Průmyslová matematika

Tento předmět navazuje na předměty:

Matematická analýza 3

Funkcionální analýza

Kombinatorická optimalizace

Dynamické systémy

Rovnice matematické fyziky

Scientific computing

Diferenciální rovnice

SZZPM

1. Integrace funkce více proměnných. Lebesgueův integrál, křivkové a plošné integrály.
Konstrukce Lebesgueova integrálu a srovnání s Riemannovým a Newtonovým přístupem. Lebesgueovy prostory. Křivka a plocha (definice, vlastnosti, společné rysy a odlišnosti). Konstrukce křivkového a plošného integrálu 1. (tj. reálné funkce) a 2. druhu (tj. vektorového pole). Motivace a fyzikálních smysl křivkových a plošných integrálů. Souvislost křivkového integrálu s rotací vektorového pole a potenciálem. Souvislost plošného integrálu s divergencí vektorového pole.

2. Obyčejné diferenciální rovnice. ODR a jejich fyzikální význam, existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy, numerické metody.
Využití obyčejných diferenciálních rovnic: vybrané fyzikální či jiné modely. Obyčejné diferenciální rovnice a soustavy: formulace, definice řešení. Počáteční úloha: Peanova a Picardova věta. Numerické metody pro počáteční úlohy: principy odvození, základní třídy metod, konvergence, stabilita. Lineární diferenciální rovnice a systémy: struktura řešení, homogenní vs. nehomogenní soustavy. Okrajové úlohy pro ODR: formulace, Greenova funkce, numerické metody.

3. Lineární a nelineární dynamické systémy. Klasifikace stacionárních bodů. Stabilita. Poincaré- Bendixsonova teorie. Bifurkace. Chaos.
Autonomní soustavy diferenciálních rovnic, jejich řešení a orbity. Kritické body a jejich (asymptotická) stabilita: příklady. Fázový portrét. Planární lineární systémy: klasifikace fázových portrétů pomocí maticových invariantů (determinant a stopa matice) a nelineární systémy (linearizace v okolí kritických bodů, topologická ekvivalence, Grobmanova-Harmanova věta). Poincaré- Bendixsonova teorie. Bifurkace. Chaos.

4. Banachovy a Hilbertovy prostory. Operátory a funkcionály, duál a reflexivita, slabá konvergence a kompaktnost.
Motivace pro funkcionální analýzu. Prostory, metriky, normy, skalární součiny a jejich vlastnosti. Konvergence. Operátory a jejich příklady. Základní vlastnosti operátorů. Aplikace funkcionální analýzy při řešení pevnobodových a variačních úloh. Dimenze prostoru, báze a ortonormální systémy. Slabá konvergence a její vztah k silné konvergenci. Duální a reflexivní prostory a jejich vztah k Hilbertovým prostorů přes Rieszovu větu. Kompaktní množiny a operátory včetně příkladů.

5. Exaktní metody kombinatorické optimalizace. Princip duality v lineárním programování, různé varianty simplexové metody a jejich využití, výhody a nevýhody exaktních metod.
Formulace úloh lineárního programování (LP) a celočíselného lineárního programování (CLP). Teorie duality v LP: základní poznatky a význam. Simplexová a duální simplexová metoda: základní principy, popis, výhody a nevýhody. Základní obecné metody CLP: základní idea, popis, složitost. Kombinatorická optimalizace: příklady úloh, souvislost s teorií grafů a CLP. Primárně-duální simplexová metoda: základní princip, vhodné úlohy pro využití.

6. Heuristické metody kombinatorické optimalizace. Příklady využití, deterministický versus stochastický přístup, základní algoritmy, jejich výhody a nevýhody.
Problém obchodního cestujícího (TSP): popis a formulace úlohy, formulace jako CLP. Heuristiky a metaheuristiky: základní rozdělení metod, příklady a popis metod pro TSP, využití pro další úlohy. Metoda LP relaxace pro TSP: souvislost s CLP formulací úlohy, základní princip, porovnání výhod a nevýhod s heuristikami.

7. Rovnice matematické fyziky: Eliptické rovnice, parabolické a hyperbolické rovnice. Motivace a formulace problémů, konstrukce řešení, možnosti numerického řešení.
Odvození rovnic vedení tepla a vlnové rovnice. Základní klasifikace rovnic. Fourierova metoda pro parabolické a hyperbolické rovnice. Vlnová rovnice a rovnice vedení tepla na celé reálné ose – metody řešení. Harmonické funkce a jejich vlastnosti – věta o třech potenciálech, věta o střední hodnotě. Souvislost harmonických funkcí s eliptickými rovnicemi. Principy maxima. Idea numerických metod.

8. Fourierovské metody. Fourierovy řady, Fourierova transformace a jejich použití.
Fourierova řada spojité periodické funkce. Konvergence Fourierových řad (příklady a protipříklady). Gibbsův jev. Fourierova transformace v Lebesgueových prostorech, Schwarzův prostor a základní poznatky o distribucích. Příklady využití Fourierových řad, FT či DFT na řešení konkrétních problémů (například řešení ODE, PDE, analýza signálu).