

## Základní matematické disciplíny

(Matematická analýza 1, 2, 3, Lineární algebra I, Algoritmy 1 a 2, Diskrétní matematika, Základy numerických metod, Optimalizace, Pravděpodobnost)

Státnicové otázky:

### 1. Matice a soustavy lineárních rovnic

Soustavy lineárních rovnic a jejich řešitelnost. Gaussova eliminační metoda, LU rozklad matice. Inverzní matice a zobecněná inverze (Moore-Penrose) a jejich souvislost s řešením soustav lineárních rovnic. Vlastní čísla a vlastní vektory matic, jejich vlastnosti a geometrická interpretace. Reálné symetrické matice, spektrální rozklad matice. Pozitivně a negativně definitní matice a jejich použití v optimalizaci a teorii pravděpodobnosti. Jacobiho a Hessova matice a jejich použití v matematické analýze. Numerické metody řešení soustav lineárních rovnic a hledání vlastních čísel a vlastních vektorů. Matice a grafy, role vlastních čísel a vektorů v teorii grafů.

### 2. Spojitost.

Spojitost funkce jedné a více proměnných, definice, interpretace, vlastnosti. Funkce spojité na intervalu a jejich význačné vlastnosti. Vztah spojitosti, limity a derivace. Darbouxova vlastnost a spojitost. Rozvoj spojitých funkcí do řad a jejich aplikace. Spojitost distribuční funkce pro rozdělení náhodné veličiny a náhodného vektoru a její důsledky. Spojitost integrálu závislého na parametru. Prostor spojitých funkcí.

### 3. Konvergence.

Limita posloupnosti reálných čísel. Limita funkce jedné a více reálných proměnných. Konvergence v metrických prostorech. Bodová, stejnoměrná konvergence funkcí a konvergence skoro všude. Záměna limity a integrálu, derivace a integrálu, sumy a integrálu. Typy konvergencí náhodných veličin a jejich vztahy. Konvergence v míře, konvergence podle pravděpodobnosti. Konvergence numerických metod. Užití limit v teorii pravděpodobnosti (práce s distribuční funkcí, vztah k marginálnímu rozdělení).

### 4. Derivace.

Derivace funkce jedné a více proměnných, směrová derivace, parciální derivace, totální diferenciál, gradient, vztahy mezi různými typy derivací. Geometrická a praktická interpretace. Numerické metody pro výpočet derivace. Vztah derivace a spojitosti. Vlastnosti diferencovatelných funkcí, věty o střední hodnotě. Derivace vektorových funkcí. Potenciál, rotace, divergence. Derivace integrálu závislého na parametru. Výskyt derivací v integrálním počtu (substituce, Jakobiány a jejich význam). Užití derivací v optimalizaci a v teorii pravděpodobnosti (vztah mezi distribuční funkcí a hustotou).

### 5. Integrál.

Primitivní funkce, její vlastnosti a souvislost s Riemannovým integrálem (Newtonův-Leibnizův vzorec). Základní metody integrace. Aplikace integrálního počtu. Věty o střední hodnotě. Numerické metody a Monte Carlo metody pro výpočet integrálu. Integrální počet funkce více proměnných. Lebesgueův integrál a jeho vlastnosti. Fubiniho věta a věta o substituci. Využití integrálního počtu v teorii pravděpodobnosti, integrál hustoty náhodné veličiny a náhodného vektoru, nezávislost náhodných veličin.

### 6. Extrémy funkcí, optimalizace.

Extrémy funkce jedné a více proměnných. Lokální a globální extrémy. Vázané extrémy. Podmínky optimality prvního a druhého řádu, KKT podmínky a další kvalifikační podmínky. Geometrická interpretace. Numerické metody nepodmíněné optimalizace. Metody optimalizace pro nediferencovatelné funkce. Metody optimalizace pro kvadratické funkce. Metody optimalizace pro obecné funkce. Určení délky kroku (Armijova podmínka, backtracking, Wolfeho podmínky). Monte Carlo optimalizace.

## **7. Grafy a základní algoritmy**

Definice grafu a základní typy grafů. Základní pojmy (stupeň uzlu, cesta, Eulerovská a Hamiltonovská cesta, komponenty). Centrality grafu a co vyjadřují (degree, eigenvector, Katz, closeness, betweenness centrality, pagerank, hubs and authorities). Algoritmy (Kruskalův, Primův, Dijkstrův, Floyd-Warshallův algoritmus, prohledávání do hloubky a šířky, barvení hran a uzlů. Třídění a vyhledávání (vymezení a popis vybraného algoritmu). Základní třídící algoritmy. Základní datové struktury.

## **8. Náhodná veličina, náhodný vektor.**

Pravděpodobnost, náhodná veličina, náhodný vektor, rozdělení pravděpodobností, distribuční funkce, hustota, pravděpodobnostní funkce. Základní rozdělení pravděpodobnosti. Základní číselné charakteristiky náhodné veličiny a náhodného vektoru. Marginální a podmíněné rozdělení, nezávislost náhodných veličin. Bayesova věta pro pravděpodobnosti a hustoty. Základní typy konvergenčí náhodných veličin a vztahy mezi nimi.