejném bodě

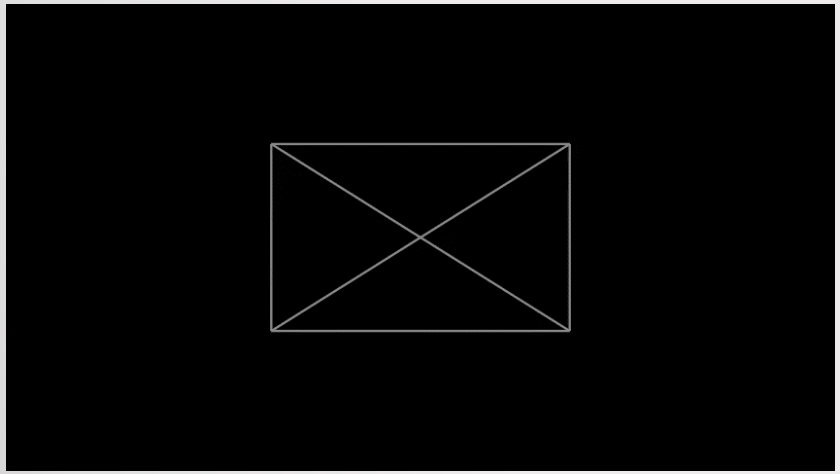
2 vrcholy s lichým stupněm
→ začneme v jednom a skončíme v druhém

Více než 2 liché vrcholy
→ jedním tahem to nejde

Plánování cesty s teorií grafů

Čínský problém pošťáka

Co když to jedním tahem nejde?



Tento optimalizační problém se nazývá čínský problém pošťáka.

Řešení:

1. Křižovatky s lichým stupněm spárujeme
   tj. po dvojicích spojíme novými „hranami“
   (= existující cesta v grafu).
   Tím budou mít sudý stupeň.
2. Vybereme nejkratší možné párování.

Plánování cesty s teorií grafů

Praktické aplikace: doprava a údržba

Kde se to používá?

- ❄️ Zimní údržba silnic
- 🧹 Úklid ulic
- ✉️ Rozvoz pošty
- 🚛 Popeláři

Jaké grafy se použijí?

Neorientované

Obousměrné vedlejší cesty s malou hustotou dopravy

Orientované

Jednosměrky

Situace, kdy je potřeba projíždět každý směr zvlášť (široké, s velkou hustotou dopravy)

Plánování cesty s teorií grafů

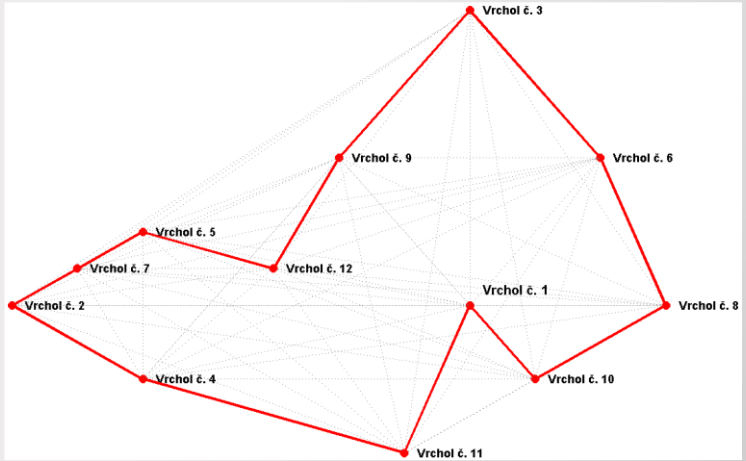
<u>Úloha obchodního cestujícího (okružní problém)</u>

V teorii grafů jde o úlohu hledání nejkratší hamiltonovské kružnice.

V angličtině je znám jako Travelling Salesman Problem (zkr. TSP).

<u>Popis problému</u>:
Je dáno n vrcholů (měst) navzájem spojených hranami (cestami) se známou délkou.

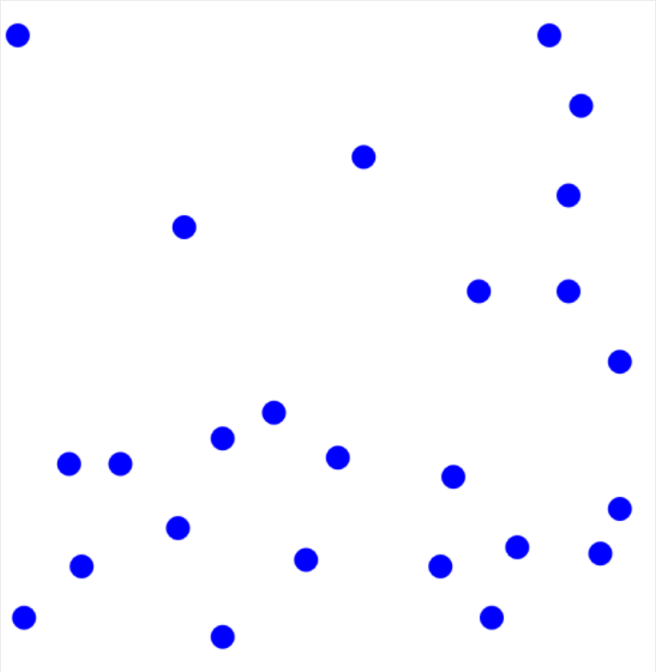
Hledáme nejkratší trasu, která prochází všemi vrcholy (každým právě jednou) a která končí ve výchozím vrcholu.



Plánování cesty s teorií grafů

<u>Úloha obchodního cestujícího (okružní problém)</u>

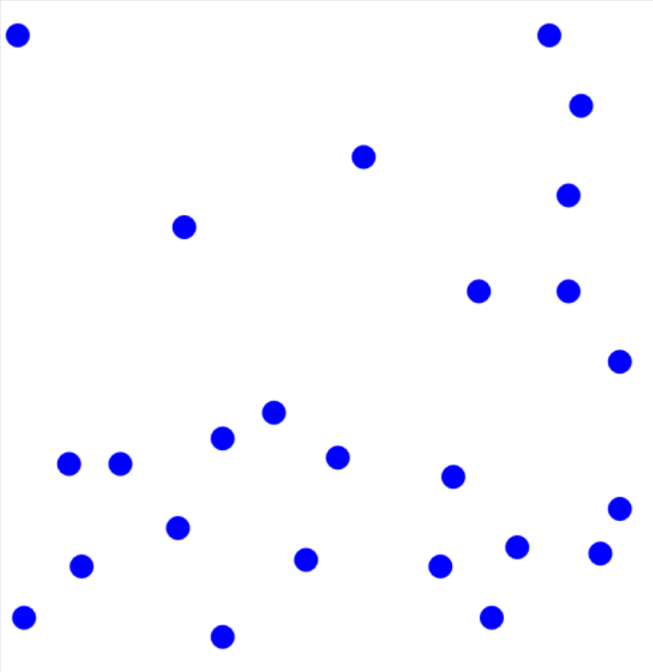
Zkuste si sami ☺

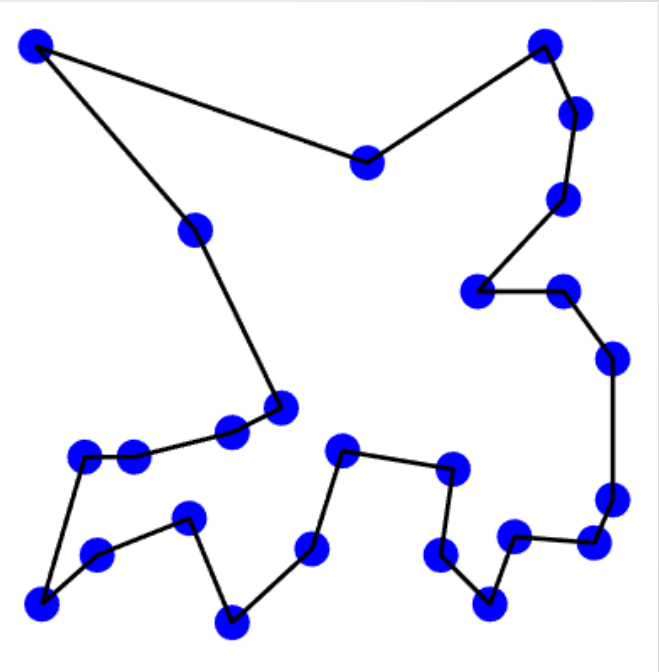


Plánování cesty s teorií grafů

<u>Úloha obchodního cestujícího (okružní problém)</u>

Zkuste si sami ☺





Plánování cesty s teorií grafů

<u>Proč je TSP zajímavý a důležitý?</u>

Jedná o problém, který lze snadno popsat bez nutnosti použití složitého matematického aparátu, takže je pochopitelný i pro ne-matematiky

Ovšem jedná se o velmi obtížnou úlohu patřící mezi tzv. NP-těžké úlohy:

- Velmi malé úlohy lze vyřešit snadno tím, že vyzkoušíme všechny možnosti.
- S velikosti však výpočetní náročnost řešení roste exponenciálně.

Zda existuje nějaký rychlý (polynomiální) algoritmus dodnes nevíme.
Pokud bychom to zjistili, vyřešili bychom problém „ P versus NP“

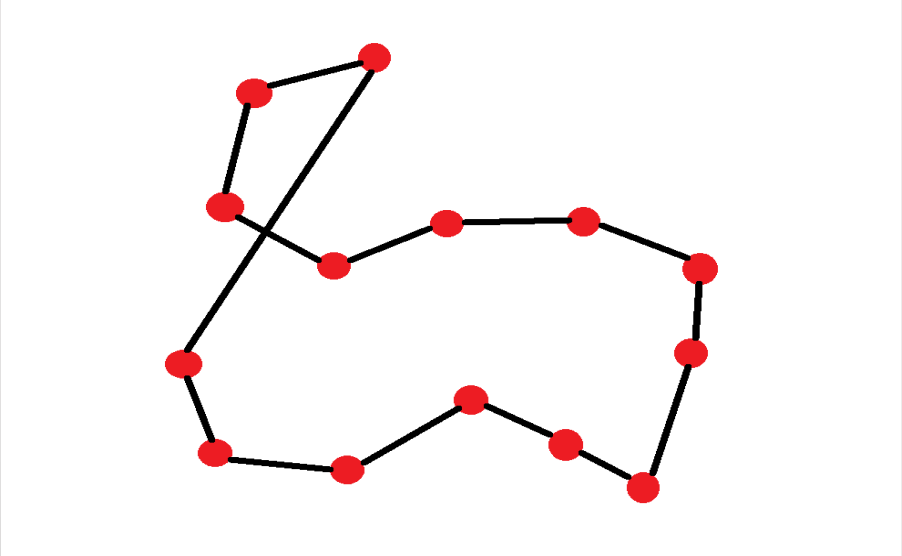
Tj. jeden ze 7 Millennium Prize Problems, které vyhlásil Clayův matematický institut v roce 2000

Plánování cesty s teorií grafů

A jak můžeme najít „dostatečně dobré“ řešení?

