

UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM

Department of Mathematical Analysis
and Applications of Mathematics

ODAM
2001



Editors: Jiří V. Horák & Miloslav Závodný

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
Tomkova 40, 779 00 Olomouc — tel.: (42 68) 412 604, 412 210

Olomoucké dny aplikované matematiky 2001

Vážené kolegyně a kolegové,

předkládáme Vám sborník přednášek z konference Olomoucké dny aplikované matematiky 2001, která se konala ve dnech 26. září až 27. září 2001 v budovách PřF UP Olomouc, tentokrát se zaměřením především na matematické modelování, zejména numerické a počítačové modelování úloh mechaniky kontinua.

V tomto sborníku jsou však publikovány jen ty příspěvky, jež byly dodány včas v oznámeném termínu a v požadované formě (TEX). Publikované texty neprošly žádnými korekturami, a tak za jejich odbornou i jazykovou stránku nesou odpovědnost výhradně jejich autoři.

Děkujeme všem aktivním účastníkům za jejich přednášky a autorům písemných textů za jejich včasné odeslání editorům. Organizátory konference potěšila zejména aktivní účast studentů doktorandského studia katedry MAaAM, kteří referovali o výsledcích své výzkumné činnosti.

Na shledání v Olomouci na příštím ODAMu se těší a srdečně zve organizační výbor.

Jiří Horák, Miloslav Závodný

Jiří V. Horák

Department of Mathematical Analysis and
Applications of Mathematics, Faculty of
Science, Palacký University, Tomkova 40,
779 00 Olomouc, Czech Republic
jhorak@risc.upol.cz

Miloslav Závodný

Department of Mathematical Analysis and
Applications of Mathematics, Faculty of
Science, Palacký University, Tomkova 40,
779 00 Olomouc, Czech Republic
zavodny@risc.upol.cz

OBSAH — CONTENTS

<i>Khalid ALESAWI</i> : On Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control and Least Square Update for Quadratic Programming	5
<i>Zdeněk DOSTÁL, Francisco A. M. GOMES, Sandra A. SANTOS</i> : FETI domain decomposition for modelling of 3D block structure	15
<i>Irena M. HLAVÁČOVÁ, Libor M. HLAVÁČ</i> : Poznámky k řešitelnosti jedné třídy semikoercivních 1D úloh 4. řádu	27
<i>Jiří V. HORÁK</i> : O dekompozici a zjednodušení 1D úlohy svázané termopružnosti: II. nerovnice	39
<i>Jiří V. HORÁK, Petr FIBINGER</i> : Metoda separace proměnných při analýze pohybu kapaliny v magnetodynamickém kanálu	75
<i>Horymír NETUKA</i> : Příspěvek k řešení semikoercivní kontaktní úlohy bez tření	101
<i>Vít VONDRÁK</i> : Effective Sensitivity Analysis in Shape Optimization . . .	127



Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Dept of Math. Anal. and Appl. of Math.
ODAM (2001) 5–14

On Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control and Least Square Update for Quadratic Programming

KHALID ALESAWI

*VŠB – Technical University of Ostrava,
tr. 17. listopadu 15, CZ-70833 Ostrava, Czech Republic
e-mail: khalid.alesawi@vsb.cz*

Abstract

In this paper we consider an augmented Lagrangian type algorithm with the least square update of the Lagrange multipliers and adaptive precision control for strictly convex equality constrained quadratic programming problems. Global convergence and boundedness of the penalty parameter are reviewed and an error estimate is given that does not have any term that accounts for the inexact solution of the auxiliary problems. Theoretical comparisons and numerical experiments illustrate efficiency of the algorithm presented.

Key words: Quadratic programming, equality constraints, augmented Lagrangian, adaptive precision control.

1 Introduction

We shall be concerned with the problem of finding a minimizer of a quadratic function subject to linear equality constraints, that is

$$\text{minimize } h(x) \quad \text{subject to } x \in \Omega \quad (1.1)$$

with $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^p : Dx = d\}$, $h(x) = \frac{1}{2}x^T Bx - c^T x$, $c, x \in \mathbb{R}^p$, $d \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ symmetric positive definite, and $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a full rank matrix. An efficient algorithm for the solution of (1.1) is the augmented Lagrangian method with adaptive precision control proposed by Dostál, Friedlander and Santos [4, 5]. In this paper, we review our results concerning the effect of introducing the least square update into the algorithm [4]. In particular, we review convergence theory including the estimates of the rate of convergence of the modified algorithm and give results of numerical experiments.

As in the original augmented Lagrangian method [3], called also the method of multipliers, we exploit the auxiliary problems of the type

$$\text{minimize } L(x, \mu^k, \rho_k) \quad \text{subject to } x \in \mathbb{R}^p \quad (1.2)$$

where

$$L(x, \mu^k, \rho_k) = h(x) + (\mu^k)^T (Dx - d) + \frac{\rho_k}{2} \|Dx - d\|^2 \quad (1.3)$$

is the augmented Lagrangian function, $\mu^k = (\mu_1^k, \dots, \mu_m^k)^T$ is the vector of Lagrange multipliers for the equality constraints, ρ_k is the penalty parameter, and $\|\cdot\|$ denotes the Euclidian norm. The precision of the approximate solution x^k of the auxiliary problems will be measured by the Euclidian norm of the error of feasibility and of the gradient of the augmented Lagrangian. The latter is always denoted by g , so that

$$g(x, \mu, \rho) = \nabla_x L(x, \mu, \rho) = \nabla h(x) + D^T \mu + \rho D^T (Dx - d). \quad (1.4)$$

The paper is organized as follows. In Section 2 we present the algorithm and show that it is well defined. In Section 3 new estimates for the least square update are found. In Section 4 the rate of converges for large penalty parameters is discussed. In Section 5 theoretical comparison of the least square update with the original one is considered. Computational implementation and numerical experiments are presented in Section 6. Finally, some conclusions are discussed in Section 7. The following notation will be used throughout the whole paper:

- \hat{x} and $\hat{\mu}$ are the Kuhn–Tucker pair of (1.1).
- β_1 and β_m are, respectively, the smallest and largest eigenvalues of $DB^{-1}D^T$.
- $\check{\mu} = \hat{\mu} + \rho(Dx - d)$.
- $\tilde{\mu} = -(DD^T)^{-1}D(Bx - c)$.
- $r = g(x, \mu, \rho)$.

2 Algorithm for Equality Constraints with Adaptive Precision Control and the Least Squares Update

The following algorithm is a modification of the augmented Lagrangian method for the solution of strictly convex quadratic programming problems with equality constraints that enables adaptive precision control of the solution of auxiliary problems proposed by Dostál, Friedlander and Santos [4].

Algorithm 2.1 Given $\eta_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $M > 0$, $\rho_0 > 0$, and $\mu^0 \in \mathbb{R}^m$, set $k = 0$.

Step 1. {Inner iteration with adaptive precision control.}
Find x^k such that

$$\|g(x^k, \mu^k, \rho_k)\| \leq M\|Dx^k - d\|. \quad (2.1)$$

Step 2. {Update μ .}

$$\mu^{k+1} = -(DD^T)^{-1}D(Bx^k - c). \quad (2.2)$$

Step 3. {Update ρ, η .}
If $\|Dx^k - d\| \leq \eta_k$ then

$$\rho_{k+1} = \rho_k, \quad \eta_{k+1} = \alpha\eta_k \quad (2.3)$$

else

$$\rho_{k+1} = \beta\rho_k, \quad \eta_{k+1} = \eta_k. \quad (2.4)$$

Step 4. Set $k = k + 1$ and return to the Step 1.

In Step 1 we can use any convergent algorithm for minimizing the strictly convex quadratic function such as a preconditioned conjugate gradient method [2]. The algorithm differs from the original one [4] in step 2 that replaces $\mu^{k+1} = \mu^k + \rho(Dx^k - d)$. The next lemma shows that Algorithm 2.1 is well defined for any update, that is, any convergent algorithm for the solution of the auxiliary problem required in Step 1 will generate either x^k that satisfies (2.1) in a finite number of steps or a sequence of approximations that converges to the solution of (1.1). It is also clear that there is no hidden enforcement of exact solution in (2.1) and consequently typically inexact solutions of the auxiliary unconstrained problems are obtained in Step 1.

Lemma 2.2 Let $M > 0$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ and $\rho \geq 0$ be given and let $\{x^k\}$ denote any sequence that converges to the unique solution \bar{x} of the problem

$$\text{minimize } L(x, \mu, \rho). \quad (2.5)$$

Then $\{x^k\}$ either converges to the solution \hat{x} of problem (1.1) or there is an index k such that

$$\|g(x^k, \mu, \rho)\| \leq M\|Dx^k - d\|. \quad (2.6)$$

Proof See [4].

The general convergence properties of the algorithm 2.1 are summed up in the following theorem.

Theorem 2.3 *Let the sequences $\{x^k\}$, $\{\mu^k\}$ and $\{\rho_k\}$ be generated by Algorithm 2.1. The following statements hold:*

- i) $\{\rho_k\}$ is bounded.
- ii) $\{\mu^k\}$ is bounded.
- iii) $\{x^k\}$ is bounded.
- iv) The sequences $\{x^k\}$ and $\{\mu^k\}$ generated by Algorithm 2.1. converge to \hat{x} and $\hat{\mu}$, respectively.

Proof See [1].

3 Estimates for the Least Squares Update

Here we shall give some estimates that give some insight into Algorithm 2.1.

Theorem 3.1 *Let $p \geq m$ be a given integer, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ be a positive definite matrix, $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a full rank matrix, $c \in \mathbb{R}^p$, $\rho > 0$, and let $(\hat{x}, \hat{\mu})$ denote the Kuhn–Tucker pair for the problem*

$$\text{minimize } L(x, \mu, \rho) \quad \text{subject to } x \in \mathbb{R}^p. \quad (3.1)$$

Then any vectors $x \in \mathbb{R}^p$ and $\mu \in \mathbb{R}^m$ satisfy the following inequality

$$\|\tilde{\mu} - \hat{\mu}\| \leq \frac{\rho^{-1}}{\rho^{-1} + \beta_1} (\|\mu - \hat{\mu}\| + \beta_1^{-1} \|D\| \|B^{-1}\| \|r\|) \quad (3.2)$$

where

$$\tilde{\mu} = -(DD^T)^{-1}D(Bx - c) \quad (3.3)$$

$$r = g(x, \mu, \rho) \quad (3.4)$$

$$\beta_1 = \lambda_1(DB^{-1}D^T) \quad (3.5)$$

$$c = B\hat{x} + D^T\hat{\mu} \quad (3.6)$$

$$D\hat{x} = d. \quad (3.7)$$

Proof See [1].

The previous theorem gives an upper bound on the distance between the updated multiplier and the correct one that is proportional to the error due to inexact minimization in Step 1 and to the error in the previous multiplier estimate. This bound is related to the results of proposition 2.4 in [3].

Lemma 3.2 *Let $p \geq m$ be a given integer, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$, be positive definite, $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a full rank matrix, $c \in \mathbb{R}^p$, $\rho > 0$, and let $(\hat{x}, \hat{\mu})$ denote the Kuhn–Tucker pair for the problem (1.1). Then for any vectors $x \in \mathbb{R}^p$ and $\mu \in \mathbb{R}^m$,*

$$\|\mu - \hat{\mu}\| \geq \frac{1}{\beta_1} [(1 + \rho\beta_1)\|Dx - d\| - \|D\|\|B^{-1}\|\|r\|]. \quad (3.8)$$

Proof See [1].

Lemma 3.2 gives us a computable lower bound of the norm of the error in the approximation of the Lagrange multipliers and is important in what follows.

4 Rate of Converges for Large Penalty Parameters

The following theorem provides us with useful bounds.

Theorem 4.1 *Let $M > 0$, be any constant, $\rho > \max\{0, \frac{M\|D\|\|B^{-1}\|-1}{\beta_1}\}$ and*

$$c(\rho) = \frac{M\|D\|\|B^{-1}\|}{\rho\beta_1 + \rho^{-1} - \rho^{-1}M\|D\|\|B^{-1}\|} \quad (4.1)$$

Then

$$\|r\| \leq M\|Dx - d\| \quad (4.2)$$

implies

$$(i) \quad \|r\| \leq \rho^{-1}M\beta_1c(\rho)\|\mu - \hat{\mu}\| \quad (4.3)$$

$$(ii) \quad \|\tilde{\mu} - \hat{\mu}\| \leq \rho^{-1}c(\rho)\|\mu - \hat{\mu}\| \quad (4.4)$$

$$(iii) \quad \|Dx - d\| \leq \rho^{-1}\beta_1c(\rho)\|\mu - \hat{\mu}\|. \quad (4.5)$$

Proof See [1].

The problem of finding the bounds of the norm of gradients that yield estimates of the updated Lagrange multipliers is now reduced to obtaining bounds on $c(\rho)$. In particular, we can get the following qualitative results.

Corollary 4.2 *Under the assumptions of theorem 4.1, the following statements holded:*

i) *We can find out $\bar{\rho}_{u1} > 0$ such that for any $\bar{\rho}_{u1} \leq \rho$*

$$\|r\| \leq \frac{\bar{\rho}_{u1}}{\rho}\|\mu - \hat{\mu}\| \quad (4.6)$$

ii) *We can find out $\bar{\rho}_{u2} > 0$ such that for any $\bar{\rho}_{u2} \leq \rho$*

$$\|\tilde{\mu} - \hat{\mu}\| \leq \frac{\bar{\rho}_{u2}}{\rho}\|\mu - \hat{\mu}\| \quad (4.7)$$

iii) *We can find out $\bar{\rho}_{u3} > 0$ such that for any $\bar{\rho}_{u3} \leq \rho$*

$$\|Dx - d\| \leq \frac{\bar{\rho}_{u3}}{\rho}\|\mu - \hat{\mu}\| \quad (4.8)$$

5 Theoretical Comparison with the Original Algorithm

For convenience, let us recall the original algorithm [4].

Algorithm 5.1 *Given $\eta_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $M > 0$, $\rho_0 > 0$, and $\mu^0 \in \mathbb{R}^m$, set $k = 0$. Step 1. {Inner iteration with adaptive precision control.}*

Find x^k such that

$$\|g(x^k, \mu^k, \rho_k)\| \leq M\|Dx^k - d\|. \quad (5.1)$$

Step 2. {Update μ .}

$$\mu^{k+1} = \mu^k + (Dx^k - d). \quad (5.2)$$

Step 3. {Update ρ, η .}

If $\|Dx^k - d\| \leq \eta_k$ then

$$\rho_{k+1} = \rho_k, \quad \eta_{k+1} = \alpha\eta_k \quad (5.3)$$

else

$$\rho_{k+1} = \beta\rho_k, \quad \eta_{k+1} = \eta_k. \quad (5.4)$$

Step 4. Set $k = k + 1$ and return to the Step 1.