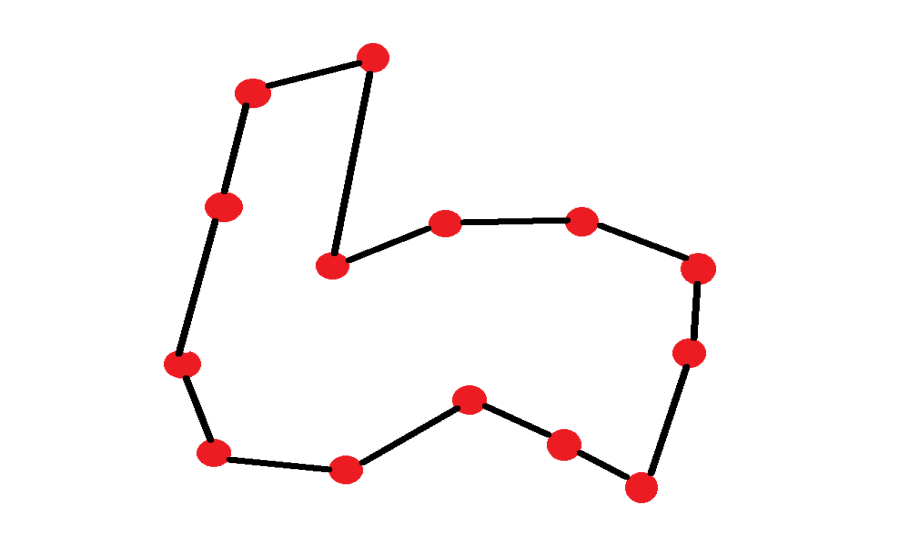
Konstrukční – např. Metoda nejbližšího souseda

- Jdeme do nejbližšího volného sousedního vrcholu



Zlepšovací – např. 2-opt

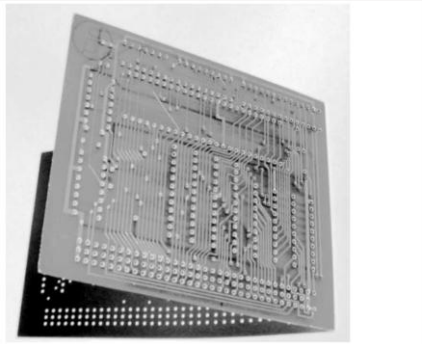
- Zkouší výměny dvojic hran
- Geometricky vlastně odstraňuje křížení



Plánování cesty s teorií grafů

<u>Aplikace TSP:</u>

- Trasy obchodních cestujících a okružní trasy pro turisty
- Trasa školního autobusu
- Poštovní služby (např. rozvoz balíků)
- Roznáška jídla pro seniory
- Inspekční cesty
- Vrtání otvorů do desek tištěných spojů
- Polohování dalekohledů



Printed circuit board with 442 holes. Image courtesy of Martin Grötschel.

- Součást větších úloh např. rozvozní úlohy, kde se současně hledají trasy vozidel

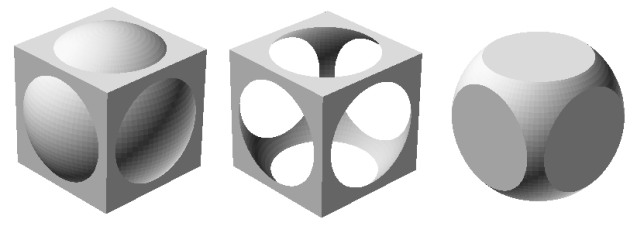
Konstruktivní geometrie a 3D tisk

3D objekty je možné v počítači reprezentovat různými způsoby.

Jednou z rozšířených reprezentací je objemová reprezentace pomocí konstruktivní geometrie (CSG), která se používá zejména v CAD systémech, kde je kladen důraz na přesnost.

Vycházíme z jednoduchých geometrických objektů, jako je krychle nebo koule – geometrická primitiva.

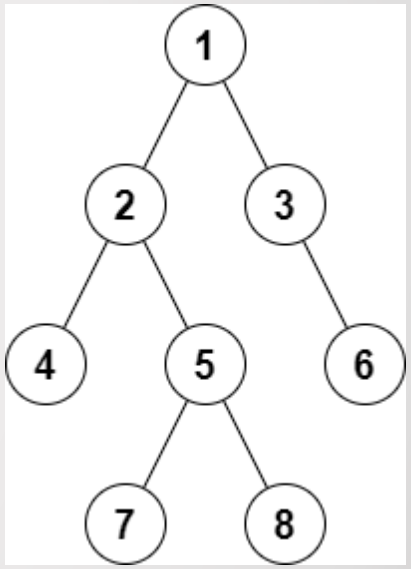
Tyto prvky skládáme pomocí množinových operací (průnik, sjednocení, rozdíl) a prostorových transformací (posunutí, otočení, zvětšení, …).



Množinové operace na krychli a kouli

Konstruktivní geometrie a 3D tisk

Konstrukce je charakterizována tzv. CSG stromem – systémem dílčích kroků a jejich návazností, který popisuje, jak je objekt vytvořen z geometrických primitiv.



Rozlišujeme

- kořen stromu (1),
- listy stromu (4, 6, 7, 8),
- rodiče uzlů a potomky (např. 5 má potomky 7 a 8).

Se stromem pracujeme odspodu

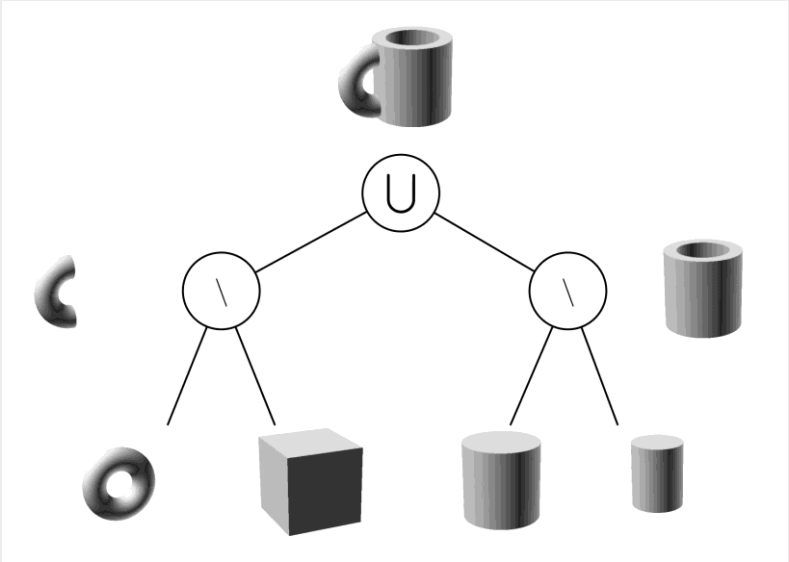
- listy představují jednotlivá geometrická primitiva,
- výše postavené uzly odpovídají operacím na potomcích,
- kořen je finální produkt konstrukce.

Konstruktivní geometrie a 3D tisk

Hrníček lze vytvořit

- z primitiv torus, krychle a dva různě velké válce
- a operací rozdílu (\) a sjednocení (U)

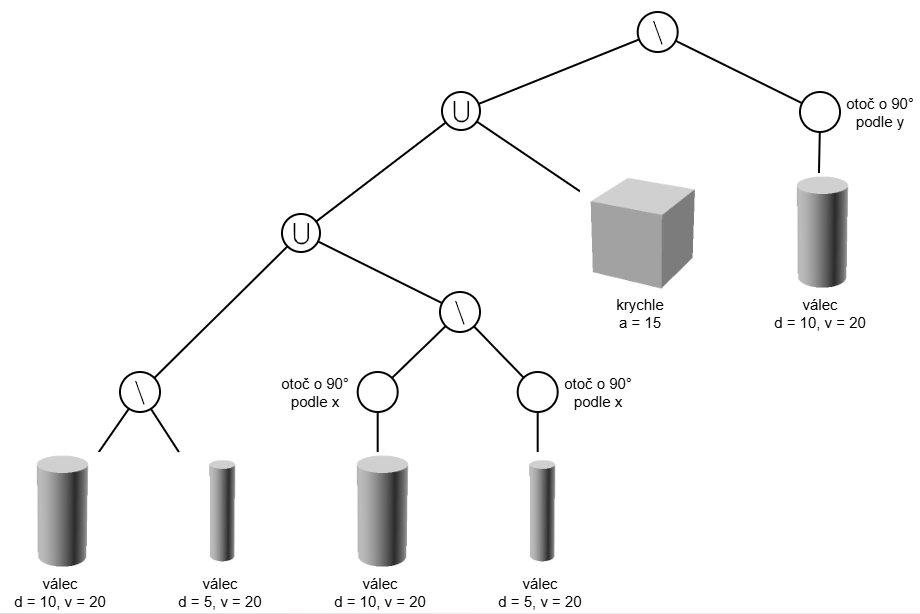
takto:



Konstruktivní geometrie a 3D tisk

A teď vy ☺

Jak vypadá těleso, které je reprezentováno tímto CSG stromem?

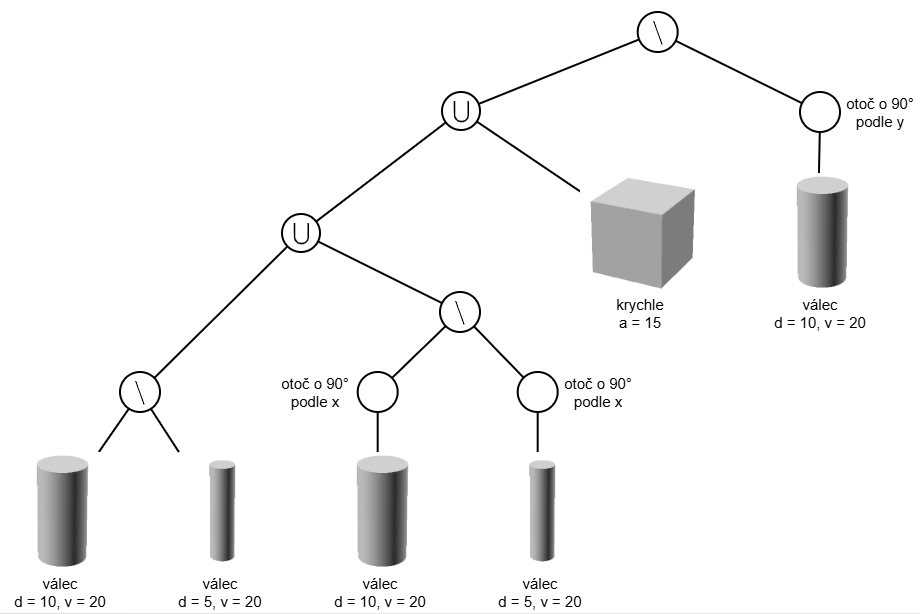


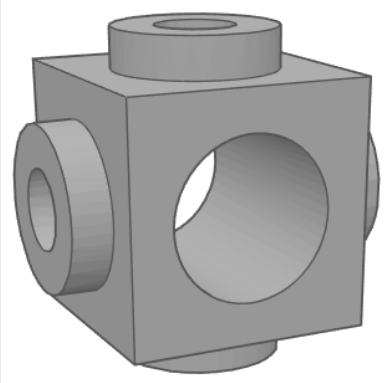
pozn. Objekty mají střed ve stejném bodě.

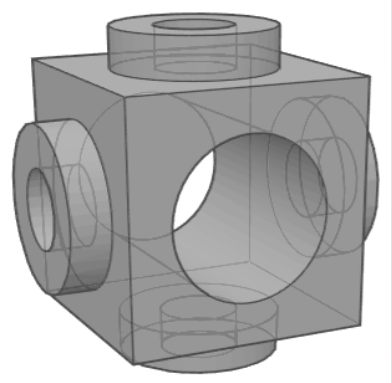
Konstruktivní geometrie a 3D tisk

A teď vy ☺

Jak vypadá těleso, které je reprezentováno tímto CSG stromem?





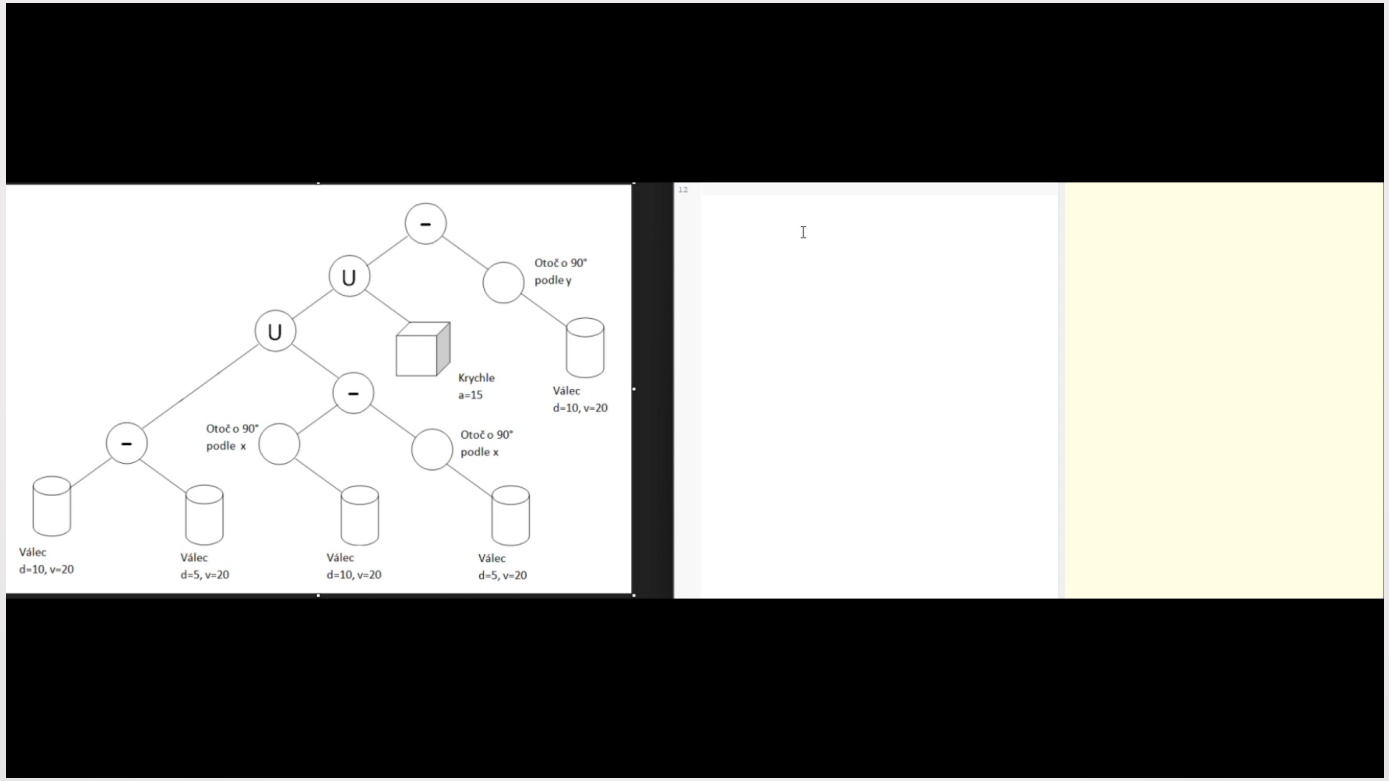


pozn. Objekty mají střed ve stejném bodě.

Konstruktivní geometrie a 3D tisk

A teď vy ☺

Jak vypadá těleso, které je reprezentováno tímto CSG stromem?



doc. Mgr. Ondřej Vencálek, Ph.D.

docent na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky

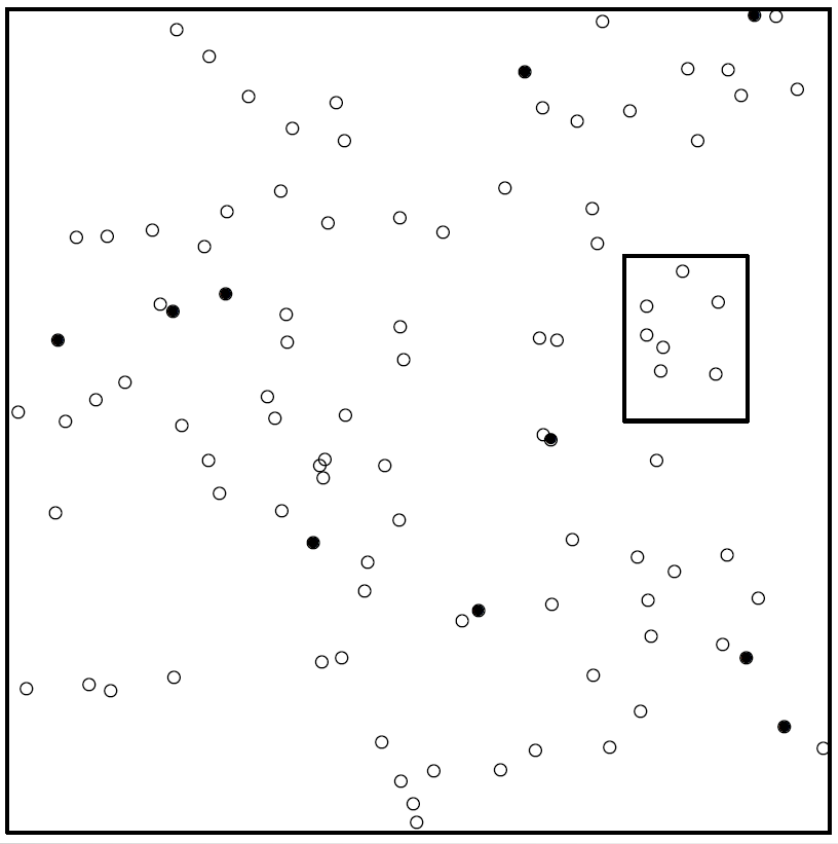
Matematika jako nezbytný pomocník medicíny

Bayesova věta, jednoduchý vzorec s velkou silou

Jak porozumět počasí díky matematice

Matematika v medicíně

Problém indukce



David Hume 18. stol.
(Pojednání o lidské přirozenosti):

Ani ze sebevětšího počtu pozorování bílých labutí nelze usuzovat, že jsou bílé opravdu všechny, k odmítnutí takového závěru postačuje jediná černá.

Francis Bacon 16.-17.stol. :

Jakmile člověk zaujme nějaké stanovisko, sbírá všechny důkazy, které ho potvrzují, a i když důkazy svědčící o opaku mohou být častější a závažnější, buď si jich nevšimne nebo je zavrhne, aby víra v zaujaté stanovisko nebyla otřesena.

Matematika v medicíně

Srovnání úmrtnosti Aljaška versus Arizona

Data:	1996
Arizona:	**824** úmrtí na 100 tisíc obyvatel za rok
Aljaška:	**427** úmrtí na 100 tisíc obyvatel za rok

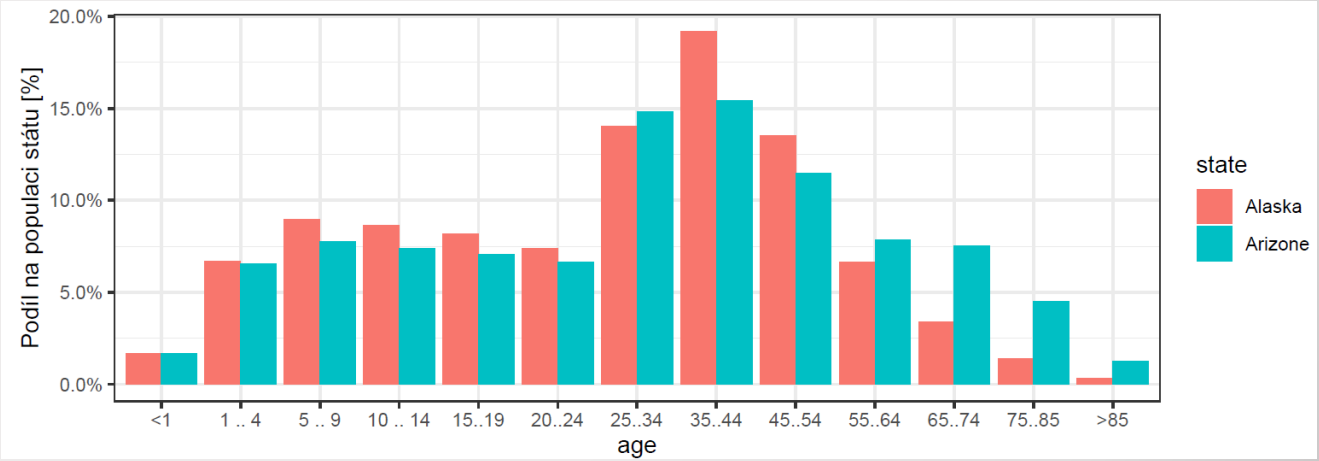
➡ Žádá si vysvětlení!