The estimates for the original method of multiplier read as follows.

Theorem 5.2 *Let $p \geq m$ be a given integer, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ be positive definite, $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a full rank matrix, $c \in \mathbb{R}^p$, $\rho > 0$, and let $(\hat{x}, \hat{\mu})$ denote the Kuhn-Tucker pair for the problem*

$$\text{minimize } L(x, \mu^k, \rho_k) \quad \text{subject to } x \in \mathbb{R}^p \quad (5.5)$$

Then for any vectors $x \in \mathbb{R}^p$ and $\mu \in \mathbb{R}^m$,

$$\|\check{\mu} - \hat{\mu}\| \leq \frac{\|D\|\|B^{-1}\|}{\beta_1 + \rho^{-1}}\|r\| + \rho^{-1} \frac{1}{\beta_1 + \rho^{-1}}\|\mu - \hat{\mu}\|. \quad (5.6)$$

where

$$\check{\mu} = \mu + \rho(Dx - d) \quad (5.7)$$

Lemma 5.3 *Let $p \geq m$ be a given integer, $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ be a positive definite matrix, $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a full rank matrix, $c \in \mathbb{R}^p$, $\rho > 0$, and let $(\hat{x}, \hat{\mu})$ denote the Kuhn-Tucker pair for the problem (1.1). Then for any vectors $x \in \mathbb{R}^p$ and $\mu \in \mathbb{R}^m$,*

$$\|\mu - \hat{\mu}\| \geq \frac{1}{\beta_1} [(1 + \rho\beta_1)\|Dx - d\| - \|D\|\|B^{-1}\|\|r\|]. \quad (5.8)$$

Comparing the update method with the original one, we see from inequalities (3.2) and (5.6) that the upper bound for the least square update is stronger than that one for the original. The lower bound is the same for both methods as we can see from the inequalities (3.8) and (5.8), and it is different from the inequality (2.18) in [4].

6 Numerical Experiments

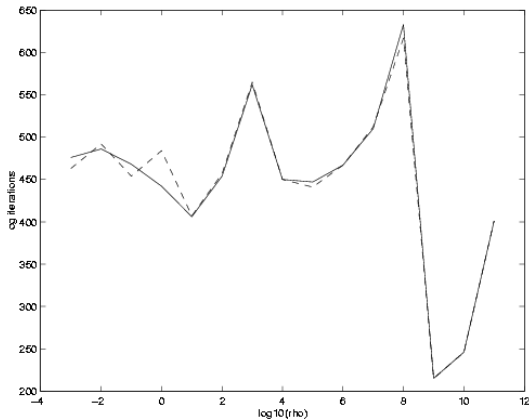
The algorithm has been implemented in MATLAB and tested on the solution of a model problem resulting from the finite difference discretization of the following continuous problem:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega_i} |\nabla u_i|^2 d\Omega - \int P u_i d\Omega \right) \\ & \text{subject to } u_1(0, y) = u_2(y) = 0 \text{ and } u_1(y) = u_2(y) \text{ for } x \in [0, 1], \end{aligned}$$

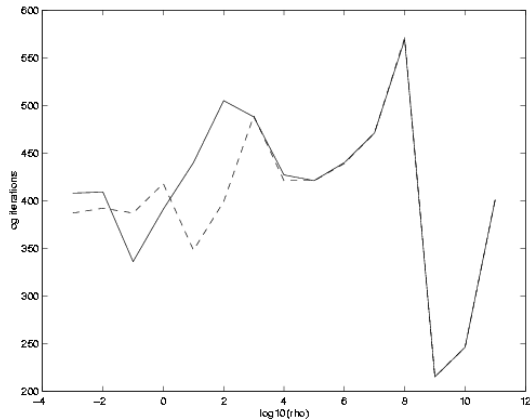
where $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Omega_2 = (1, 2) \times (0, 1)$, $P(x, y) = -1$ for $(x, y) \in (0, 1) \times (0.5, 1)$, $P(x, y) = 0$ for $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 0.5)$, $P(x, y) = 2$ for $(x, y) \in (1, 2) \times (0, 0.5)$, $P(x, y) = 0$ for $(x, y) \in (1, 2) \times (0.5, 1)$.

The discretization scheme consists of a regular grid of 21×21 nodes for each subdomain Ω_i . The initial approximation used was the null vector. The problem was solved with all possible combinations of $M \in \{10^{-1}, 10^1, 10^2\}$ and $\rho_0 \in \{10^0, 10^2, 10^4, 10^6, 10^8, 10^{10}\}$. The stopping criteria used were the relative precision $\|\nabla L\|/\|P\| < 10^{-5}$ and the feasibility tolerance $\|Bx\| \leq 10^{-8}$. For the other parameters, the choices $\alpha = .1$, $\beta = 10$ and $\eta = 1$ were made. For both algorithms, the penalty parameter was updated for $\rho_0 \in \{10^0, 10^1\}$, $M \in \{10^{-1}, 10^1, 10^3\}$, and for $M = 10^3, \rho_0 \in \{10^2, 10^3\}$. The computational results suggest that the use of the large penalty parameters in both algorithms is efficient for this type of problems and both methods have the same results.

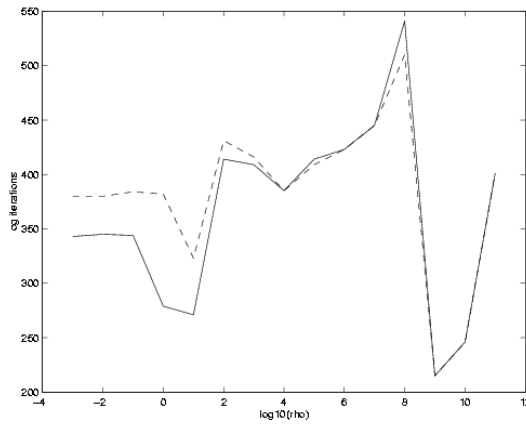
These results are in agreement with the theory which predicts that for the large penalty parameters the number of outer iterations is small regardless the update. The number of the outer iterations and the total number of conjugate gradient iterations used in the solution of the auxiliary problems in Step 1 are in Graphs.



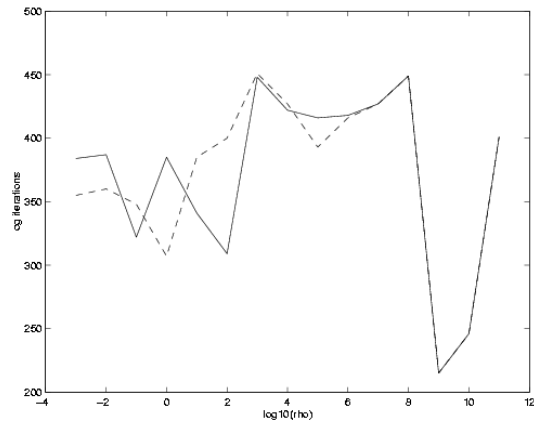
Graph of cg iterations for $M = 0.1$



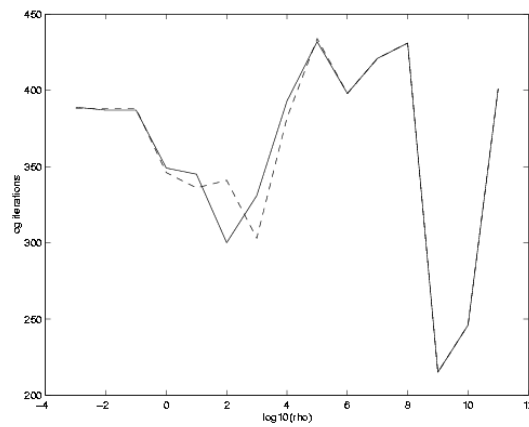
Graph of cg iterations for $M = 1$



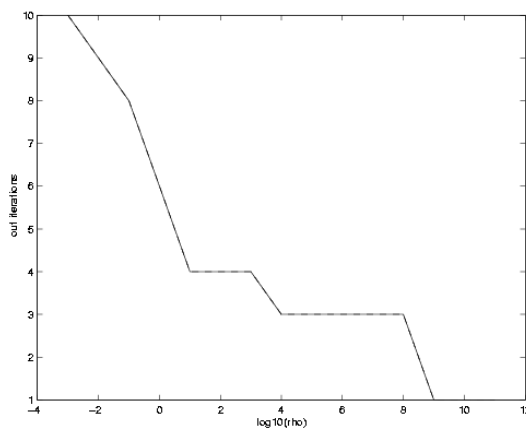
Graph of cg iterations for $M = 10$



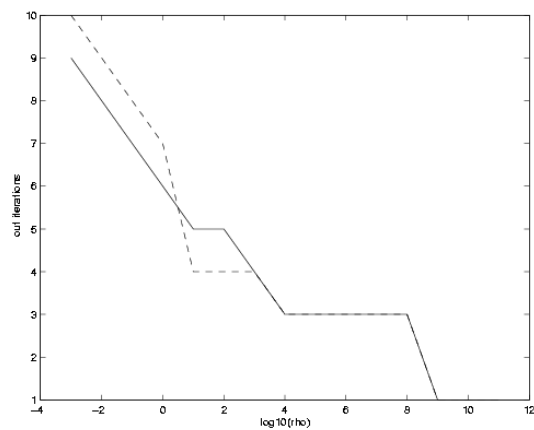
Graph of cg iterations for $M = 100$



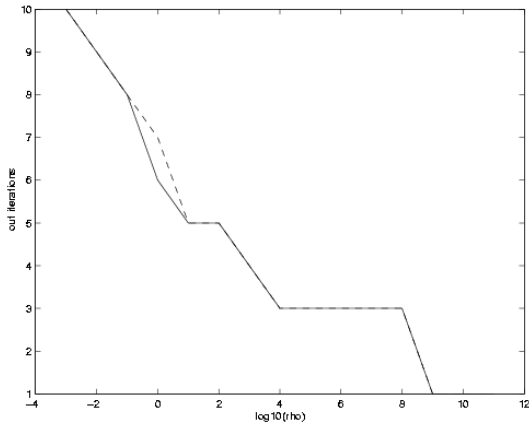
Graph of cg iterations for $M = 1000$



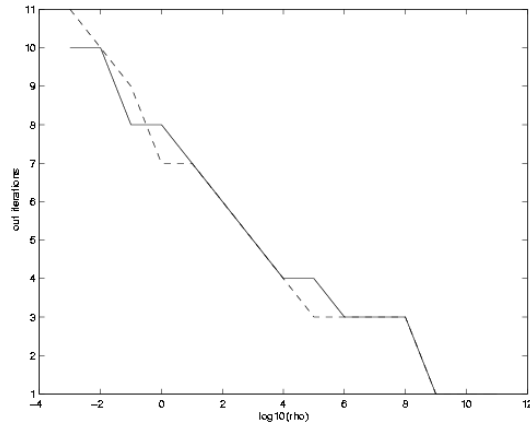
Graph of out iterations for $M = 0.1$



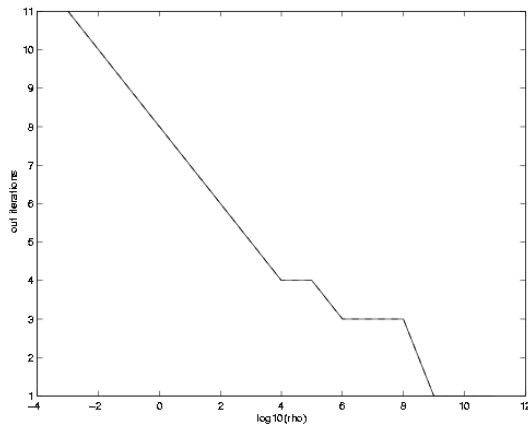
Graph of out iterations for $M = 1$



Graph of out iterations for $M = 10$



Graph of out iterations for $M = 100$



Graph of out iterations for $M = 1000$

7 Conclusions

We have reviewed the convergence theory including the estimates of the rate of convergence of the least square update for the augmented Lagrangian method that uses adaptive precision control in the solution of the auxiliary problems for the quadratic programming problems with equality constraints. We compared it with the original one and we found out that for large penalty parameters both methods give the same results. The numerical experiments suggest that the algorithm may be used for efficient solution of large sparse problems using large initial values for the penalty parameters.

Reference

- [1] Alesawi, K.: *On Update Rules for the Augmented Lagrangian Methods with Applications in Fluid Mechanics*. Ph. D Thesis (in preparation).
- [2] Axelsson, O.: *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [3] Bertsekas, D. P.: *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, London, 1982.
- [4] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A.: *Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control for Quadratic Programming with Equality Constraints*. *Comp. Opt. and Applications* **14** (1999), 37–53.
- [5] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A., Alesawi, K.: *Augmented Lagrangians with Adaptive Precision Control for Quadratic Programming with Equality Constraints: Corrigendum and Addendum*. (in publication 2001).



Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Dept of Math. Anal. and Appl. of Math.
ODAM (2001) 15–26

FETI Domain Decomposition for Modelling of 3D Block Structure*

ZDENĚK DOSTÁL¹, FRANCISCO A. M. GOMES AND SANDRA A. SANTOS²

¹*FEI, VŠB – Technical University of Ostrava,
tř. 17. listopadu 15, CZ-70833 Ostrava–Poruba, Czech Republic*
²*IMECC – UNICAMP, University of Campinas,
CP 6065, 13081–970 Campinas SP, Brazil*

Abstract

An efficient non-overlapping domain decomposition algorithm of the Neumann–Neumann type proposed recently for solving both coercive and semicoercive contact problems is reviewed with a particular stress on modelling of 3D block structure. The algorithm exploits duality theory to reduce the conditions of equilibrium to a quadratic programming problem of special structure, that can be solved by the efficient algorithms proposed recently. Results of numerical experiments with a new implementation of the algorithm including optional lumped preconditioner give a new evidence of the efficiency of the algorithm for solution of 3D contact problems.

*Supported by FAPESP (grant 97/12676-4), CNPq, FINEP, FAEP–UNICAMP, by grant 105/99/129, and by project CEZ:J17/98:272401 MŠMT ČR.