Matematika v medicíně

Srovnání úmrtnosti Aljaška versus Arizona

Data: 1996
Arizona: **824** úmrtí na 100 tisíc obyvatel za rok
Aljaška: **427** úmrtí na 100 tisíc obyvatel za rok

➡ Žádá si vysvětlení!



Matematika v medicíně

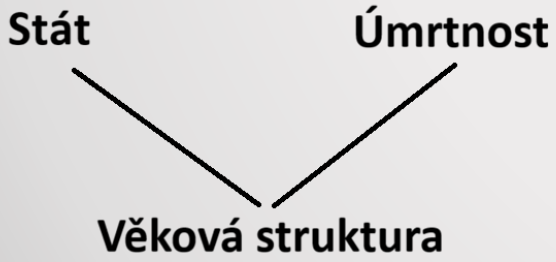
Srovnání úmrtnosti Aljaška versus Arizona

D_i … počet zemřelých v *i*-té skupině
T_i … počet lidí celkem v *i*-té skupině
R_i … počet lidí v referenční populaci v i-té skupině

$s_i = D_i/T_i$ … míra úmrtnosti v i-té věkové skupině

$\mathrm{SMR} = \frac{\sum_i s_i R_i}{\sum_j R_j}$ … standardizovaná míra úmrtnosti

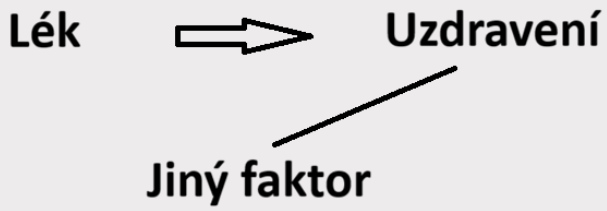
	age	AL.popul	AL.died	AR.popul	AR.died	US.popul
1	<1	10037	72	75322	575	3891494
2	1 .. 4	40445	18	290256	127	15516482
3	5 .. 9	54359	12	344886	67	19441182
4	10..14	52437	14	328220	95	18981045
5	15..19	49475	53	313422	322	18662151
6	20..24	44690	60	294762	372	17559730
7	25..34	84864	137	657439	1022	40368234
8	35..44	116015	238	684967	1700	43393341
9	45..54	81857	306	509569	2271	32369791
10	55..64	40162	359	347841	3632	21361460
11	65..74	20668	518	333235	7639	18669337
12	75..85	8337	509	199416	10494	11429984
13	>85	1947	286	55929	8240	3761561



Arizona: **832** úmrtí na 100 tisíc obyvatel za rok
Aljaška: **856** úmrtí na 100 tisíc obyvatel za rok

Matematika v medicíně

Klinické studie – James Lind



Jablko se uvádí jako příklad zdravé stravy. Ale proč jsou jablka tak zdravá?

Protože obsahují vitamíny.

Jaké vitamíny?

„B, C, …“

Ano, tyto opravdu v jablku najdeme. Kolik myslíte, že je v jablku vitamínu C?

„???“

Zkusme to najít na Wikipedii…

Matematika v medicíně

Klinické studie – James Lind

Průměrný obsah [editovat | editovat zdroj]

Jablko obsahuje přibližně 100 miliónů bakterií z téměř 100 tisíc mikrobiálních druhů, přičemž jejich koncentrace ve slupce je menší.[4] Počet bakterií ani nezáleží na tom, zda jde o organické nebo konvenční zemědělství, ale organické poskytuje větší druhovou rozmanitost bakterií.

Tabulka udává dlouhodobě průměrný obsah živin, prvků, vitamínů a dalších nutričních parametrů zjištěných v syrových jablkách.[5] Významný podíl vlákniny a dalších minerálů je ve slupce, takže loupaná jablka mají výrazně horší podíl takovýchto složek.

Složka	Jednotka	Průměrný obsah	Prvek (mg/100 g)	Průměrný obsah	Složka (mg/100g)	Průměrný obsah
voda	g/100 g	85,4	Na	3	vitamin C	3–20
bílkoviny	g/100 g	0,4	K	100	vitamin D	0
tuky	g/100 g	0,1	Ca	3	vitamin E	0,27
cukry	g/100 g	11,2	Mg	3	vitamin B6	0,06
celkový dusík	g/100 g	0,05	P	8	vitamin B12	0
vláknina	g/100 g	1,6	Fe	0,1	karoten	0,017
mastné kyseliny	g/100 g	stopy	Cu	0,02	thiamin	0,03
cholesterol	g/100 g	0	Zn	0,1	riboflavin	0,02
energie	kJ/100 g	190	Mn	0,1	niacin	0,1

https://cs.wikipedia.org/wiki/Jablko

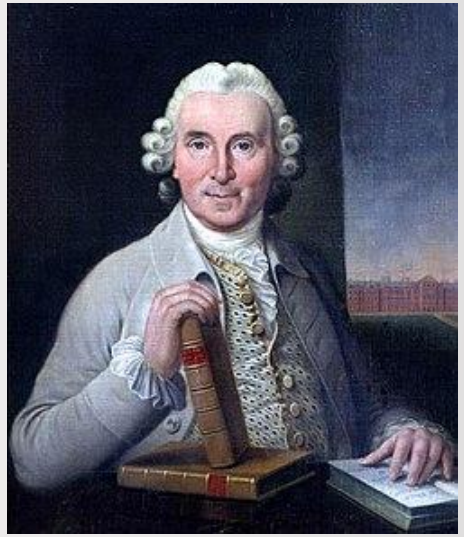
Matematika v medicíně

Klinické studie – James Lind

Jak víme, že nám vitamín C prospívá?

Jak byste se o tom přesvědčili?

James Lind – 1747
námořní výpravy (objevení Ameriky 1492),
kurděje, léčba citrusy,
první klinická studie



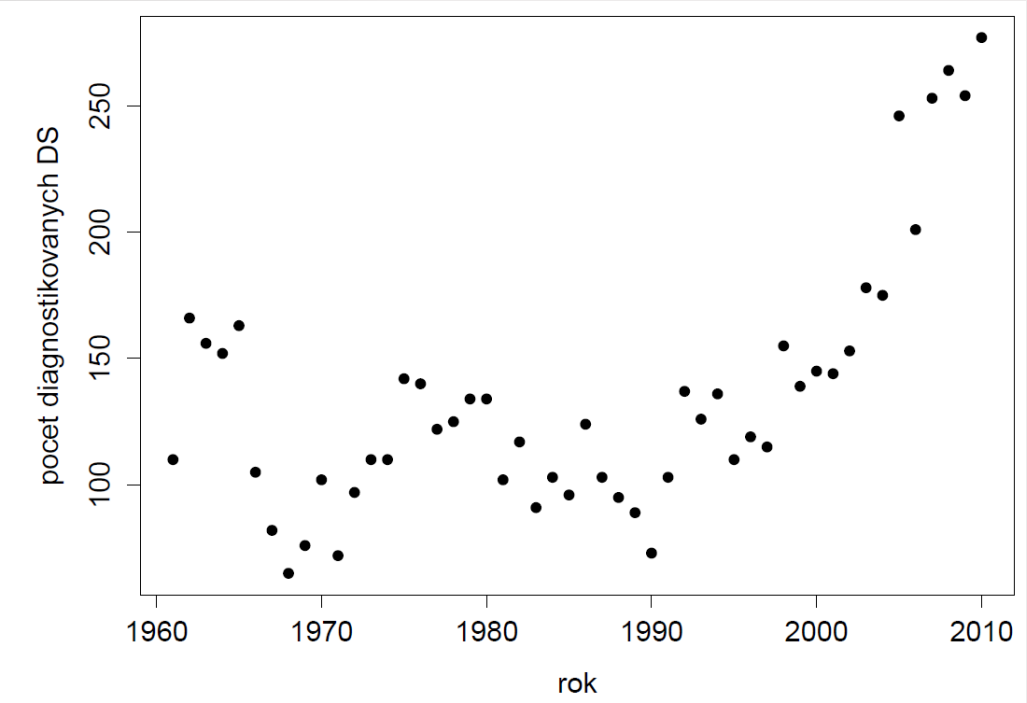
➡ Jak velké mají být skupiny?

Je pozorovaný rozdíl zobecnitelný?

Matematika v medicíně

Výskyt Downova syndromu

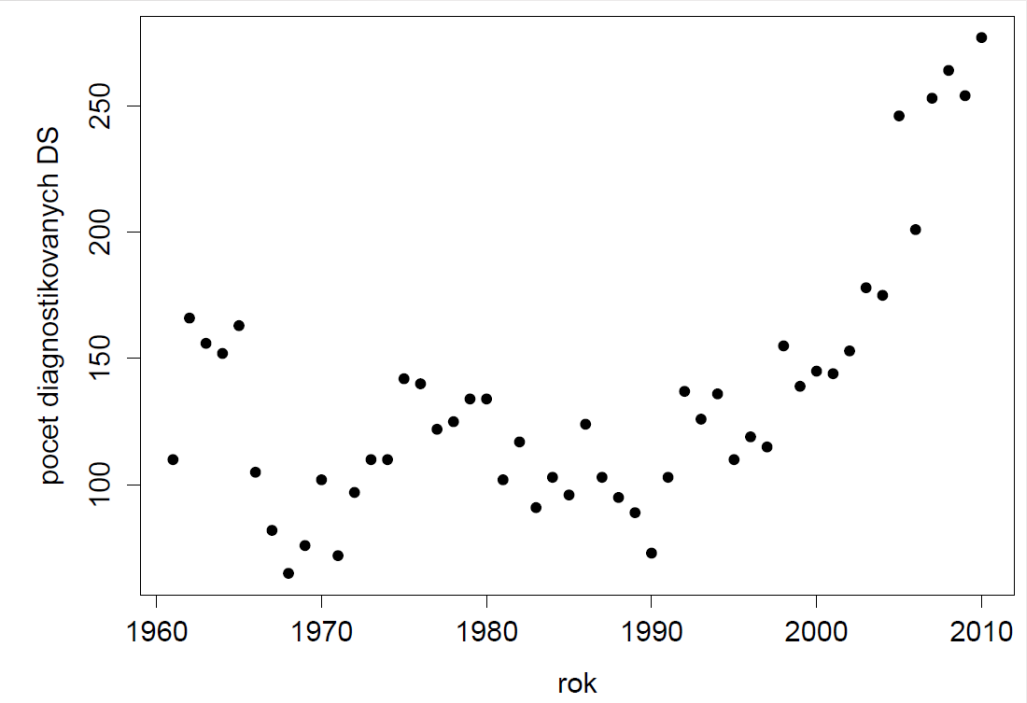
Celkový počet diagnóz:



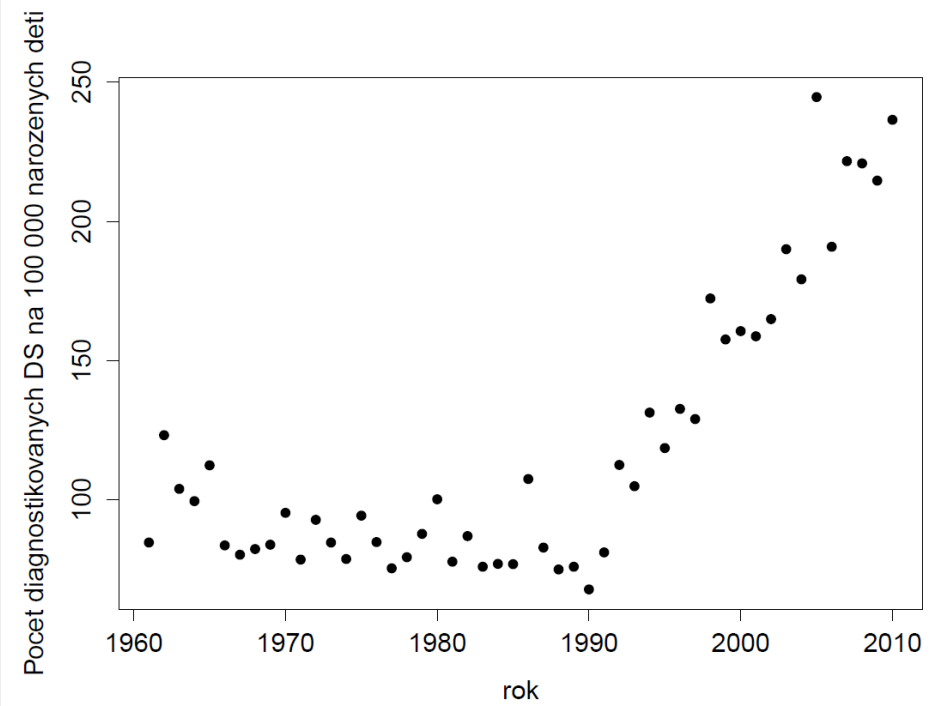
Matematika v medicíně

Výskyt Downova syndromu

Celkový počet diagnóz:



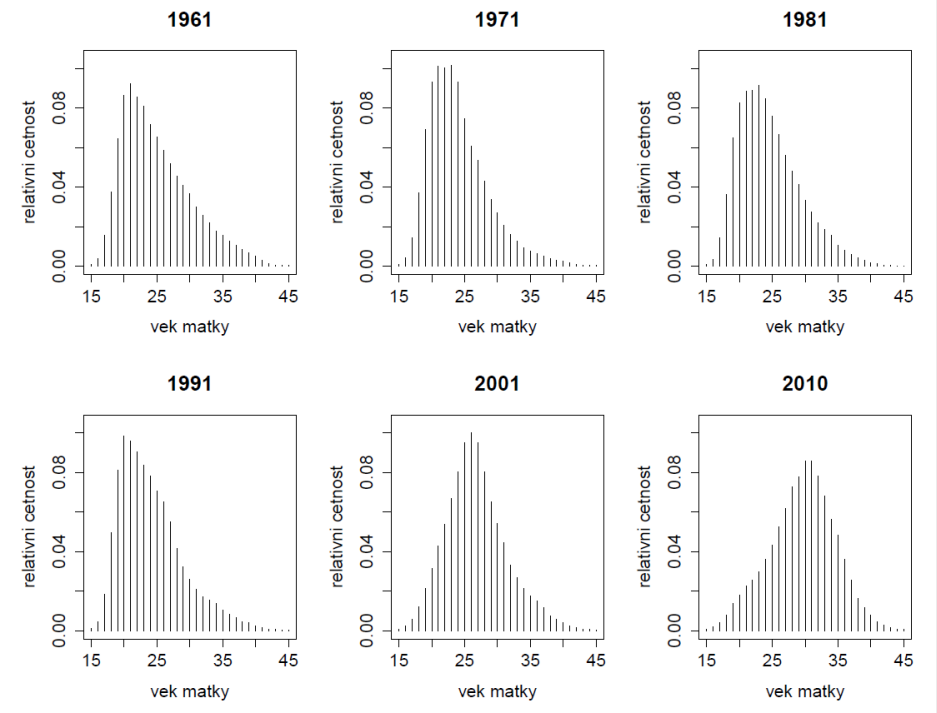
Počet diagnóz na 100 000 narozených:



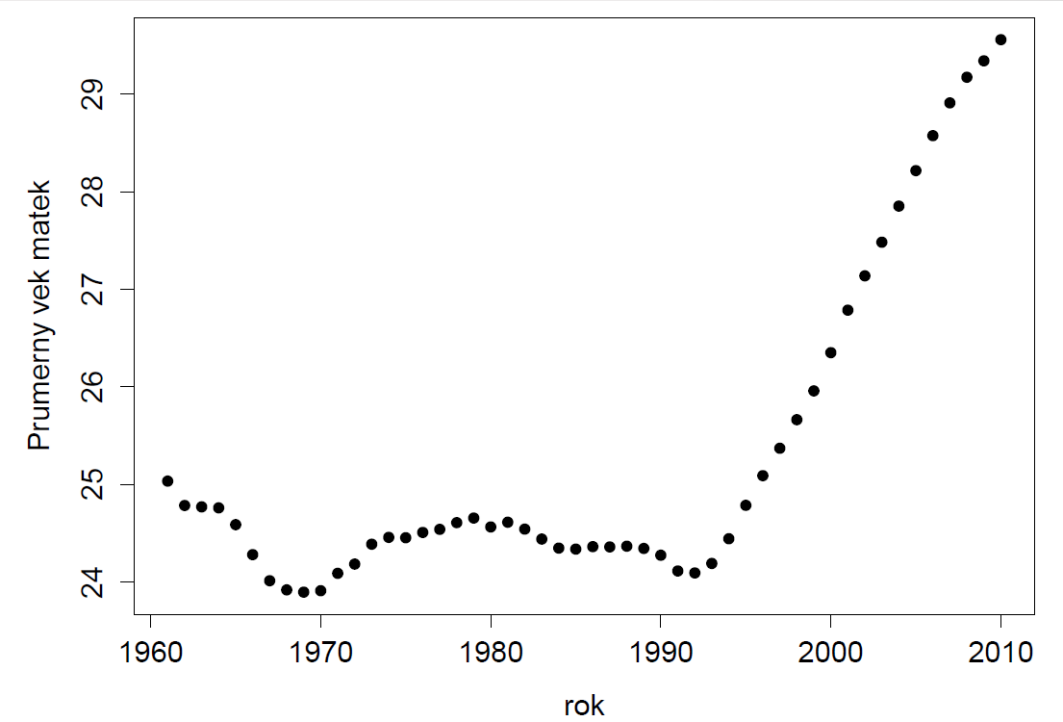
Matematika v medicíně

Výskyt Downova syndromu

Věková struktura rodiček:



Průměrný věk rodiček:

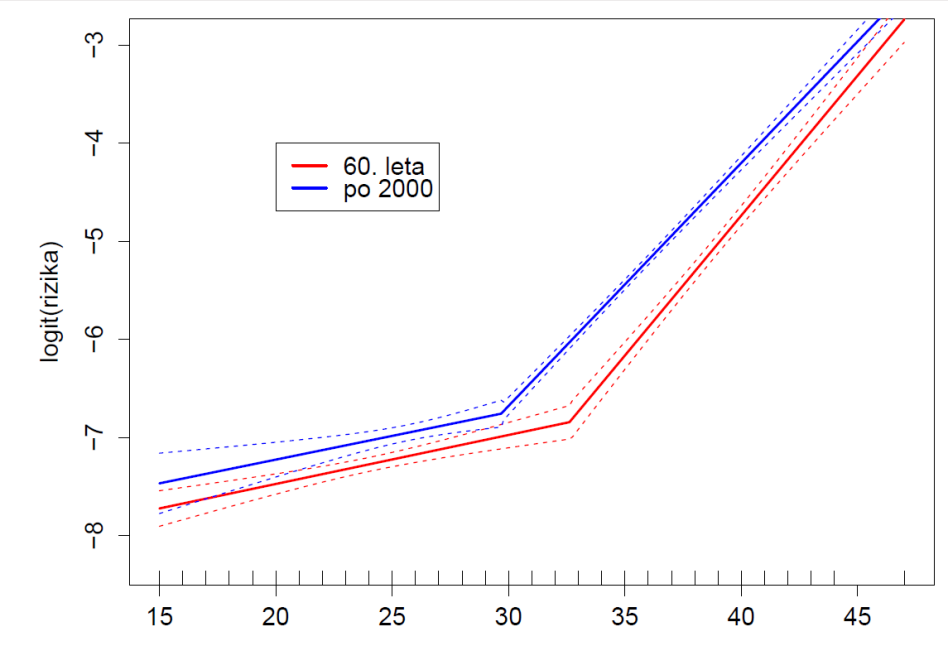


Matematika v medicíně

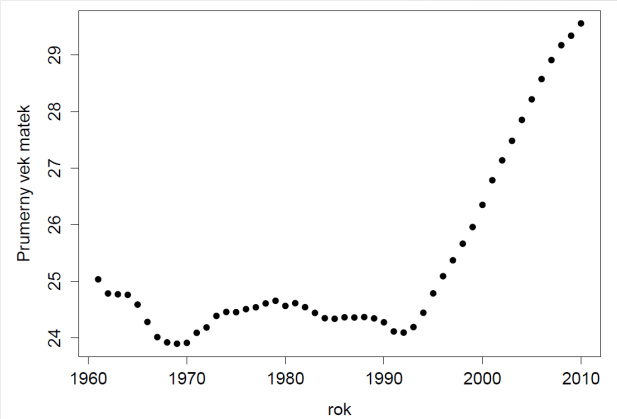
Výskyt Downova syndromu

Riziko výskytu DS roste (exponenciálně) s věkem rodičky

$$logit(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$



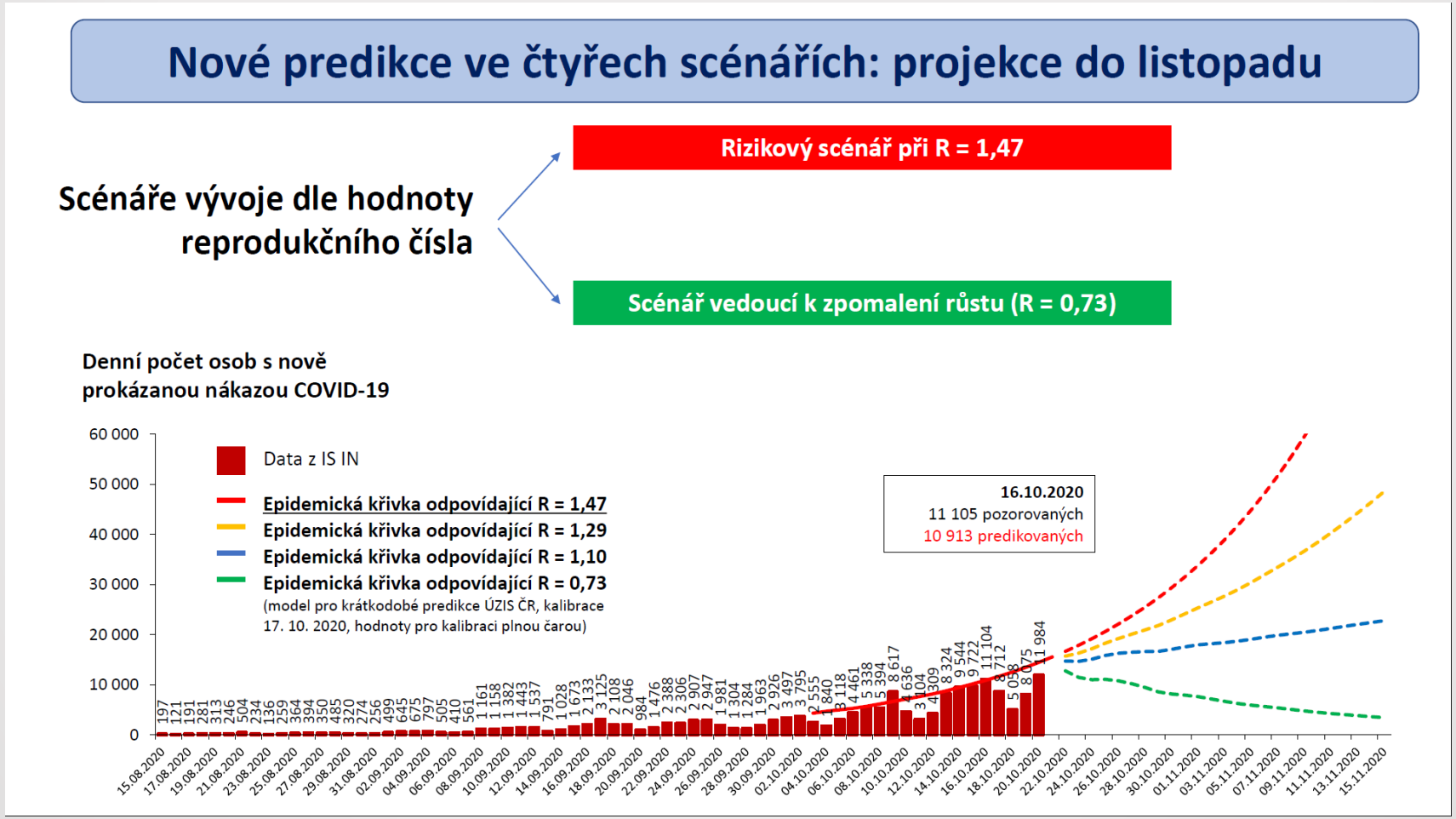
věk



Jak ale ohodnotit nejistotu v odhadu?

Matematika v medicíně

Modelování epidemie



Matematika v medicíně

Modelování epidemie

<u>Model dobře popisující historická data ještě nemusí být vhodný pro predikce</u>

parametry

$$y(t) = f(t, p_1, \ldots, p_k)$$

$$y(t) = \beta_{0,i} + \beta_{1,i} t \quad \text{pro} \quad t \in (a_i, a_{i+1})$$

Elektrokardiogram: záznam časové změny elektrického potenciálu způsobeného srdeční aktivitou.

Matematika v medicíně

Modelování epidemie

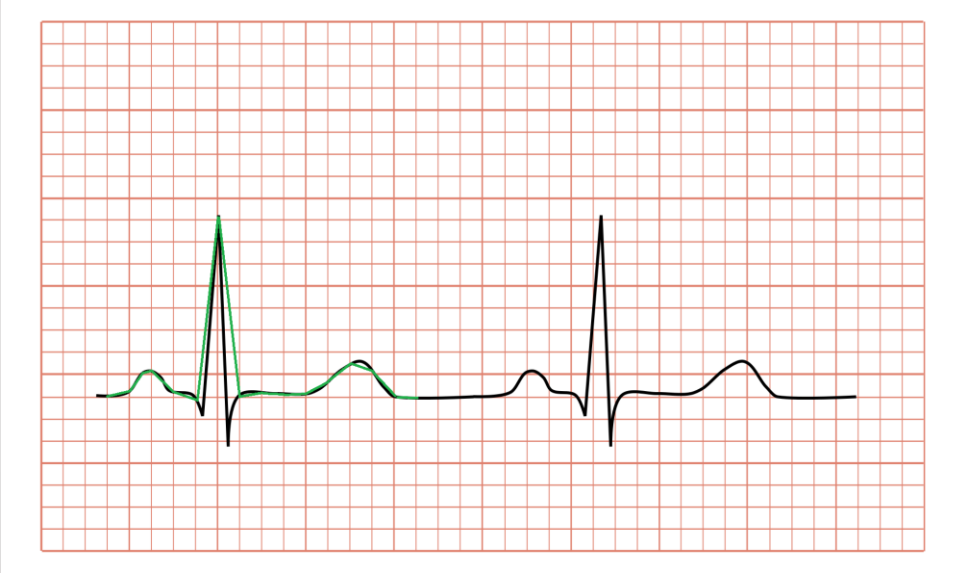
<u>Model dobře popisující historická data ještě nemusí být vhodný pro predikce</u>

Elektrokardiogram: záznam časové změny elektrického potenciálu způsobeného srdeční aktivitou.

Matematika v medicíně

Modelování epidemie

<u>Model dobře popisující historická data ještě nemusí být vhodný pro predikce</u>



$$y(t) = f(t, p_1, \ldots, p_k)$$

- Jak volit parametry optimálně?
- Jak srovnat různé modely?
- Jak pracovat s nejistotou?

Elektrokardiogram: záznam časové změny elektrického potenciálu způsobeného srdeční aktivitou.

Matematika v medicíně

Rakovina dutiny ústní a HPV

Přežití 3 roky od diagnózy

	přežil	zemřel	celkem
HPV pozit.	66	17	83
HPV negat.	45	63	108
celkem	111	80	181

Poměr šancí:

$$\mathrm{OR} = \frac{66 \cdot 63}{17 \cdot 45} \cong 5{,}4$$

➡ Využití: volba způsobu léčby

Vencálek, O. (2016). Praktická ukázka využití testování hypotéz. Matematika-fyzika-informatika, 25 (4), 256-263. https://mfi.upol.cz/files/25/2504/mfi_2504_all.pdf

Bayesova věta

Podmíněné pravděpodobnosti

Mám doma kočku. Jaká je pravděpodobnost, že má 4 nohy?

$$P(4\ nohy \mid kočka)$$

Mám doma čtyřnohé zvíře. Jaká je pravděpodobnost, že je to kočka?

$$P(kočka \mid 4\ nohy)$$

Bayesova věta

Přesnost testů např. na drogy

Pravděpodobnost, že osoba, která <u>je pod vlivem,</u> má <u>pozitivní test</u>:

➡ SENZITIVITA = P(T+ | D+) = 97 %

Pravděpodobnost, že osoba, která <u>není pod vlivem,</u> má <u>negativní test</u>:

➡ SPECIFICITA = P(T- | D-) = 95 %

Bayesova věta

Přesnost testů např. na drogy

Senzitivitu a specificitu testu vyčíslujeme v situaci, kdy víme, v jakém stavu osoba skutečně je.

V praxi nás ale často zajímá opačná otázka:

Jaká je pravděpodobnost, že osoba, která <u>má pozitivní test</u>, <u>je pod vlivem?</u>

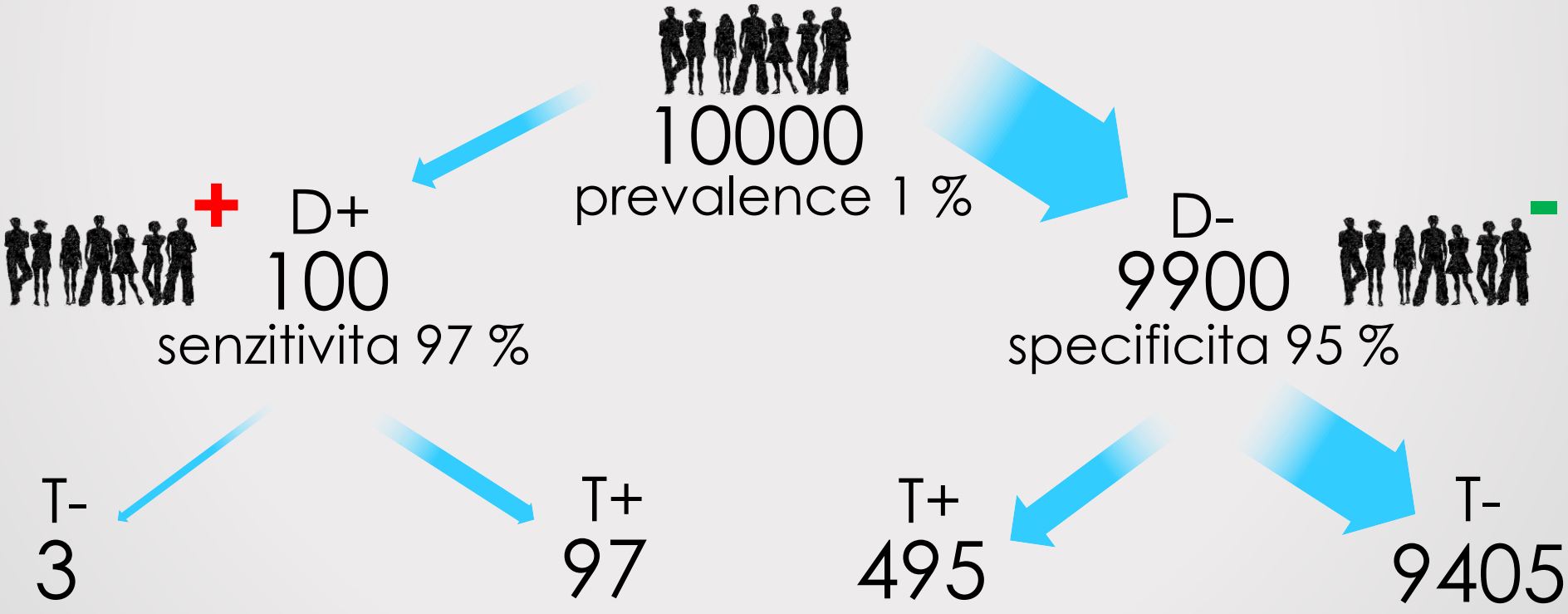
Tedy:

$$P(D+ \mid T+) = ?$$

Bayesova věta

Přesnost testů např. na drogy

Počet osob s pozitivním testem je vedle senzitivity a specificity ovlivněn i <u>prevalencí</u> sledovaného znaku, tedy P(D+).