1 Introduction

In this paper, we review our work [4, 9, 11, 13] related to the development of algorithms for the solution of multibody contact problems by duality based domain decomposition methods with a special stress on the solution of 3D problems that appear in geomechanics. These algorithms may be considered as an extension of the FETI method to problems described by variational inequalities. For the sake of simplicity, we consider only the simple frictionless problems of linear elasticity with the linearized node-to-node non-interpenetration conditions, but the results may be exploited for the solution of the problems with friction [15, 20] or large deformations with more sophisticated implementation of the kinematic constraints [24].

We start our exposition by describing the decomposition into subdomains of a system of elastic bodies in frictionless contact and by giving the discretized conditions of equilibrium of the system as an indefinite quadratic programming (QP) problem in nodal displacements with a block diagonal stiffness matrix and general equality and inequality constraints. Then we show that the difficulties arising from general inequality constraints and possible semidefiniteness of the problem in displacements may be essentially reduced by application of the duality theory. The matrix of the dual quadratic form turns out to be positive definite with a spectrum that is more favorably distributed for application of the conjugate gradient based methods than the primal counterpart.

The dual formulation is then modified in Section 3 in order to redistribute the spectrum of the Hessian of the augmented Lagrangian so that it is more favorably distributed for the conjugate gradient iterations even with a large penalty parameter that might be necessary to achieve sufficient penalization effect. Main tools are the projectors to the natural coarse space [17] and results [1] on the rate of convergence of the conjugate gradient method with a gap in the spectrum applied to the penalized matrices [6]. A special attention is paid to evaluation of the action of the generalized inverse that appears in dual formulation. For 3D problems, this turns out to be more difficult than for 2D problems due to possible existence of rigid rotations that may comply with prescribed displacements and still preserve positions of many nodes on the axis of rotation.

The algorithm for the solution of the modified problem is reviewed in Section 4. In particular, we briefly mention the results concerning solution of dual degenerate QP problems that are of special importance for the solution of 3D problems.

Numerical experiments that demonstrate the power of our algorithms are reported in Section 5. They include new results achieved with the lumped preconditioner and with a basic variant of the natural coarse grid preconditioning.

2 Kinematics and equilibrium of a system of bodies

Consider a system of s 3D elastic bodies, each one occupying, in a reference configuration, a domain Ω^p in \mathbb{R}^3 with sufficiently smooth boundary Γ^p , $p = 1, \dots, s$. Suppose that each boundary Γ^p consists of four disjoint parts $\Gamma_U^p, \Gamma_F^p, \Gamma_G^p$ and Γ_C^p , $\Gamma^p = \Gamma_U^p \cup \Gamma_F^p \cup \Gamma_G^p \cup \Gamma_C^p$, and that the displacements $\mathbf{U}^p : \Gamma_U^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ and forces $\mathbf{F}^p : \Gamma_F^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ are given. The part Γ_C^p denotes the part of Γ^p that may get into unilateral contact with some other subregion, and Γ_G^p denotes the part of Γ^p that is “glued” to other subdomains. In particular, we shall denote by Γ_C^{pq} the part of Γ^p that can be, in the solution, in contact with the body Ω^q , and we shall denote by Γ_G^{pq} the part of Γ^p that is glued to Ω^q . Obviously $\Gamma_G^{pq} = \Gamma_G^{qp}$ and $\Gamma_C^{pq} = \Gamma_C^{qp}$. Let us recall that the gluing conditions require continuity of displacements across all Γ_G^p . We consider these conditions to enable an auxiliary decomposition of bodies to define a natural coarse grid space.

We shall look for the displacements that satisfy the conditions of equilibrium in the set $\mathbf{K} = \mathbf{K}^E \cap \mathbf{K}^I$ of all kinematically admissible displacements \mathbf{v} of the Sobolev product space

$$\mathcal{V} = H^1(\Omega^1)^d \times \dots \times H^1(\Omega^s)^d, \quad (2.1)$$

where $\mathbf{K}^E = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v}^p = \mathbf{U} \text{ on } \Gamma_U^p \text{ and } \mathbf{v}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^q(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_G^{pq}\}$ comprises elements of \mathcal{V} that are continuous across all Γ_G^{pq} and \mathbf{K}^I comprises those that satisfy the non-interpenetration conditions [21, 22]. The displacement $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ of the system of bodies in equilibrium then minimizes the energy functional J so that

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}) \text{ for any } \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \quad (2.2)$$

Conditions that guarantee existence and uniqueness of the solution may be expressed in terms of coercivity of J and may be found, for example, in [21, 22].

The linearization and finite element discretization of $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^1 \cup \dots \cup \bar{\Omega}^s$ with suitable numbering of nodes results in the QP problem

$$\min \frac{1}{2} u^T K u - f^T u \text{ subject to } B_I u \leq c \text{ and } B_E u = 0 \quad (2.3)$$

with a symmetric block-diagonal matrix $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_s)$ of order n , $f \in \mathbb{R}^n$, an $m \times n$ full rank matrix B_I , $c \in \mathbb{R}^m$, and an $l \times n$ full rank matrix B_E . The diagonal blocks K_p , that correspond to subdomains Ω^p , are positive definite or semidefinite sparse matrices. Moreover, we assume that the nodes are numbered in such a way that K_p are banded matrices that can be effectively decomposed by the Cholesky factorization. The vector f describes the nodal forces arising from the volume forces or some other tractions. The matrix B_I and the vector c describe the linearized incremental non-interpenetration conditions, while B_E is

used to enforce the continuity of the displacements across the auxiliary interfaces Γ_G^p . More details may be found in [9].

Even though (2.3) is a standard convex QP problem, it is not suitable for numerical solution. The reasons are that K is typically ill-conditioned or singular, and that the feasible set is so complex that projections onto it can hardly be effectively computed, so that it would be very difficult to achieve fast identification of the contact interface and fast solution of auxiliary linear problems. The complications mentioned above may be essentially reduced by applying the duality theory of convex programming (e.g. [4, 9]). Since the case with nonsingular K was described in [9], we shall assume that the matrix K has a nontrivial null space that defines the natural coarse grid [17].

The Lagrangian associated with problem (2.3) is

$$L(u, \lambda_I, \lambda_E) = \frac{1}{2}u^T K u - f^T u + \lambda_I^T (B_I u - c) + \lambda_E^T B_E u, \quad (2.4)$$

where λ_I and λ_E are the Lagrange multipliers associated with the inequalities and equalities, respectively. Introducing notation

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_I \\ \lambda_E \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_I \\ B_E \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix},$$

we can rewrite the Lagrangian briefly as

$$L(u, \lambda) = \frac{1}{2}u^T K u - f^T u + \lambda^T (B u - \hat{c}).$$

It is well-known that (2.3) is equivalent to the saddle point problem

$$\text{Find } (\hat{u}, \hat{\lambda}) \quad \text{s.t.} \quad L(\hat{u}, \hat{\lambda}) = \sup_{\lambda_I \geq 0} \inf_u L(u, \lambda). \quad (2.5)$$

If we eliminate u from (2.5), we get the minimization problem

$$\min \Theta(\lambda) \quad \text{s.t.} \quad \lambda_I \geq 0 \quad \text{and} \quad R^T (f - B^T \lambda) = 0, \quad (2.6)$$

where R denotes a matrix whose columns span the null space of K , K^\dagger denotes any matrix that satisfies $K K^\dagger K = K$, and

$$\Theta(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T B K^\dagger B^T \lambda - \lambda^T (B K^\dagger f - \hat{c}). \quad (2.7)$$

Farhat and Roux [18] proposed to define K^\dagger as the left generalized inverse that satisfies $K_p^\dagger = K_p^{-1}$ whenever K_p is non-singular and $K^\dagger = \text{diag}(K_1^\dagger, \dots, K_s^\dagger)$. The most important fact is that the product of such K^\dagger with a vector may be carried out effectively by suitable combination of Cholesky and spectral decomposition [16] applied to each K_p . To implement their idea for solving the 3D problems, it is useful to choose such a numbering of nodes that the last three nodes in each

body are never in a line. Once the solution $\hat{\lambda}$ of (2.6) is obtained, the vector u that solves (2.5) can be evaluated by means of explicit formulas that may be found in [4, 9].

The matrix $R^T B^T$ is, under reasonable assumptions, a full rank matrix, so that the Hessian of Θ is positive definite. Moreover, the Hessian is closely related to that of the basic FETI method by Farhat and Roux [18], so that its spectrum is relatively favorably distributed for application of the conjugate gradient method.

3 Duality, projectors and augmented Lagrangian

Even though problem (2.6) is much more suitable for computations than (2.3) and has been used for efficient solution of contact problems [9], further improvement may be achieved by adapting simple observations and results of Farhat, Mandel and Roux [17]. We shall formulate a problem that is equivalent to (2.6), but its augmented Lagrangian has such a spectral distribution that it is possible to give, in some sense, an optimal estimate of the rate of convergence of unconstrained minimization by the conjugate gradient method.

Let us set $F = BK^\dagger B^T$, $\tilde{d} = BK^\dagger f$, $\tilde{G} = R^T B^T$, $\tilde{e} = R^T f$, and let T denote a regular matrix such that matrix $G = T\tilde{G}$ has orthonormal rows. Putting $e = T\tilde{e}$, problem (2.6) reads

$$\min \frac{1}{2} \lambda^T F \lambda - \lambda^T \tilde{d} \quad \text{s.t.} \quad \lambda_I \geq 0 \quad \text{and} \quad G \lambda = e. \quad (3.1)$$

Using the same reasoning as in the linear case [17], the minimization problem (3.1) may be transformed into the minimization on the subset of a vector space by means of $\bar{\lambda}$ that satisfies $G\bar{\lambda} = e$. Setting $d = \tilde{d} - F\bar{\lambda}$, the modified problem reads

$$\min \frac{1}{2} \lambda^T F \lambda - d^T \lambda \quad \text{s.t.} \quad G \lambda = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_I \geq -\bar{\lambda}_I. \quad (3.2)$$

The improvement may be explained when we compare the distribution of the spectrum of the Hessians $H_1 = F + \rho \tilde{G}^T \tilde{G}$ and $H_2 = F + \rho G^T G$ of the augmented Lagrangians for problems (2.6) and (3.2), respectively. Let us assume that the eigenvalues of F are in the interval $[a, b]$ and that the nonzero eigenvalues of $\tilde{G}^T \tilde{G}$ are in $[\gamma, \delta]$. For each square matrix A , let $\sigma(A)$ denote its spectrum. Using the analysis of [6, 7], it follows that

$$\sigma(H_1) \subseteq [a, b] \cup [a + \rho\gamma, b + \rho\delta] \quad \text{and} \quad \sigma(H_2) \subseteq [a, b] \cup [a + \rho, b + \rho].$$

If ρ is sufficiently large and $\gamma < \delta$, then the spectrum of H_1 is distributed in two intervals with the larger one on the right. It follows by the results of Axelsson [1] that the rate of convergence of the conjugate gradients for minimization of the quadratic function with Hessian H_1 depends on the penalization parameter ρ .

However, the spectrum of H_2 is distributed in two intervals of the same length, so that the rate of convergence may be expressed by means of the effective condition number $\bar{\kappa}(H_2) = 4b/a$ and does not depend on the penalization parameter ρ [1, 6].

Further improvement can be obtained by observing that the augmented Lagrangian for (3.2) may be decomposed by the orthogonal projectors $Q = G^T G$ and $P = I - Q$ on the image space of G^T and on the kernel of G , respectively. Indeed, problem (3.2) is equivalent to

$$\min \frac{1}{2} \lambda^T PFP\lambda - \lambda^T Pd \quad \text{s.t.} \quad G\lambda = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_I \geq -\bar{\lambda}_I, \quad (3.3)$$

with the Hessian $H_3 = PFP + \rho Q$ of the augmented Lagrangian

$$L(\lambda, \mu, \rho) = \frac{1}{2} \lambda^T (PFP + \rho Q) \lambda - \lambda^T Pd + \mu^T G\lambda \quad (3.4)$$

decomposed by projectors P and Q whose image spaces are invariant subspaces of H_3 . If $[a_P, b_P]$ denotes the interval that contains the non-zero eigenvalues of PFP , it follows that the eigenvalues of H_3 satisfy

$$\sigma(H_3) \subseteq [a_P, b_P] \cup \{\rho\} \quad \text{and} \quad [a_P, b_P] \subseteq [a, b] \quad (3.5)$$

so that the number k of conjugate gradient iterations that reduce by ϵ the gradient of the augmented Lagrangian (3.4) for (3.3) satisfies [1]

$$k \leq \frac{1}{2} \text{int} \left(\sqrt{\frac{b_P}{a_P}} \ln \left(\frac{2}{\epsilon} \right) + 3 \right). \quad (3.6)$$

Moreover, analysis of the FETI method by Farhat, Mandel and Roux [17] implies that, for nearly regular decomposition,

$$\frac{b_P}{a_P} \leq \text{const} \frac{H}{h}, \quad (3.7)$$

where h and H are the characteristic mesh and subdomain diameters, respectively. Examining (3.6) and (3.7), we conclude that the rate of convergence for unconstrained minimization with the augmented Lagrangian (3.4) depends neither on the penalization parameter ρ nor on the discretization parameter h provided the ratio H/h is kept bounded by a constant. We can achieve still further improvement by application of a suitable preconditioning as demonstrated by results of numerical experiments in Section 5.

4 Solution of bound and equality constrained quadratic programming problems

The algorithm that we review here may be considered as a variant of the augmented Lagrangian type algorithm proposed by Conn, Gould and Toint [3] for

identification of stationary points of more general problems. The algorithm treats each type of constraints separately, so that efficient algorithms using projections and adaptive precision control [5, 19] may be used for the bound constrained QP problems. To solve our problem, the algorithm approximates the Lagrange multipliers for the equality constraints of (3.3) in the outer loop while QP problems with simple bounds are solved in the inner loop. However, the algorithm that we describe here is modified in order to exploit the specific structure of our problem.

To simplify our notation, let us write $F_P = PFP$ so that the augmented Lagrangian for problem (3.3) and its gradient are given by

$$L(\lambda, \mu, \rho) = \frac{1}{2}\lambda^T F_P \lambda - \lambda^T P d + \mu^T G \lambda + \frac{1}{2}\rho \|Q\lambda\|^2$$

and

$$g(\lambda, \mu, \rho) = F_P \lambda - P d + G^T(\mu + \rho G \lambda),$$

respectively. The *projected gradient* $g^P = g^P(\lambda, \mu, \rho)$ of L at λ is then given componentwise by

$$g_i^P = g_i \text{ for } \lambda_i > -\bar{\lambda}_i \text{ or } i \notin I \text{ and } g_i^P = g_i^- \text{ for } \lambda_i = -\bar{\lambda}_i \text{ and } i \in I$$

with $g_i^- = \min(g_i, 0)$, where I is the set of indices of constrained entries of λ .