Bayesova věta

Přesnost testů např. na drogy

Jaká je tedy pravděpodobnost, že je osoba s pozitivním testem pod vlivem?

Počet osob pod vlivem, jejichž test byl pozitivní

$$P(D+|T+) = \frac{97}{97+495} = 0{,}16 \sim 16\ \%$$

Celkový počet osob, jejichž test byl pozitivní

Bayesova věta

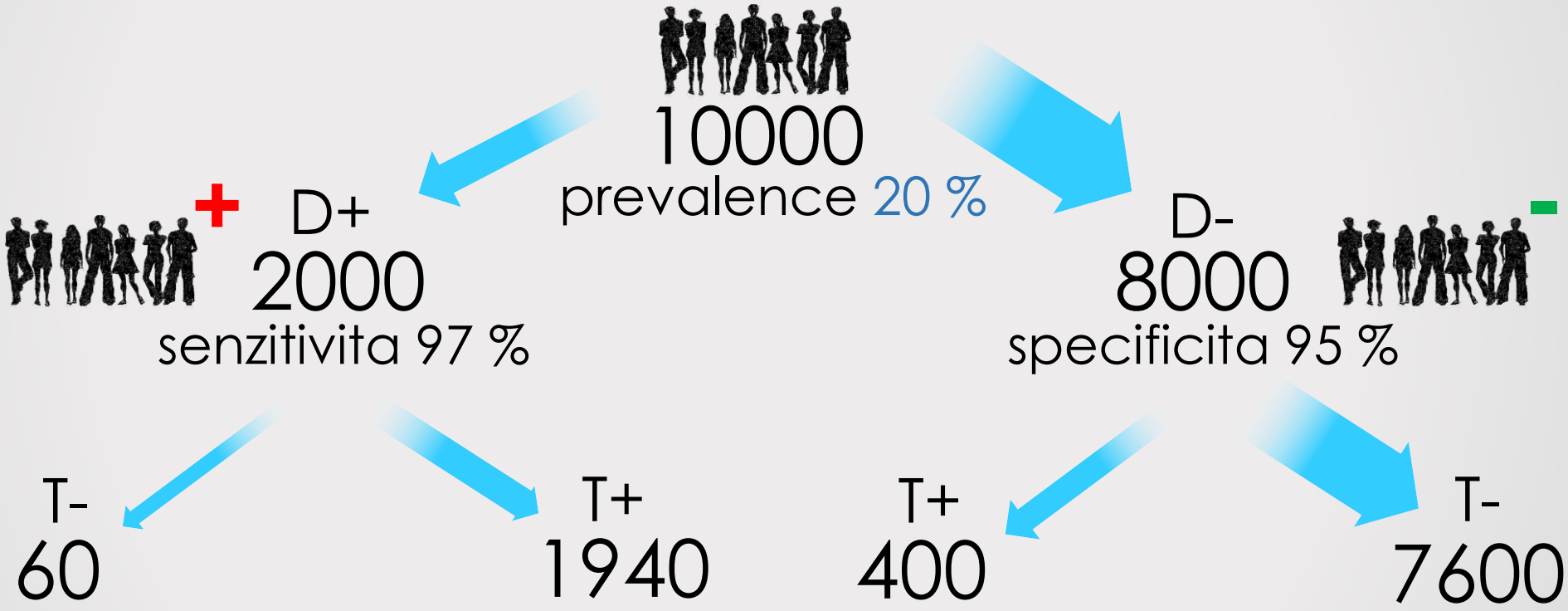
Obecné znění věty

$$P(D+|T+) = \frac{P(T+|D+) \times P(D+)}{P(T+|D+) \times P(D+) + P(T+|D-) \times P(D-)}$$

$$= \frac{P(T+|D+) \times P(D+)}{P(T+)}$$

Bayesova věta

A jak se projeví změna prevalence?



$$P(D+|T+) = \frac{1940}{1940 + 400} = 0{,}83 \sim 83\ \%$$

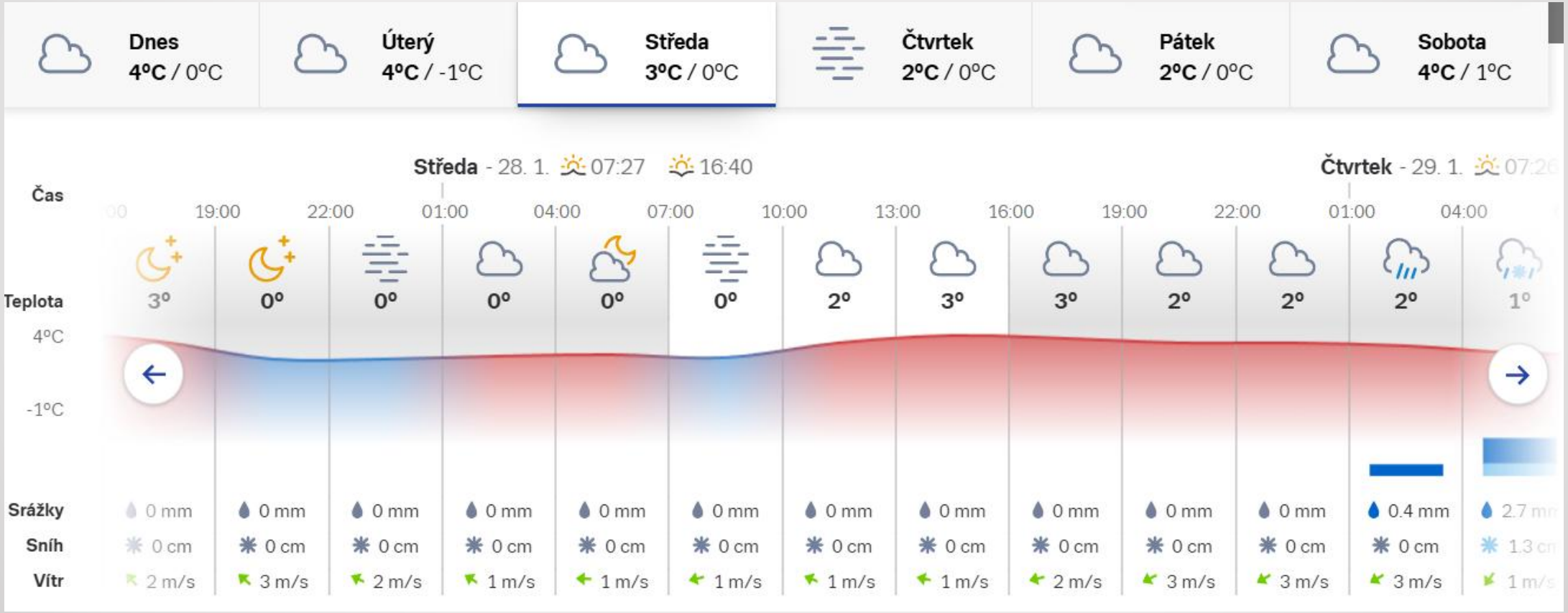
Bayesova věta

<u>A kde všude Bayesovu větu využijeme?</u>

- Soudnictví, např. vyhodnocení pravdivosti tvrzení, že podpis je pravý proti tvrzení, že je zfalšovaný.
- Kontrola kvality: vyhodnocení pravděpodobnosti, že celá várka výrobků je v pořádku, za podmínky, že ve vzorku bylo nalezeno určité množství zmetků
- Vyhodnocení aktuální polohy kosmické lodi při přistání na měsíci
- A je toho mnohem víc …

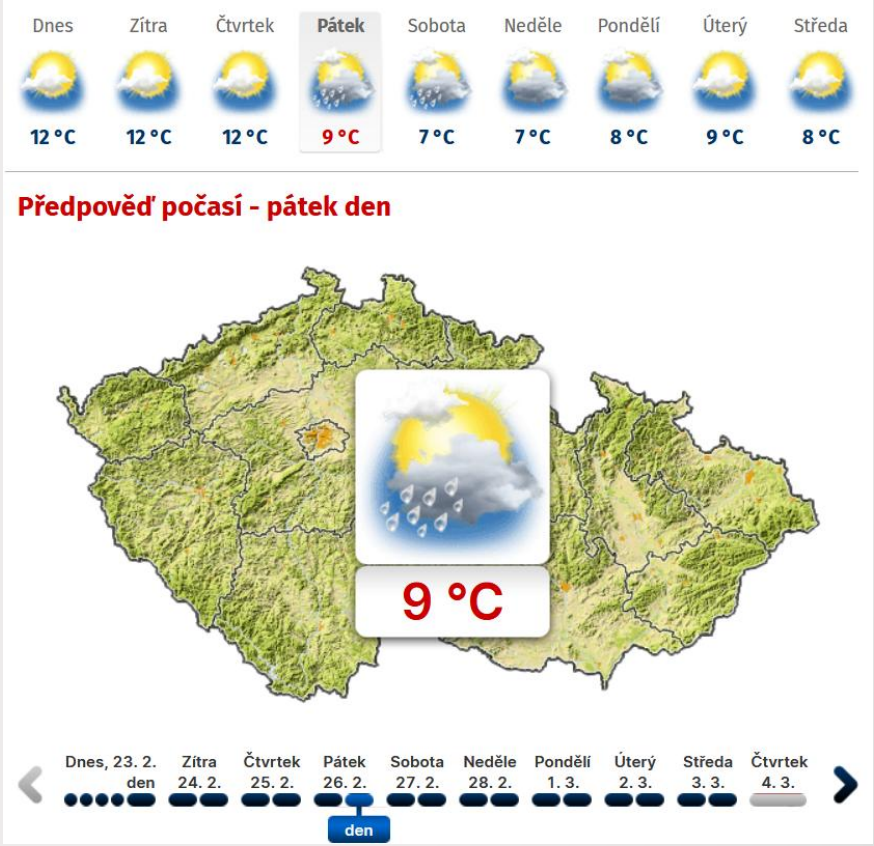
Matematika a předpověď počasí

Předpověď počasí dnes



Matematika a předpověď počasí

Předpověď počasí před 5 lety



Matematika a předpověď počasí

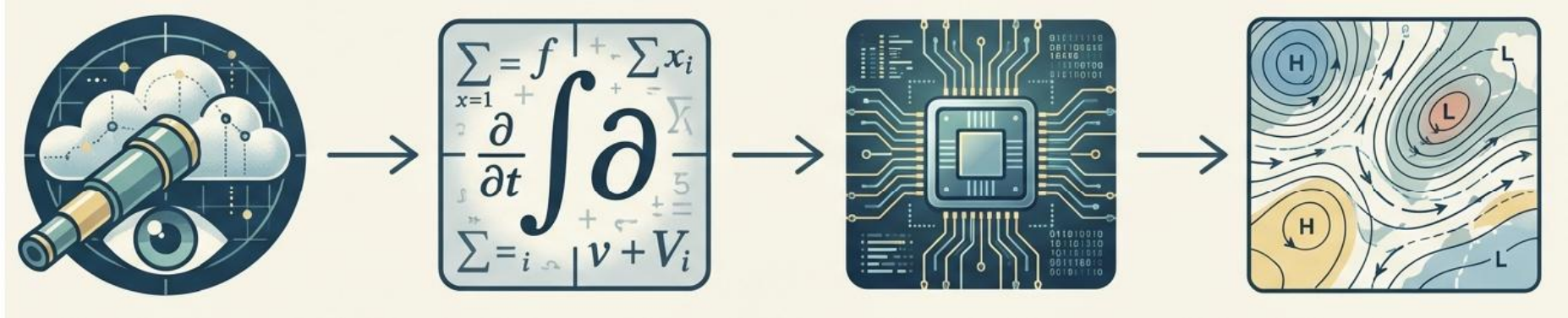
Meteorologie není věštění, ale fyzika tekutin