All the parameters that must be defined prior to the application of the algorithm are listed in Step 0. Typical values of these parameters for the 3D-problems are given in brackets.

Algorithm 4.1 (*Simple bound and equality constraints*)

Step 0. Initialization of parameters

Set $0 < \alpha < 1$ [$\alpha = 0.1$], $1 < \beta$ [$\beta = 10$], $\rho_0 > 0$ [$\rho_0 = 1$], $\eta_0 > 0$ [$\eta_0 = 0.1$], $M > 0$ [$M = 1$], μ^0 [$\mu^0 = 0$] and $k = 0$.

Step 1. Find λ^k so that $\|g^P(\lambda^k, \mu^k, \rho_k)\| \leq M \|G\lambda^k\|$.

Step 2. If $\|g^P(\lambda^k, \mu^k, \rho_k)\|$ and $\|G\lambda^k\|$ are sufficiently small, then stop.

Step 3. If $\|G\lambda^k\| \leq \eta_k$

Step 3a. then $\mu^{k+1} = \mu^k + \rho_k G \lambda^k$, $\rho_{k+1} = \rho_k$, $\eta_{k+1} = \alpha \eta_k$

Step 3b. else $\rho_{k+1} = \beta \rho_k$, $\eta_{k+1} = \eta_k$

end if.

Step 4. Increase k by one and return to Step 1.

The algorithm has been proved [7] to converge for any set of parameters that satisfy the prescribed relations. Moreover, it has been proved that the asymptotic rate of convergence is the same as for the algorithm with exact solution of auxiliary QP problems (i.e. $M = 0$) and that the penalty parameter is uniformly bounded. These results, with the above discussion on elimination of the negative effect of penalization, give theoretical support to Algorithm 4.1.

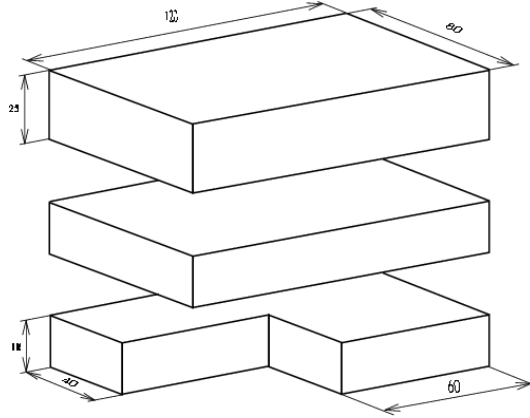
An implementation of Step 1 is carried out by the minimization of the augmented Lagrangian L subject to $\lambda_I \geq -\bar{\lambda}_I$. An efficient algorithm for the solution of convex QP problems with simple bounds has been proposed independently by Friedlander and Martínez [19] and Dostál [5]. The algorithm uses projections and a precision control that depends on a prescribed positive parameter Γ . It has been proved that the algorithm converges to the solution for any positive Γ and that the solution is reached in a finite number of steps provided Γ is sufficiently large or the problem is not dual degenerate. This particular feature indicates that the algorithm can avoid the oscillations often attributed to active set based algorithms and that it can treat efficiently the dual degenerate problems as required above. This is of a special importance in the solution of 3D contact problems, as there are typically quite a few couples of points on the contact interface touching each other and causing the resulting QP problem to be dual degenerate.

The performance of the algorithm depends essentially on the rate of convergence of the method that minimizes Θ in faces. In our case, the results (3.6) and (3.7) suggest that the examination of faces can be carried out efficiently. Further promising modifications of the algorithm may be introduced by adapting results of Schoberl [23]. In particular, it seems that his theory may be adapted to prove some results on overall numerical scalability of the algorithm, that has been recently demonstrated empirically [14]. We shall give the details elsewhere.

5 Numerical solution of a 3D contact problem

In this section we report some results of numerical solution of a 3D contact problem arising in mining engineering to illustrate practical behavior of two implementations of our algorithm and sensitivity to parameters. To this end, we have implemented Algorithm 4.1 to solve the basic dual problem (2.6) so that we can plug in the projectors to the natural coarse space (3.3) and the modified lumped preconditioner.

In particular, we considered a 3D contact problem of [8] depicted in Figure 1. The boundary conditions are defined by prescribed zero normal displacements on the vertical boundaries and on the bottom of the model with exception of the boundaries of the excavation in the bottom block. Since no vertical displacements were prescribed for the upper two blocks, these blocks admitted vertical rigid body motion. The goal was to identify the contact forces between the upper two blocks above the excavation due to the gravitational forces. More about



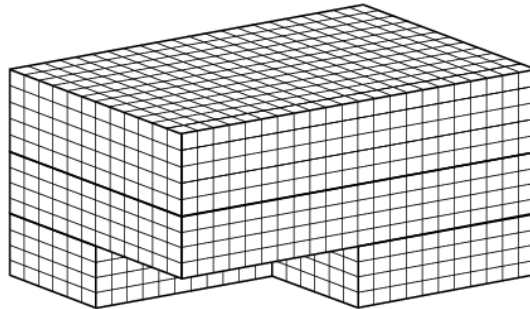
Obrázek 1: 3-blocks model problem

motivation of the problem and interpretation of the results may be found in [8].

The problem was discretized as in Figure 2 by the finite element method so that the resulting discrete problem comprised 6419 nodal variables and 382 dual variables on the contact interface. The problem was solved to the precision

$$\|g^P(\lambda, \mu, 0)\| \leq 10^{-4} \|\tilde{d}\| \quad \text{and} \quad \|G\lambda\| \leq 10^{-4} \|f\|$$

defined to comply with our earlier experiments [8, 11]. We have not used any secondary decomposition so that our coarse grid was formed just by the two-dimensional null space of the stiffness matrix that is generated by independent vertical movements of the upper two blocks. The experiments were run with a new implementation of our algorithms on a SUN Sparc Ultra1 computer, under SunOS 5.5.1, using the f77 (version 4.0) FORTRAN compiler and double precision. The auxiliary problems were solved by QUACON, a routine developed in the Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computation at Unicamp [2].



Obrázek 2: Discretization of model problem

The performance of the algorithm with varying parameters M, ρ_0 is reported in Table 1. The results achieved with the natural coarse grid projectors are

Tabulka 1: Performance of the algorithm for the 3-blocks problem

M	ρ_0	No preconditioner			Lumped preconditioner		
		Outer	Inner	Time	Outer	Inner	Time
0.01	0.1	4	93	38.6	4	74	32.8
	1	2	67	29.2	2	60	27.4
	10	2	115	50.3	2	76	36.7
	100	2	154	71.1	2	118	64.2
	1000	2	171	80.9	2	158	86.0
0.1	0.1	3	85	35.3	4	58	26.8
	1	2	67	29.2	2	60	27.4
	10	2	115	50.3	2	76	36.7
	100	2	154	71.1	2	118	64.2
	1000	2	171	80.9	2	158	86.0
1	1	2	65	28.5	2	59	27.1
	10	2	113	49.4	2	76	36.7
	100	2	154	71.1	2	116	63.4
	1000	2	171	80.9	2	158	86.0

in the three columns labeled **No preconditioner**, whereas the results with the additional lumped preconditioner

$$F^L = PBKB^T P + \frac{1}{\rho} Q$$

are in the columns labeled **Lumped preconditioner**. The labels **Outer**, **Inner** and **Time** denote the number of outer iterations for the Lagrange multipliers of the equality constraints, the number of inner conjugate gradient iterations, and the time for computation in seconds, respectively. Note that we have not used any auxiliary decomposition, so that our coarse grid was generated by the independent rigid vertical displacements of the upper two blocks.

We have noticed that, when the initial penalty parameter ρ was smaller than one, it has been updated so that its final value was equal to one. The latter value seems to be optimal for our problem. The results indicate a little sensitivity to the parameter M in a relatively broad range. We have also carried out the computations for larger values of M , obtaining results very similar to those reproduced here. The results depend rather moderately on the initial penalty parameter, which is in agreement with the theory. The application of the preconditioner always reduced the number of iterations, though less than could have been assumed for linear problems. Our explanation is that the number of iterations per face is relatively small. More results achieved with a different implementation of the algorithm may be found in [11]. Concluding, the experiments indicate that there are problems which can be effectively solved by the algorithm presented, even without auxiliary decomposition of the problem into subdomains.

6 Comments and conclusions

We have reviewed a domain decomposition algorithm for the solution of coercive and semicoercive frictionless contact problems with a special attention to the problems arising in modelling of 3D block structure. The method combines a variant of the FETI method with projectors to the natural coarse grid, recently developed algorithms for the solution of special QP problems, and optional preconditioners. A new feature of these algorithms is the adaptive control of precision of the solution of auxiliary problems, with effective application of projections to the natural coarse grid.

The implementation of this approach deals separately with each body or sub-domain, so that it is suitable for parallelization, as has already been confirmed by experiments with parallel implementation [12, 14]. Theoretical results are reviewed that guarantee convergence and indicate a certain numerical scalability of the algorithm. This conjecture about the behaviour of the algorithm has been recently supported by numerical experiments [14] with solution of a model variational inequality discretized by more than eight million of nodal variables. Computational results presented are in agreement with the theory and indicate that the performance of the algorithm may be further improved by adapting preconditioners.

Reference

- [1] O. Axelsson (1976). A class of iterative methods for finite element equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 9:127–137.
- [2] R. H. Bielschowski, A. Friedlander, F. A. M. Gomes, J. M. Martí and M. Raydan (1997). An adaptive algorithm for bound constrained quadratic minimization. *Investigación Operativa*, 7:67–102.
- [3] A. R. Conn, N. I. M. Gould and Ph. L. Toint (1991). A globally convergent augmented Lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28:545–572.
- [4] Z. Dostál (1995). Duality based domain decomposition with proportioning for the solution of free boundary problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 63:203–208.
- [5] Z. Dostál (1997). Box constrained quadratic programming with proportioning and projections. *SIAM J. Optimiz.*, 7:871–887.
- [6] Z. Dostál (1999). On preconditioning and penalized matrices. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 6:109–114.
- [7] Z. Dostál, A. Friedlander and S. A. Santos (2000). Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with simple bounds and equality constraints. To appear in *SIAM J. Optimiz.*
- [8] Z. Dostál, A. Friedlander and S. A. Santos (1997). Analysis of block structures by augmented Lagrangians with adaptive precision control. In Z. Rakowski, editor, *Proc. of Geomechanics'96*, pp. 175–180. A. A. Balkema, Rotterdam.

- [9] Z. Dostál, A. Friedlander and S. A. Santos (1998). Solution of coercive and semicoercive contact problems by FETI domain decomposition. *Contemp. Math.*, 218:82–93.
- [10] Z. Dostál, A. Friedlander and S. A. Santos (1999). Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with equality constraints. *Comput. Optimiz. Appl.*, 14:37–53.
- [11] Z. Dostál, F. A. M. Gomes and S. A. Santos (2000). Solution of contact problems by FETI domain decomposition with natural coarse-space projections. Accepted for publication in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- [12] Z. Dostál, F. A. M. Gomes and S. A. Santos (2000). Parallel Solution of Contact Problems. To appear in *Proceedings of IFIP TC7 Conference, Cambridge.*
- [13] Z. Dostál, F. A. M. Gomes and S. A. Santos (2000). Duality based domain decomposition with adaptive natural coarse grid projectors for contact problems, in *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Ed. J. R. Whiteman, pp. 259–270, Elsevier, Amsterdam.
- [14] Z. Dostál and D. Horák (2001). Scalability and FETI based algorithm for large discretized variational inequalities, submitted to *IMA J. Math. and Comput. in Simulation.*
- [15] Z. Dostál and V. Vondrák (1997). Duality based solution of contact problems with Coulomb friction. *Arch. Mech.*, 49:453–460.
- [16] C. Farhat and M. Gérardin (1997). On the general solution by a direct method of a large scale singular system of linear equations: application to the analysis of floating structures. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 41:675–696.
- [17] C. Farhat, J. Mandel and F.-X. Roux (1994). Optimal convergence properties of the FETI domain decomposition method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 115:365–385.
- [18] C. Farhat and F.-X. Roux (1992). An unconventional domain decomposition method for an efficient parallel solution of large-scale finite element systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13:379–396.
- [19] A. Friedlander and J. M. Martínez (1994). On the maximization of concave quadratic functions with box constraints. *SIAM J. Optimiz.*, 4:177–192.
- [20] J. Haslinger, Z. Dostál and R. Kučera (2000). Signorini problem with a given friction. To appear in *Nonsmooth/Nonconvex Mechanics*, Editors David Y. Gao, R.W. Ogden, G.E. Stavroulakis. Edited Volume in the Series: *Nonconvex Optimization and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers.
- [21] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas and J. Lovíšek (1988). *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*. Springer Verlag, Berlin.
- [22] N. Kikuchi and J. T. Oden (1988). *Contact Problems in Elasticity*. SIAM, Philadelphia.
- [23] J. Schoberl (1998). Solving the Signorini problem on the basis of domain decomposition techniques. *Computing*, 60(4):323–344.
- [24] G. Zavarise and P. Wriggers (1998). A segment-to-segment contact strategy. *Math. Comput. Modelling*, 28:497–515.



Metoda separace proměnných při analýze pohybu kapaliny v magnetodynamickém kanálu

IRENA M. HLAVÁČOVÁ¹, LIBOR M. HLAVÁČ²

1 Úvod

Vysokorychlostní kapalinový paprsek se od konce sedmdesátých let minulého století stal nástrojem používaným pro obrábění materiálů všeho druhu [1]. Velké výhody tohoto nástroje přirozeně vedly ke snahám o zvýšení efektivity jeho působení. Toho je možno dosáhnout buď kvantitativně (ovšem jen v omezené míře) nebo kvalitativně. Při hledání vhodných kvalitativních změn je dobré vycházet především z teoretické analýzy působení paprsku na materiál. Analýza dynamických účinků paprsku, potvrzená experimentálními výsledky, vede k závěru, že působení paprsku není v čase stálé. Nejúčinnější je paprsek v počáteční fázi svého působení, kdy na rozhraní kapaliny a materiálu vzniká díky stlačitelnosti kapaliny a s tím související rázové vlně tzv. impaktní tlak. Ten několikanásobně převyšuje tzv. stagnační tlak, což je tlak vyvolaný kontinuální částí paprsku. Nahradíme-li tedy kontinuální paprsek pulzním, u něhož počáteční fáze tvoří mnohem větší část celkové doby působení, lze očekávat výrazný nárůst účinnosti [2, 3].