<u>Vilhelm Bjerknes (1904):</u>

1. Znát s dostatečnou přesností aktuální stav atmosféry
2. Znát fyzikální zákony, které řídí její vývoj (pohybové a termodynamické rovnice)

Atmosféru modelujeme jako stlačitelnou tekutinu na rotující kouli

➡ tlak, teplota, hustota a rychlost větru



Matematika a předpověď počasí

Továrna na počasí: Vize, která předběhla dobu

<u>Lewis Fry Richardson (1922):</u>

první numerická předpověď

<u>Výsledek:</u> nárůst tlaku o 145 hPa za 6 h (meteorologická katastrofa)

<u>Příčina:</u> numerická nestabilita

<u>Koncept:</u> 64 000 lidských počtářů synchronizovaných jako orchestr

➡ Sen se stal realitou až v r. 1950 (počítač ENIAC)

Matematika a předpověď počasí

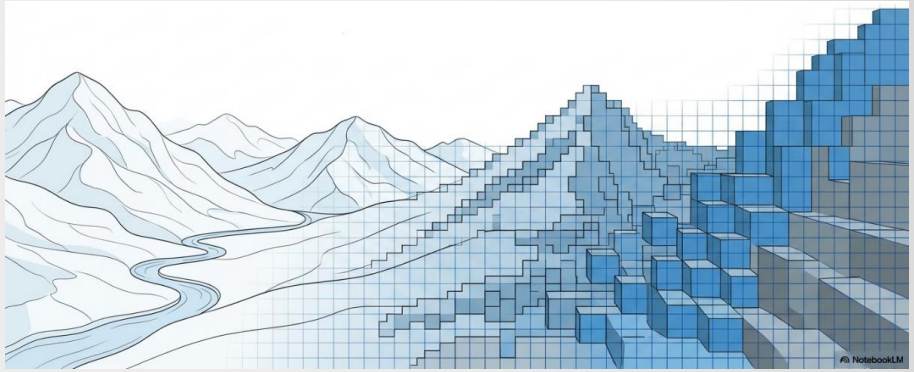
Jak dostat atmosféru do počítače

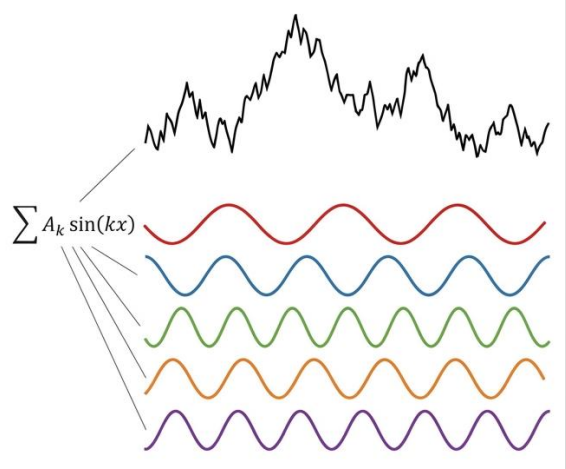
<u>Diskretizace:</u> rozdělení spojitého světa na 3D mřížku

Derivace nahrazeny <u>rozdíly</u>

Body mřížky nahrazeny <u>vlnami</u>

<u>CFL podmínka stability:</u> informace se nesmí šířit rychleji než fyzikální veličiny





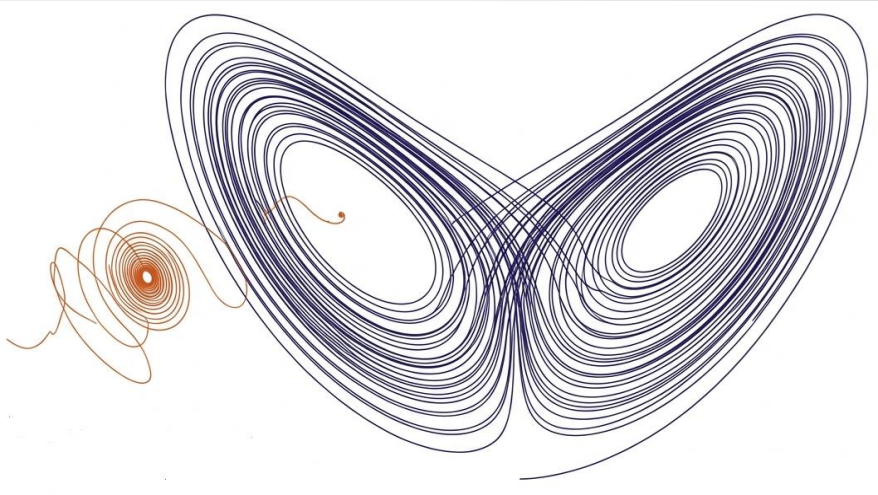
Matematika a předpověď počasí

Efekt motýlích křídel: Meze předpověditelnosti

Edward Lorenz (1963): Objev deterministického chaosu

Citlivost na počáteční podmínky: Zaokrouhlení na 3 desetinná místa místo na 6 změní výsledek

Důsledek: Nikdy neznáme počáteční stav atmosféry dokonale -> teoretický limit předpovědí 10 - 14 dní



Matematika a předpověď počasí

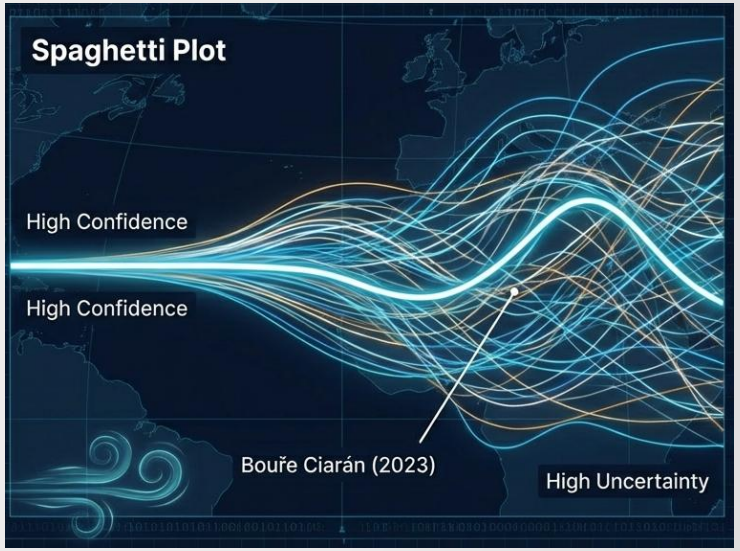
Ensembler: Od jistoty k pravděpodobnosti

Princip: paralelní výpočty s mírně pozměněnými vstupy

Výsledek: pravděpodobnostní scénáře (např. 20% šance na extrém)

Novinka 2025 (ČHMÚ): pravděpodobnostní hydrologie

ALADIN-LAEF: středoevropský ensemble pro lokální extrémy (17 běhů)



Matematika a předpověď počasí

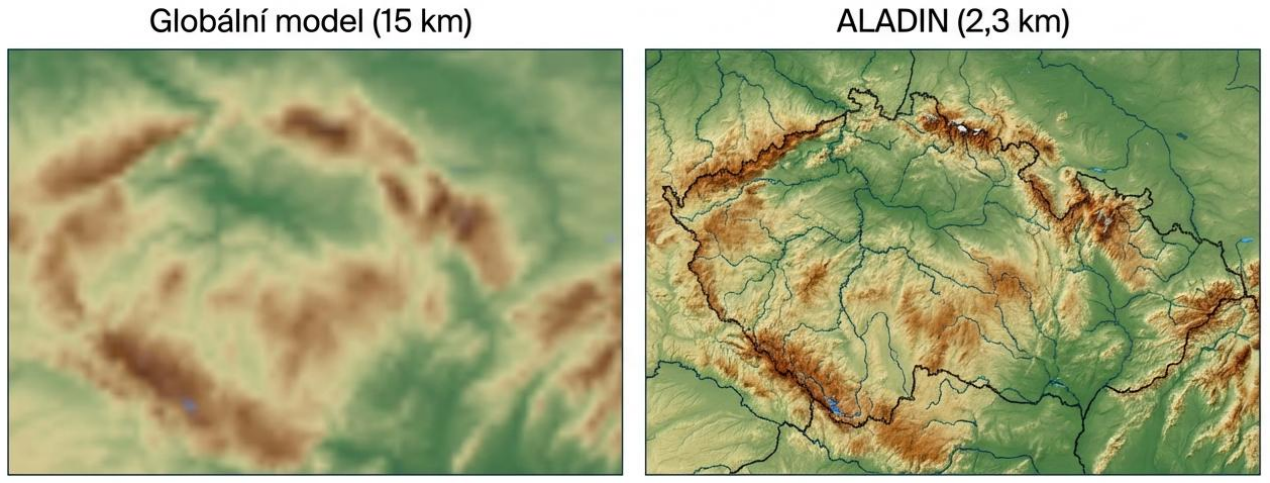
Model ALADIN: Vidět neviditelné

Globální modely (ECMWF, GFS): rozlišení 9 - 25 km

ALADIN: rozlišení 2,3 km (vidí údolí i hory)

Nehydrostatická dynamika: počítá vertikální zrychlení vzduchu

→ letní bouřky, krupobití, přívalové srážky



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Přírodovědecká fakulta
Univerzity Palackého v Olomouci

kma.upol.cz