Zařízení, která přímo generují jednotlivé pulzy, pracují zpravidla pouze s malými frekvencemi, a proto zůstávají v podobě laboratorních návrhů. Často se také vyznačují velmi omezenou možností cíleně ovlivňovat parametry paprsku. Větší možnost praktického využití se očekávala u těch způsobů generace pulzních paprsků, které se snažily různými fyzikálními metodami rozčlenit původně kontinuální paprsek na sled kapkám podobných útvarů. Zařízení se však potýkají s vysokým mechanickým opotřebením nebo vysokou spotřebou energie pro

členění paprsku. Alternativou se ukázala být cesta založená na využití fyzikálních jevů k vyvolání nestabilit v toku kapaliny. Tyto jevy umožňují dosáhnout modulace rychlosti kapaliny, která v dostatečné vzdálenosti od trysky vede k samovolnému rozpadu kontinuálního paprsku na jednotlivé části — kapky [4, 5]. Byly zkoumány pasivní i aktivní způsoby vnučení modulace toku kapaliny. V zahraniční literatuře je možno se setkat se zařízeními zesilujícími náhodné fluktuace rychlosti kapaliny pomocí Helmholtzova rezonátoru [4]–[7], což jsou pasivní prvky modulace. Mezi aktivními prvky modulace ovšem také figurují na prvním místě mechanické. Jejich velkým problémem je však rychlé kavitační opotřebení jednotlivých součástí, zejména hrotu v trysce rozkmitávaného pomocí elektrostrikčního nebo magnetostrikčního měniče [8]. Přestože se na vývoji těchto metod pracuje již několik let, nepodařilo se dosud zcela odstranit některé nevýhody, např. vysoké nároky na konstrukční přesnost modulačního zařízení a jeho výrobu, velkou citlivost a malou životnost zařízení. To nás vedlo k myšlence pokusit se nalézt nový způsob vnučení modulace proudu kapaliny, a proto byla zahájena analýza možnosti opačného využití magnetohydrodynamického jevu [9], tedy působení vnějších polí (elektrického a magnetického, která jsou kolmá navzájem i na vektor rychlosti proudící kapaliny. Magnetohydrodynamický jev je založen na působení Lorentzovy síly na pohybující se náboje. Tento jev může být umocněn působením síly elektrického pole. Výsledkem interakce volných nábojů v kapalině, které stáčí vektor rychlosti do směru kolmého ke směru původního pohybu, je síla brzdící tok kapaliny.

Tématem této práce je kvalitativní rozbor uvedeného problému a jeho matematického zpracování. Ze základních fyzikálních zákonů pro proudění vodivé kapaliny v elektromagnetickém poli byla odvozena soustava pohybových rovnic popisujících tok kapaliny. Soustava rovnic byla postupně zjednodušena a matematicky řešena metodou separace proměnných. Výsledky mají napomoci k rozhodnutí, zda je možné pomocí komory založené na magnetohydrodynamickém jevu, realizovat pulzní paprsek.

2 Formulace základních rovnic

Celkovou elektromagnetickou sílu ve vodivé kapalině lze v mikroskopickém měřítku odvodit například z Coulombova zákona [10]. Hustota síly v klidové soustavě je dána vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_e = & \rho'_e \mathbf{E}' + \mathbf{j}' \times \mathbf{B}' - \frac{1}{2} \varepsilon_0 E'^2 \nabla' \varepsilon_r - \frac{1}{2} \mu_0 H'^2 \nabla' \mu_r + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \nabla' \left(E'^2 \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \rho} \rho \right) + \frac{1}{2} \mu_0 \nabla' \left(H'^2 \frac{\partial \mu_r}{\partial \rho} \rho \right) \end{aligned} \quad (1)$$

V magnetohydrodynamice jsou většinou důležité jen první dva členy pravé strany rovnice (1), protože předpokládáme, že pracujeme s prostředím elektricky i mag-

neticky izotropním. Tyto dva členy jsou kovariantní, takže můžeme psát

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

Na základě Lorentzovy transformace lze odvodit, že u vodivých kapalin je možno první člen rovnice (2) vzhledem ke druhému zanedbat. Hustota síly působící na kapalinu bude potom dána vztahem

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

Ve většině magnetohydrodynamických problémů, včetně nestacionárních dějů, se předpokládá, že v porovnání s hustotou proudu \mathbf{j} je prostorový přenos náboje (konvekční proud) zanedbatelný, což umožňuje zjednodušit soubor Maxwellových rovnic. Tento předpoklad je splněn v případě, že platí

$$\omega \varepsilon \ll \sigma \quad (4)$$

Hustotu proudu je možno vyjádřit z diferenciálního tvaru *Ohmova zákona*, který lze v obecném tvaru vyjádřit kovariantním vztahem (11). Elektrické a magnetické pole, jehož vliv na proudící kapalinu zkoumáme, popisují *Maxwellovy rovnice* [11]; v řešené úloze je vhodné použít jejich diferenciální tvar a vyloučit z nich prostorovou hustotu náboje využitím rovnice kontinuity pro hustotu proudu.

Aby byl soubor rovnic popisující magnetohydrodynamický jev v proudící kapalině úplný, je třeba ho doplnit ještě pohybovou rovnicí a rovnicí kontinuity. Pohyb proudící kapaliny je popsán *Navier–Stokesovou rovnicí* [12].

$$\rho \left[(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] = \rho \mathbf{a} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

kde \mathbf{a} je zrychlení způsobené vnější silou, v našem případě Lorentzovou a gravitační silou, a ρ je hustota kapaliny. Vyjádříme-li první člen pravé strany rovnice pomocí hustoty síly \mathbf{f}_e dané rovnicí (3) a gravitačního potenciálu ψ , dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho \left[(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \psi \quad (6)$$

V ní ovšem můžeme zanedbat člen s gravitačním potenciálem. Tensor mechanických napětí lze vyjádřit prostřednictvím zápisu jeho složek ve tvaru

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\eta e_{ij} + \delta_{ij} \eta_s \phi \quad (7)$$

kde ϕ je dilatace kapaliny (pro nestlačitelnou kapalinu je nulová), δ_{ij} je Kroneckerovo delta a η_s je druhý viskózní koeficient. V případě nestlačitelných Newtonových kapalin je tedy tenzor mechanických napětí přímo úměrný tenzoru gradientů

rychlostí e_{ij} (kde indexy i, j značí x, y, z) definovanému soustavou rovnic

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_{xy} = e_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_{yz} = e_{zy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & e_{zx} = e_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Pro ustálené proudění nestlačitelné kapaliny má rovnice kontinuity tvar $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, což umožňuje po dosazení (8) do (6) a rozepsání po složkách dále zjednodušit pohybovou rovnici na výsledný tvar (12).

Výchozí soustavu rovnic popisujících proudění kapaliny v elektrickém a magnetickém poli tedy tvoří

Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Ohmův zákon

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (10)$$

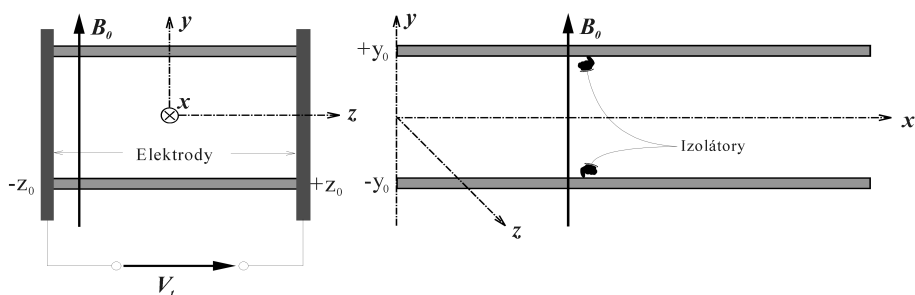
Rovnice kontinuity

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

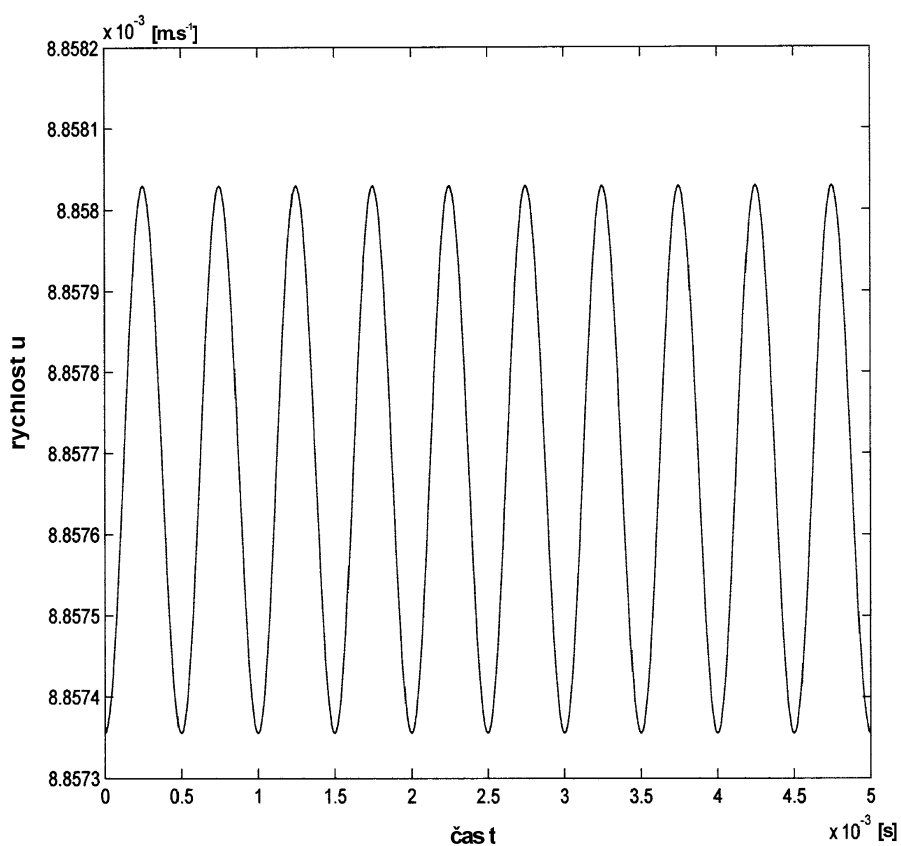
Pohybová rovnice

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (12)$$

Přesné řešení reálného problému by bylo příliš složité, protože se jedná o soustavu vzájemně svázaných rovnic, kterou nelze řešit analyticky a ani numerické řešení není běžně dostupné. V prvním přiblížení jsme tedy provedli rozbor zjednodušeného (jednorozměrného) problému — modifikované Hartmannovy úlohy (obr. 1).



Obrázek 3: Schéma modifikované Hartmannovy úlohy

Obrázek 4: Vypočtené fluktuace rychlosti kapaliny (v programu MATLAB) na ose magnetohydrodynamického kanálu: $u(0, t) = u_H(0, t) + u_P(0, t)$

3 Modifikovaná Hartmannova úloha

Uvažujme tok elektricky vodivé, viskózní, nestlačitelné kapaliny mezi dvěma rovnoběžnými deskami (protilehlými stěnami kanálu obdélníkového průřezu) v příčném magnetickém poli.

Vnější magnetické pole \mathbf{B} má směr y , může být proměnné v čase.

Rychlost kapaliny lze vyjádřit jako vektor se souřadnicemi v osách x, y, z :
 $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Rozměr kanálu ve směru z je mnohem větší než ve směru y , takže ve směru z se fyzikální veličiny prakticky nemění.

Tok kapaliny pokládáme za plně rozvinutý, proto se ve směru x mění pouze tlak $p = p(x)$.

Stěny kanálu rovnoběžné s rovinou xz pokládáme za dokonale nevodivé desky, dvě zbývající stěny kanálu jsou tvořeny elektrodami, které pokládáme za dokonale vodivé.

Vodivost kapaliny je $\sigma \gg \varepsilon\mu$.

Zjednodušením souboru výchozích rovnic na základě těchto podmínek úlohy lze dospět k soustavě dvou lineárních rovnic druhého řádu:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma B_y^2 u = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma E_z B_y \quad (13)$$

$$\eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \sigma B_y^2 w = -\sigma E_z B_y \quad (14)$$

Řešení této soustavy rovnic samozřejmě závisí na volbě vnějšího elektrického a magnetického pole. Ze tří základních kombinací vnějších polí ($B_y = B_0$ & $E_z = E_0 \cos \omega t$; $B_y = B_0 \cos \omega t$ & $E_z = E_0$; $B_y = B_0 \cos \omega t$ & $E_z = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$) je výhodné volit první variantu, protože je obtížné zajistit magnetické pole proměnné s dostatečně vysokou frekvencí a indukcí.

4 Matematické řešení

Po dosazení zvoleného vnějšího elektrického a magnetického pole do rovnice (13), resp. (14) vydělíme rovnice součinem $E_0 B_0$, takže získáme dvě lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu v proměnných y, t

$$a \frac{\partial u(y, t)}{\partial t} - b \cdot \frac{\partial^2 u(y, t)}{\partial y^2} + c \cdot u(y, t) = d + \cos \omega t \quad (15)$$

$$a \frac{\partial w(y, t)}{\partial t} - b \cdot \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial y^2} + c \cdot w(y, t) = \cos \omega t \quad (16)$$

kde $a = \frac{\rho}{\sigma E_0 B_0}$, $b = \frac{\eta}{\sigma E_0 B_0}$, $c = \frac{B_0}{E_0}$, $d = \frac{1}{E_0 B_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$.

Předpokládáme, že proudící kapalina je dokonale smáčivá, takže v těsné blízkosti stěny kanálu se nepohybuje. Odtud vyplývají okrajové podmínky úlohy

$$u(\pm y_0, 0) = 0, \quad w(\pm y_0, 0) = 0 \quad (17)$$

Pro řešení úlohy jsme zvolili metodu separace proměnných, protože na rozdíl od řešení získaného pomocí Laplaceovy transformace poskytuje možnost dostatečně průhledné fyzikální interpretace.

Nejdříve hledáme řešení homogenní rovnice s okrajovými a počátečními podmínkami danými fyzikálním zadáním, pak řešení nehomogenní rovnice s nulovými okrajovými a počátečními podmínkami. Výsledné řešení je pak dáno součtem homogenního a partikulárního řešení. Protože pro modulaci vysokoenergetického vodního paprsku je důležitá podélná složka rychlosti, bude řešení a jeho rozbor proveden pouze pro složku u rychlosti (rovnice(15)). Po vydělení rovnice (15) koeficientem a získáme kanonický tvar parciální diferenciální rovnice druhého řádu s diskriminantem $\Delta = 0$

$$\frac{\partial u_H(y, t)}{\partial t} - \frac{b}{a} \cdot \frac{\partial^2 u_H(y, t)}{\partial y^2} + \frac{c}{a} u_H(y, t) = 0 \quad (18)$$

Je zřejmé, že z matematického hlediska se jedná o rovnici parabolickou. Zajímá nás řešení této rovnice v reálném čase — hledáme tedy funkci $u(M, t)$, která pro $t > 0$ splňuje rovnici

$$L[u(M, t)] = u_t(M, t) \quad (19)$$

kde L je lineární operátor zavedený vztahem

$$L = \frac{b}{a} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{c}{a} = \left(\frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_y^2}{\rho} \right) \quad (20)$$

a $u_t(y, t)$ je parciální derivace funkce $u(y, t)$ podle času, přičemž M je tvořena množinou reálných souřadnic y . Řešení budeme hledat v omezené oblasti D s hranicí S , která je po částech hladká, v našem případě na úsečce $\langle -y_0, +y_0 \rangle$. Funkce $u(y, t)$ má dále být spojitá na uzavřené množině $B \equiv \{M \in \bar{D}, t \geq 0\}$, kde $\bar{D} = D \cup S$ a má splňovat okrajové a počáteční podmínky

$$(u)_s = 0 \quad (21)$$

$$u(M, 0) = v(M)$$

Hledáme netriviální řešení rovnice (19), která splňují okrajové podmínky (21), v třídě funkcí tvaru

$$u_H(y, t) = \Upsilon(y) \cdot \Psi(t) \quad (22)$$

přičemž $\Upsilon(y)$ jsou spojitá v \bar{D} a $\Psi(t)$ jsou spojitá pro $0 \leq t < \infty$.

V našem speciálním případě (jednorozměrná úloha v prostorových souřadnicích) je oblast tvořena úsečkou danou podmínkou $-y_0 \leq y \leq +y_0$. Po dosazení (22) do rovnice (19) získáváme

$$\Upsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} - L[\Upsilon(y)] \cdot \Psi(t) = 0 \quad (23)$$

Protože tato rovnice musí být splněna pro libovolnou dvojici proměnných y, t , musí platit

$$\frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = \frac{L[\Upsilon(y)]}{\Upsilon(y)} = -\lambda \quad (24)$$

kde λ je tzv. vlastní číslo operátoru L . Z podmínky (24) přímo vyplývá soustava dvou rovnic:

diferenciální rovnice prvního řádu v proměnné t

$$\Psi'(t) + \lambda \Psi(t) = 0 \quad (25)$$

jejíž řešení je dáno vztahem

$$\Psi(t) = C \cdot \exp(-\lambda t) \quad (26)$$

a diferenciální rovnice druhého řádu v proměnné y

$$L[\Upsilon(y)] + \lambda \Upsilon(y) = 0 \quad (27)$$

jejíž řešení je pro zadané okrajové podmínky (21) dáno vztahem

$$\Upsilon_k(y) = C_{yk} \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi y}{2y_0} \quad (28)$$

přičemž ovšem příslušné vlastní číslo λ_k musí splňovat podmínku

$$\lambda_k = \frac{1}{a} \left[\frac{b(2k+1)^2 \pi^2}{4y_0^2} + c \right] = \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{\eta}{\sigma} \cdot \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4y_0^2} + B_0^2 \right] \quad (29)$$

Protože k je libovolné celé číslo a řešení pro záporná k jsou stejná jako pro kladná, můžeme napsat hledané homogenní řešení rovnice (15) ve tvaru nekonečné řady

$$u_H(y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi y}{2y_0} \cdot \exp(-\lambda_k t) \quad (30)$$

Zavedeme-li pro zjednodušení zápisu tzv. Machovo magnetické číslo vztahem

$$M = y_0 B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \quad (31)$$

můžeme podmínku pro vlastní čísla přepsat ve tvaru

$$\lambda_k = \frac{\eta M^2}{\rho y_0^2} \left[\left(\frac{(2k+1)\pi}{2M} \right)^2 + 1 \right] \quad (32)$$

Koeficienty C_k jednotlivých členů řady se určují na základě počáteční podmínky. Předpokládáme-li, že v čase $t = 0$ je složka u rychlosti dána vztahem

$$u(y, 0) = v(y) \quad (33)$$

lze určit koeficienty C_k pro jednotlivé členy řady jako koeficienty Fourierova rozvoje funkce v v systému vlastních funkcí Υ_k operátoru L definovaného vztahem (20) podle vzorce

$$C_k = \frac{1}{\int_D \Upsilon_k^2 d\xi} \int_D v \Upsilon_k d\xi \quad (34)$$

což po provedení integrace vede ke koeficientům

$$C_k = \frac{1}{y_0} \int_{-y_0}^{+y_0} v \cos \frac{(2k+1)\pi\xi}{2y_0} d\xi \quad (35)$$

Zvolíme-li jako počáteční podmínku funkci popisující příčný profil rychlosti kapaliny před vstupem do magnetického pole [13], tj. rozložení rychlosti proudění kapaliny v plochém uzavřeném kanálu, bude počáteční podmínka vyjádřena vztahem

$$u(y, 0) = v(y) = u_0 \left[1 - \left(\frac{|y|}{y_0} \right)^{\log(Re+1)} \right] \quad (36)$$

kde koeficient Re vyjadřuje Reynoldsovo číslo definované vztahem

$$Re = \sqrt{2} \cdot y_0 \cdot \rho \cdot u_0 \cdot \eta^{-1} \quad (37)$$

v němž u_0 je rychlost proudění ideální kapaliny. Homogenní řešení rovnice (15) je potom dáno vztahem (30), v němž jsou koeficienty C_k určeny vztahem (35) a vlastní čísla λ_k splňují vztah (32).

Řešení nehomogenní rovnice (15) můžeme podle Steklovovy věty [14] rozvinout do Fourierovy řady podle vlastních funkcí Υ_k , které jsou řešením okrajové úlohy (15) a (17), výsledné partikulární řešení má tvar

$$u_P(y, t) = \frac{4}{a\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi y}{2y_0} \cdot \left(\frac{\cos(\omega t - \varphi_k)}{\sqrt{\omega^2 + \lambda_k^2}} + \frac{d}{\lambda_k} \right) \quad (38)$$

kde úhel φ_k je dán vztahem $\tan \varphi_k = \frac{\omega}{\lambda_k}$.

5 Diskuse

Rovnice popisující rychlost proudění vodivé kapaliny ve vnějším elektrickém poli s konstantním magnetickým polem B_0 a harmonickým elektrickým polem $E_z = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ vedou v případě modifikované Hartmannovy úlohy ke dvěma vzájemně nezávislým lineárním parciálním diferenciální rovnicím druhého řádu (15) a (16) s okrajovou podmínkou (17) a počáteční podmínkou (21) resp. (36) danou tvarem příčného profilu příslušné složky rychlosti před vstupem do magnetohydrodynamického kanálu. Protože pro případnou modulaci jsou klíčové fluktuační rychlosti ve směru kanálu, je třeba zjistit amplitudu fluktuací podélné složky rychlosti. Proto bylo provedeno řešení rovnice (15), a to metodou separace proměnných (Fourierovou metodou). Výsledné řešení je obecně dáno součtem řešení homogenní rovnice u_H a partikulárního řešení u_P (vzorce (19) a (38)).

Ze vzorce (38) je zřejmé, že na rozdíl od řešení původní Hartmannovy úlohy se stacionárním magnetickým i elektrickým polem, kde je rychlost dána vztahem

$$u = \left(\frac{1}{\sigma B_0^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{E_z}{B} \right) \left[\frac{1}{\cosh M} - 1 \right] \quad (39)$$

a odhad fluktuací rychlosti vyvolaných změnami elektrického pole E_z je tedy dán velikostí druhého členu v první závorce vynásobeného druhou závorkou [10], se pro harmonickou závislost intenzity elektrického pole na čase $E_z = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ amplituda fluktuací ω -krát zmenší. Tím se ovšem získané fluktuační rychlosti dostávají do oblasti, ve které jejich amplitudy nedosahují požadované velikosti dokonce ani z hlediska možnosti dalšího zesílení, např. Helholtzovým rezonátorem. Tento závěr potvrzují i numerické výsledky získané pomocí programu MATLAB (viz obr. 2). Nelze vyloučit, že vhodně navržený rezonátor by byl schopen zesílit i takovéto fluktuační rychlosti, ale to bude teprve předmětem dalšího zkoumání.

6 Závěr

Dosud byly provedeny tyto části analýzy směřující k ověření možnosti použití magnetohydrodynamického jevu ke generaci nestabilit, jež mohou způsobit modulaci rychlosti, která bude dostatečná pro vznik pulzního proudu:

- formulace matematického popisu,
- zjednodušení na základě fyzikálních podmínek,
- řešení metodou separace proměnných,
- analýza výsledků.

Výsledky řešení ukazují, že při zvolených zjednodušujících podmínkách není možno získat amplitudy fluktuací rychlosti kapaliny dostatečné pro vznik pulzního proudu, a to i po jejich zesílení pasivním rezonátorem. Protože zjednodušení mohla

být příliš velká, budou zkoumány důsledky zanedbání konvekčního proudu. Analyzována bude i možnost jiného prostorového řešení magnetohydrodynamického kanálu.

7 Seznam použitých symbolů

Čárka u označených fyzikálních veličin označuje veličinu vztaženou ke klidové soustavě kapaliny (veličiny bez čárky jsou vztaženy k laboratorní soustavě), operátor ∇' je rovněž v klidové soustavě kapaliny; čárka u pomocných matematických funkcí označuje derivaci.

δ_{ij}	...	Kroneckerovo delta
ε	...	elektrická permitivita kapaliny
ε_0	...	elektrická permitivita vakua
ε_r	...	relativní elektrická permitivita kapaliny
φ	...	fázový posun
ϕ	...	dilatace kapaliny
η	...	viskozita kapaliny
η_s	...	druhý viskózní koeficient kapaliny
μ_0	...	magnetická permeabilita vakua
μ_r	...	relativní magnetická permeabilita kapaliny
ρ	...	hustota kapaliny
ρ_e	...	prostorová hustota náboje
σ	...	vodivost kapaliny
τ	...	tenzor napětí se složkami τ_{ij}
ψ	...	intenzita gravitačního pole
ω	...	úhlová rychlost modulačního pole
\mathbf{a}	...	zrychlení kapaliny způsobené vnější silou
e_{ij}	...	složky tenzoru gradientů rychlostí
\mathbf{f}_e	...	hustota elektromagnetické síly
\mathbf{j}	...	hustota proudu
L	...	charakteristická délka
p	...	tlak kapaliny
t	...	čas
$\mathbf{v} = (u, v, w)$...	rychlost proudění kapaliny
y_0	...	polovina vzdálenosti mezi deskami (šířky kanálu)
$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$...	magnetická indukce
B_0	...	magnetická indukce aplikovaného vnějšího magnetického pole
$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$...	intenzita aplikovaného elektrického pole
\mathbf{H}	...	intenzita magnetického pole
V_t	...	napětí mezi elektrodami

Koeficienty rovnic, vlastní čísla a koeficienty Fourierova rozvoje jsou vysvětleny v textu.

Reference

- [1] Summers, D. A.: *Waterjetting Technology*. Chapman & Hall, Oxford, 1995.
- [2] Rochester, M. C., Brunton, J. H.: *High Speed Impact of Liquid Jets on Solids*. Proc. of the 1st Int. Symp. on Jet Cutting Technology, BHRA, Granfield, Bedford, England, 1972, A1-1–A1-24.
- [3] Huang, Y. C., Hammitt, F. G., Yang, W. J.: *Mathematical Modelling of Normal Impact Between a Finite Cylindrical Liquid Jet and Non-Slip, Flat Rigid Surface*. Proc. of the 1st Int. Symp. on Jet Cutting Technology, BHRA, Granfield, Bedford, England, 1972, A4-57–A4-68.
- [4] Sami, S., Ansari, H.: *Governing Equations in a Modulated Liquid Jet*. Proc. of the 1st U.S. Water Jet Symposium, WJTA, Golden, Colorado, USA, 1981, I-2.1–I-2.9.
- [5] Chahine, G. L., Conn, A. F.: *Passively-Interrupted Impulsive Water Jets*. Proc. of the 6th Int. Conf. on Erosion by Liquid and Solid Impact, Cambridge, England, 1983, 34-1–34-9.
- [6] Johnson jr., V. E., Conn, A. F., Lindenmuth, W. T., Chahine, G. L., Frederick, G. S.: *Self-Resonating Cavitating Jets*. Proc. of the 6th Int. Symp. on Jet Cutting Technology, BHRA, Granfield, Bedford, England, 1982, 1–26.
- [7] Sami, C., Anderson, C.: *Helmholtz Oscillator for the Self-Modulation of a Jet*. Proc. of the 7th Int. Symp. on Jet Cutting Technology, BHRA, Granfield, Bedford, England, 1984, 91–98.
- [8] Puchala, R. J., Vijay, M. M.: *Study of an ultrasonically generated cavitating or interrupted jet: Aspects of design*. Proc. of the 7th Int. Symp. on Jet Cutting Technology, BHRA, Granfield, Bedford, England, 1984, 69–82.
- [9] Hlaváčová, I. M., Hlaváč, L. M.: *The analysis of magnetohydrodynamic effects—New approach to the pulse jet*. Proc. of the 10th American Waterjet Conference, M. Hashish (ed.), WJTA, Houston, Texas, 1999, 335–351.
- [10] Hughes, W. F., Young, F. J.: *The Electromagnetodynamics of Fluids*. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1966.
- [11] Haňka, L.: *Teorie elektromagnetického pole*. SNTL, Praha, 1975.
- [12] Noskievič, J.: *Mechanika tekutin*. SNTL, Praha, 1987.
- [13] Hlaváč, L., Hlaváčová, I., Mádr, V.: *Rychlostní profil kapalinového paprsku s nadzvukovou rychlostí*. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity, Ostrava, Řada hornicko-geologická, VŠB – TU, Ostrava, **45**, 1 (1999), 77–83.
- [14] Arsenin, V. J.: *Matematická fyzika*. VTEL, Bratislava, 1977.



Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Dept of Math. Anal. and Appl. of Math.
ODAM (2001) 39–74

O dekompozici a zjednodušení 1D úlohy svázané termopružnosti: II. nerovnice

JIŘÍ V. HORÁK

*Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics
Faculty of Science, Palacký University
Tomkova 40, 779 00 Olomouc, Czech Republic
e-mail: jhorak@risc.upol.cz*

Abstrakt

V předloženém příspěvku jsou navrženy a diskutovány některé z možností zásadního zjednodušení problematiky řešitelnosti jedné speciální třídy jednorozměrných úloh svázané termopružnosti reprezentujících například ohyb tenkého pružného nosníku či deskového pásu.

Z důvodů stručnosti jsou zde studovány jen vzorové prototypy „základních“ okrajových podmínek předepisujících výsledný charakter vertikálních průhybů a natočení v podporách nosníku, jež vedou na formulaci studovaných úloh ve tvaru variačních nerovnic 1. a 2. druhu (speciálně i ve tvaru nelineárních variačních rovnic). Analýza je omezena na případy okrajových podmínek umožňujících rozpad úlohy svázané termopružnosti na úlohu nesvázanou.

V semikoercivních případech jsou uvedeny jak podmínky řešitelnosti, tak je i diskutována jejich souvislost s podmínkami dekompozice.

1 Úvod

V předloženém příspěvku vycházíme ze základních vztahů a výsledků uvedených pro obecný případ úlohy s diferenciálními operátory druhého řádu v práci [3], pro speciální situaci operátoru čtvrtého řádu v pracích [12] a [14]. Podrobně diskutujeme problematiku řešitelnosti a dekompozice úloh svázané termopružnosti pro jednu třídu „výjimečných“ okrajových podmínek, viz např. [15] a [16].

V tomto smyslu je příspěvek bezprostředním pokračováním práce [17], kde jsme uvedli základní a zobecněné typy klasických i neklasických okrajových podmínek vedoucích na úlohy mající tvar lineárních variačních rovnic. Tedy v [17] byly analyzovány případy okrajových podmínek kombinujících Dirichletovy a Neumannovy typy podmínek a navíc i jejich přirozená zobecnění, to je kombinace Dirichletových a Neumannových okrajových podmínek. Všechny případy studované v [17] byly jednak koercivní, a jednak umožňují jednoduchým, přímým způsobem (metodou faktorizace, viz např. [12]) realizovat dekompozici vyšetřované úlohy, a tedy významné zjednodušení všech odpovídajících modelových úloh svázané termopružnosti. Další podrobnosti a souvislosti s obecnějšími typy okrajových podmínek, včetně ilustrací jednotlivých typů okrajových podmínek, jsou uvedeny v [16] a [17].

V tomto článku se zaměříme pouze na speciálně vybrané varianty a různým způsobem zobecněné okrajové podmínky, jež jednak vedou na semikoercivní úlohy a jednak také umožňují dekompozici a zjednodušení výsledné úlohy. Dekompozici lze však realizovat pouze za jistých, výjimečných okolností: například užitím dodatečných podmínek lze vynutit transformaci původní svázané úlohy na úlohu jednodušší, mající tvar některého elementárního nebo zobecněného případu (viz např. [12], [14], [15], [17], tedy úlohu nesvázanou.

2 Formulace typových úloh

2.1 Označení a klasická formulace

Pro jednoduchost zápisu a návaznost textu užíváme již zavedené (viz [12], [16]), tedy následující značení operátorů derivování $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$ a definujeme

$$I = (0, T), \quad T \in \mathbf{R}^+, \quad T > 0, \quad \Omega = (0, L), \quad L \in \mathbf{R}^+, \quad L > 0, \quad \partial\Omega = \{0, L\},$$

$$\Gamma = \partial\Omega \times I, \quad \Omega_0 = \Omega \times \{0\}, \quad Q = \Omega \times I.$$

Dále definujeme (viz [16]) následující označení pro koeficienty

$$a_1 = a, \quad a_2 = \theta_0 \frac{E\alpha}{k}, \quad a_{1,1} = \frac{\alpha_h + \alpha_d}{kH}, \quad a_{1,2} = \frac{\alpha_h - \alpha_d}{2k},$$

$$a_{2,2} = \frac{12}{H^2} + \frac{3(\alpha_h + \alpha_d)}{kH}, \quad a_{2,1} = \frac{6(\alpha_h - \alpha_d)}{kH^2},$$

$$r_1 = \frac{\tilde{r}_1}{k} + \frac{\alpha_h \vartheta_h + \alpha_d \vartheta_d}{kH}, \quad r_2 = \frac{\tilde{r}_2}{k} + \frac{6(\alpha_h \vartheta_h - \alpha_d \vartheta_d)}{kH^2}, \quad q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{EF}, \quad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{EJ}.$$

Připomínáme, že ohybový moment, normálová a posouvající síla jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} M(u_2, \vartheta_2)(x, t) &= -E(x)J(x)(D^2u_2 + \alpha\vartheta_2)(x, t), \\ N(u_1, \vartheta_1)(x, t) &= -E(x)F(x)(Du_1 - \alpha\vartheta_1)(x, t), \\ T(u_2, \vartheta_2)(x, t) &= DM(u_2, \vartheta_2)(x, t) \end{aligned}$$

a pro jejich jednostranné hodnoty na hranici $\partial\Omega$, $\partial\Omega = \{0, L\}$ píšeme

$$\begin{aligned} M(0^+) &\equiv M(u_2, \vartheta_2)(0^+, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-E(x)J(x)(D^2u_2(x, t) + \alpha\vartheta_2(x, t))), \\ M(L^-) &\equiv M(u_2, \vartheta_2)(L^-, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} (-E(x)J(x)(D^2u_2(x, t) + \alpha\vartheta_2(x, t))), \\ N(0^+) &\equiv N(u_1, \vartheta_1)(0^+, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-E(x)F(x)(Du_1(x, t) - \alpha\vartheta_1(x, t))), \\ N(L^-) &\equiv N(u_1, \vartheta_1)(L^-, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} (-E(x)F(x)(Du_1(x, t) - \alpha\vartheta_1(x, t))), \\ T(0^+) &\equiv T(u_2, \vartheta_2)(0^+, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} D(-E(x)J(x)(D^2u_2(x, t) + \alpha\vartheta_2(x, t))), \\ T(L^-) &\equiv T(u_2, \vartheta_2)(L^-, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} D(-E(x)J(x)(D^2u_2(x, t) + \alpha\vartheta_2(x, t))), \end{aligned}$$

přičemž jejich předepsané hodnoty na $\partial\Omega$ budeme značit \hat{M} , \hat{N} a \hat{T} , když bližší upřesnění zda jde o předpis v $x = 0$ nebo $x = L$, to je označení $\hat{M}^{x=0,L}$, $\hat{N}^{x=0,L}$ a $\hat{T}^{x=0,L}$ budeme v případech, kdy nemůže dojít k nejasnostem vynechávat.

Všechny potřebné podrobnosti týkající se odvození řídicích rovnic, volby okrajových podmínek a variačních formulací modelových úloh jsou uvedeny například v [12], [16] a [17]. V rámci linearizované teorie svázané termopružnosti má úplná soustava čtyř řídicích rovnic pro modelovou úlohu (reprezentující ohyb termopružného nosníku) tvar

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{\alpha_h + \alpha_d}{kH} \vartheta_1 + \frac{\alpha_h - \alpha_d}{2k} \vartheta_2 - \theta_0 \frac{E\alpha}{k} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \tilde{r}_1 = a \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} - \left(\frac{12}{H^2} + \frac{3(\alpha_h + \alpha_d)}{kH} \right) \vartheta_2 - \frac{6(\alpha_h - \alpha_d)}{kH^2} \vartheta_1 + \\ + \theta_0 \frac{E\alpha}{k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + \tilde{r}_2 = a \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EH \frac{\partial}{\partial x} u_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha EH \vartheta_1) = \tilde{q}_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha EJ \vartheta_2) = \tilde{q}_2. \quad (4)$$

Nyní uvedeme vybrané typy modelových okrajových podmínek na kterých budeme následně ilustrovat, jak ovlivňují chování příslušného matematického modelu. Vyšetříme zda navržený model je jednoznačně řešitelný, nebo zda je nejdříve třeba formulovat dodatečné podmínky řešitelnosti bilancující vhodným způsobem zadaná data či zda dokonce podmínky neumožňují dekompozici a zjednodušení svázané úlohy.

Z důvodů stručnosti se v této práci omezíme jen na několik význačných, reprezentativních typů podmínek, jejich varianty či možné další zobecnění ponecháme jen do odkazů v poznámkách. Poněvadž pro naše účely, jak se ukáže v dalším, nehraje zvolený typ okrajové podmínky pro první složku u_1 (osové posunutí) neznámé čtveřice funkcí $\{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$ ani pro obě složky teploty $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$ (hodnotu i gradientu) významnější roli, budeme podrobně studovat pouze varianty podmínek pro druhou složku posunutí, to je pro průhybovou funkci u_2 . Jak lze snadno nahlédnout, zde předkládané výsledky zůstanou tedy v platnosti i pro jiné typy předpisů okrajových podmínek pro první, třetí a čtvrtou složku z $\{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$, než zde uvažovaných.

Poznámka 1 V následujících formulacích okrajových podmínek potřebujeme zavést vhodné označení restriktce hladké funkce na hranici. Z důvodů jednoduchosti a návaznosti na další text budeme používat stejného označení jak pro restriktci hladké (skalární) funkce u na hranici $\partial\Omega$, tak i pro standardní Dirichletův operátor stop $\gamma_D : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$ (odpovídající stabilním okrajovým podmínkám) jenž lze získat vhodným prodloužením právě operátoru restriktce se zachováním normy (viz například [1] nebo [2]). Neumannův operátor stop (odpovídající nestabilním okrajovým podmínkám) budeme značit γ_N , v následujících definicích okrajových podmínek v znamená pro hladké funkce pouze restriktci hodnot jejích derivací na hranici $\partial\Omega$ (v našich dalších úvahách je proto třeba předpokládat dostatečnou hladkost funkcí, např. funkce alespoň z $C^3(\bar{\Omega})$). V obecnějších situacích může však operátor γ_N znamenat lineární zobrazení $H^2(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{-3/2}(\partial\Omega)$ tedy z prostorů funkcí s konečnou energií do prostorů spojitých lineárních funkcionalů nad prostory stop funkcí (pro přesnou definici viz [2]). Poněvadž se zde omezíme na $1D$ situaci, je vše podstatně jednodušší (viz opět například [2]) než v obecném n -dimenzionálním případě (nyní zřejmě lze psát $\gamma_D : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}^2$ a $\gamma_N : H^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$).

Tedy stručně budeme pro Dirichletův operátor stop psát $\gamma \equiv \gamma_D \equiv \{\gamma_{(0)}, \gamma_{(L)}\}$, což pro úlohu druhého řádu (obecněji jde o případ $H^1(\Omega)$) jest $\gamma(v) = \{v(0), v(L)\}$ pro $\forall v \in C(\bar{\Omega})$. Označení se poněkud komplikuje v případě úlohy čtvrtého řádu (obecněji jde o případ $H^2(\Omega)$), kdy pro Dirichletův operátor píšeme $\gamma \equiv \{\{v_{(0)}, v_{(L)}\}, \{v_{(0)}^{(1)}, v_{(L)}^{(1)}\}\}$, tedy v podrobném zápisu máme

$$\gamma(v) = \{\{v(0), v(L)\}, \{Dv(0), Dv(L)\}\} \quad \forall v \in C^{(1)}(\bar{\Omega}),$$

což má dobrý smysl i pro funkce $v \in H^2(\Omega)$ vzhledem ke známé inklusi $H^2(\Omega) \subset C^{1,1/2}(\Omega)$, a obě označení stop lze v tomto případě ztotožnit. Podobně pro Neu-

mannův operátor stop a úlohu čtvrtého řádu píšeme $\gamma_N \equiv \{\{v_{(0)}^{(2)}, v_{(L)}^{(2)}\}, \{v_{(0)}^{(3)}, v_{(L)}^{(3)}\}\}$, tedy v podrobnějším zápisu máme

$$\gamma_N(v) = \{\{D^2v(0), D^2v(L)\}, \{D^3v(0), D^3v(L)\}\} \quad \forall v \in C^{(3)}(\bar{\Omega})$$

a stejného značení užijeme i v případě obecnějšího prostoru $H^2(\Omega)$.

Diskutované typy okrajových podmínek formulovaných pro druhou složku u_2 čtveřice $\{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$ neznámých funkcí budeme z metodických důvodů v této práci členit následujícím způsobem:

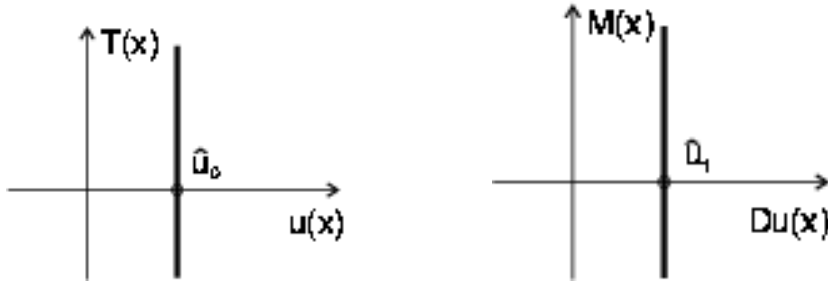
- *klasické okrajové podmínky*

- **stabilní** okrajové podmínky Dirichletova typu (na celé hranici $\partial\Omega$) reprezentující vetknutí konců nosníku (deskového pásu), tedy pro „vetknutí s daným poklesem a natočením“ podpor předepisujeme:

$$\gamma(u_2) = \{\gamma^{(0)}(u_2), \gamma^{(1)}(u_2)\} = \{\hat{u}_0, \hat{u}_1\},$$

což v podrobnějším zápisu je

$$\begin{aligned} \gamma^{(0)}(u_2) &\equiv \{u_2(0), u_2(L)\} = \{\hat{u}_0^0, \hat{u}_0^L\}, \\ \gamma^{(1)}(u_2) &\equiv \{Du_2(0), Du_2(L)\} = \{\hat{u}_1^0, \hat{u}_1^L\}, \end{aligned}$$



Obrázek 1.: Znázornění Dirichletových okrajových podmínek

- **nestabilní** okrajové podmínky Neumannova typu (na celé hranici $\partial\Omega$) reprezentující volné konce s daným zatížením (mající za následek semikoercivitu úlohy), tedy pro dané „zatížení“ momenty a silami předepisujeme:

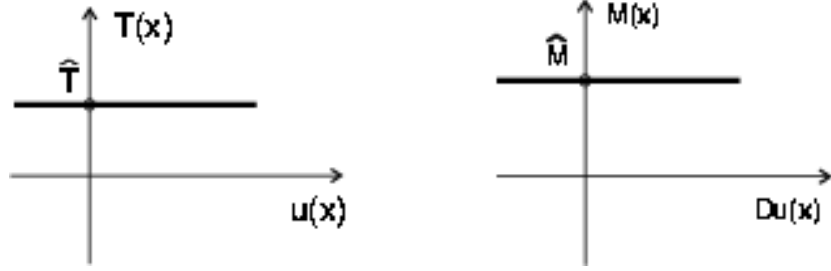
$$\gamma_N(u_2) = \{\gamma_N^{(2)}(u_2), \gamma_N^{(3)}(u_2)\} = \{\hat{u}_2, \hat{u}_3\},$$

což v podrobnějším zápisu značí

$$\begin{aligned} \gamma_N^{(2)}(u_2) &\equiv \{D^2u_2(0), D^2u_2(L)\} = \{\hat{u}_2^0, \hat{u}_2^L\}, \\ \gamma_N^{(3)}(u_2) &\equiv \{D^3u_2(0), D^3u_2(L)\} = \{\hat{u}_3^0, \hat{u}_3^L\}, \end{aligned}$$

nebo v často užívaném „mechanickém“ zápisu

$$\{M(0^+), M(L^-)\} = \{\hat{M}^0, \hat{M}^L\}, \quad \{T(0^+), T(L^-)\} = \{\hat{T}^0, \hat{T}^L\}.$$



Obrázek 2.: Znárodnění Neumannových okrajových podmínek

- **kombinované** klasické okrajové podmínky Dirichletova a Neumannova typu (na celé hranici $\partial\Omega$) reprezentující tzv. *prosté podepření* se zadanými poklesy podpor a daným momentovým zatížením (představující, jak bude ukázáno v dalším, ve studované třídě speciálních podmínek umožňujících *dekompozici* úlohy 1. *výjimečný případ*); tedy pro „prosté podepření“ zadáme:

$$\begin{aligned}\gamma^{(0)}(u_2) &\equiv \{u_2(0), u_2(L)\} = \{\hat{u}_0^0, \hat{u}_0^L\}, \\ \gamma_N^{(2)}(u_2) &\equiv \{D^2u_2(0), D^2u_2(L)\} = \{\hat{u}_2^0, \hat{u}_2^L\},\end{aligned}$$

nebo-li místo křivosti předepisujeme v „mechanickém“ zápisu

$$\{M(0^+), M(L^-)\} = \{\hat{M}^0, \hat{M}^L\},$$



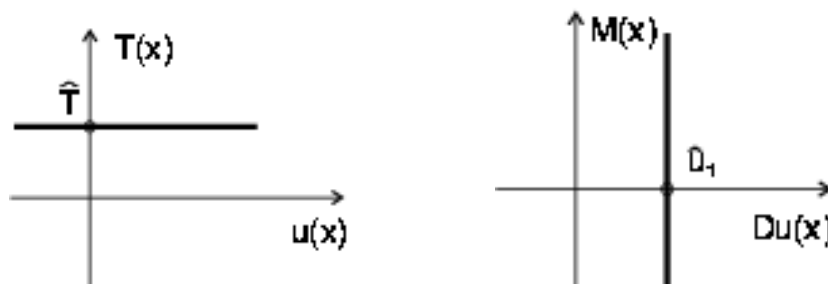
Obrázek 3.: Kombinované okrajové podmínky I. – Dirichlet a Neumann

a pro předchozím podmínkám odpovídající (doplňkovou) přidruženou (a navíc jen semikoercivní) variantu (na celé hranici $\partial\Omega$), to je pro „předepsané natočení“ podpor se zadanými silami místo momentů máme následující tvar:

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}(u_2) &\equiv \{Du_2(0), Du_2(L)\} = \{\hat{u}_1^0, \hat{u}_1^L\}, \\ \gamma_N^{(3)}(u_2) &\equiv \{D^3u_2(0), D^3u_2(L)\} = \{\hat{u}_3^0, \hat{u}_3^L\},\end{aligned}$$

nebo při užití „mechanického“ zápisu místo třetích derivací máme

$$\{T(0^+), T(L^-)\} = \{\hat{T}^0, \hat{T}^L\}.$$



Obrázek 4: Kombinované okrajové podmínky II. – Dirichlet a Neumann

- **smíšené: a)** *klasické* Dirichletovy (na části hranice $\partial\Omega$, například v $x = 0$) a Neumannovy okrajové podmínky (na zbytku hranice $\partial\Omega$) reprezentující v naší speciální třídě podmínek umožňujících *dekompozici* úlohy 2. *výjimečný případ*, tedy pro zadání průhybu a natočení v $x = 0$, a zatížení v $x = L$ předepíšeme:

- „vetknutý konec“ ($x = 0$):

$$\gamma^{(0)}(u_2)|_{x=0} = u_2(0) = \hat{u}_0, \quad \gamma^{(1)}(u_2)|_{x=0} = Du_2(0) = \hat{u}_1,$$

- „volný konec“ ($x = L$):

$$\gamma_N^{(2)}(u_2)|_{x=L} = \hat{u}_2 \quad (\text{nebo } M(u_2, \vartheta_2) = \hat{M}),$$

$$\gamma_N^{(3)}(u_2)|_{x=L} = \hat{u}_3 \quad (\text{nebo } T(u_2, \vartheta_2) = \hat{T}).$$

- **smíšené: b)** *kombinované I. typu* (prosté podepření na části hranice $\partial\Omega$) a *kombinované II. typu* okrajové podmínky (na zbytku hranice $\partial\Omega$) reprezentující v naší speciální třídě podmínek umožňujících *dekompozici* úlohy již 3. *výjimečný případ*, tedy pro zadání průhybu a křivosti (momentu) v $x = 0$, natočení a zatížení v $x = L$ předepíšeme:

- „prostě podepřený konec“ ($x = 0$):

$$\gamma^{(0)}(u_2)|_{x=0} = u_2(0) = \hat{u}_0,$$

$$\gamma_N^{(2)}(u_2)|_{x=0} = D^2u_2(0) = \hat{u}_2, \quad (\text{nebo } M(u_2, \vartheta_2) = \hat{M}^0),$$

- „zatížený konec s vázaným natočením“ ($x = L$):

$$\gamma^{(1)}(u_2)|_{x=L} = Du_2(L) = \hat{u}_1,$$

$$\gamma_N^{(3)}(u_2)|_{x=L} = \hat{u}_3, \quad (\text{nebo } T(u_2, \vartheta_2) = \hat{T}^L).$$

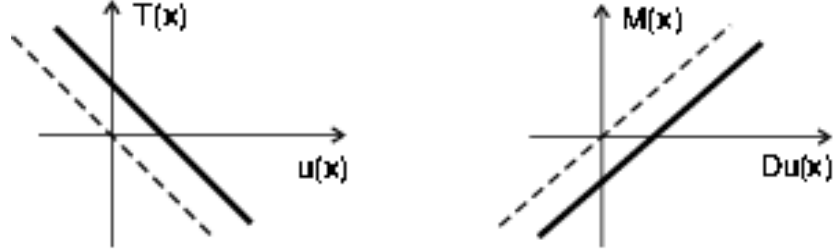
- *neklasické okrajové podmínky*

- okrajové podmínky Newtonova typu (reprezentující **pružné** posuvné a natáčivé uložení) a dané předpisy

$$\gamma_N^{(3)}(u_2) + k\gamma^{(0)}(u_2) = \hat{u}_3 \quad (\text{nebo } T(u_2, \vartheta_2) + ku_2 = \hat{T}),$$

$$\gamma_N^{(2)}(u_2) - m\gamma^{(1)}(u_2) = \hat{u}_2 \quad (\text{nebo } M(u_2, \vartheta_2) - mDu_2 = \hat{M}),$$

kde koeficienty k, m reprezentují tuhosti posuvných a natáčivých podpor (přesněji bychom měli psát o kterou část hranice $\partial\Omega$ jde, to je upřesnit značení $k = k(x)$, $m = m(x)$, $x = 0, L$, ale vše je zřejmé a k záměně nemůže dojít), navíc z fyzikálních důvodů platí $k(x), m(x) \geq 0$, $x = 0, L$.



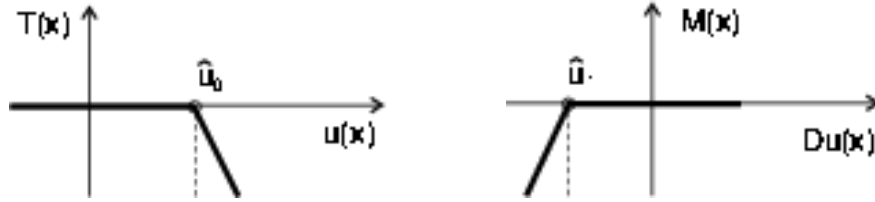
Obrázek 5.: Newtonovy okrajové podmínky

- **jednostranné** okrajové podmínky Newtonova typu (reprezentující jednostranné pružné posuvné a natáčivé uložení), mající za následek semikoercivitu úlohy jsou dané předpisy

$$\gamma_N^{(3)}(u_2) + k\gamma^{(0)}(u_2^+) = \hat{u}_3 \quad (\text{nebo } T(u_2, \vartheta_2) + ku_2^+ = \hat{T}),$$

$$\gamma_N^{(2)}(D^2u_2) - m\gamma^{(1)}(u_2^-) = \hat{u}_2 \quad (\text{nebo } M(u_2, \vartheta_2) - mDu_2^- = \hat{M}),$$

kde u_2^+ (Du_2^-) značí kladnou (zápornou) část hodnoty funkce (derivace).



Obrázek 6.: Newtonovy jednostranné okrajové podmínky

- okrajové podmínky Signoriniho typu reprezentující **jednostranné** vertikální posunutí (průhyby) (pro dvojici $(T(u_2, \vartheta_2), u_2)$ a homogenní případ, to je pro $u_2(x) \geq h(x)$, $h(x) = 0$, $x = 0, L$)

$$\gamma^{(0)}(u_2) \geq 0, \quad \gamma_N^{(3)}(u_2) \leq 0, \quad \gamma_N^{(3)}(u_2) \cdot \gamma^{(0)}(u_2) = 0,$$

nebo v podrobném zápisu

$$u_2(0) \geq 0, \quad T(0^+) \leq 0, \quad u_2(0) \cdot T(0^+) = 0,$$

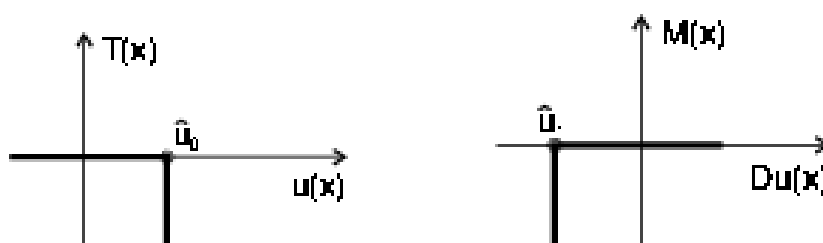
$$u_2(L) \geq 0, \quad T(L^-) \leq 0, \quad u_2(L) \cdot T(L^-) = 0,$$

- okrajové podmínky Signoriniho typu reprezentující jednostranné natočení (pro dvojici $(M(u), Du_2)$ homogenní případ, to je pro $Du_2(x) \leq h(x)$, $h(x) = 0$, $x = 0, L$)

$$\gamma^{(1)}(u_2) \leq 0, \quad \gamma_N^{(2)}(u_2) \geq 0, \quad \gamma_N^{(2)}(u_2) \cdot \gamma^{(1)}(u_2) = 0,$$

nebo v podrobném zápisu

$$\begin{aligned} Du_2(0) \leq 0, \quad M(0^+) \geq 0, \quad Du_2(0) \cdot M(0^+) = 0, \\ Du_2(L) \leq 0, \quad M(L^-) \geq 0, \quad Du_2(L) \cdot M(L^-) = 0. \end{aligned}$$



Obrázek 7.: Signoriniho jednostranné okrajové podmínky

- **modely tření: a)** – nejdříve uvedeme formulaci podmínek reprezentujících posuvné podpory s „daným tuhým třením“, to je předpis vzájemného vztahu dvojice $(T(u_2, \vartheta_2), u_2)$

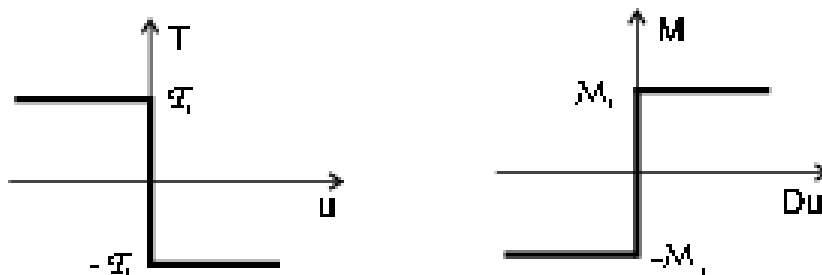
$$\begin{aligned} |T(u_2, \vartheta_2)(0^+)| \leq \mathcal{T}_1, \quad |T(u_2, \vartheta_2)(L^-)| \leq \mathcal{T}_2, \\ \mathcal{T}_1 |u_2(0)| + T(u_2, \vartheta_2)(0^+) u_2(0) = 0, \\ \mathcal{T}_2 |u_2(L)| + T(u_2, \vartheta_2)(L^-) u_2(L) = 0, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{T}_i \in \mathbf{R}^1$, $\mathcal{T}_i \geq 0$, $i = 1, 2$ jsou dané maximální hodnoty odpovídajících reakcí pro posuvné tření.

- **modely tření: b)** – nyní uvedeme formulaci podmínek reprezentujících natáčivé podpory s „daným tuhým třením“, to je předpis pro $(M(u_2, \vartheta_2), Du_2)$

$$\begin{aligned} |M(u_2, \vartheta_2)(0^+)| \leq \mathcal{M}_1, \quad |M(u_2, \vartheta_2)(L^-)| \leq \mathcal{M}_2, \\ \mathcal{M}_1 |Du_2(0)| - M(u_2, \vartheta_2)(0^+) Du_2(0) = 0, \\ \mathcal{M}_2 |Du_2(L)| - M(u_2, \vartheta_2)(L^-) Du_2(L) = 0, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{M}_i \in \mathbf{R}^1$, $\mathcal{M}_i \geq 0$, $i = 1, 2$ jsou dané maximální hodnoty odpovídajících reakcí pro natáčivé tření.



Obrázek 8.: Okrajové podmínky pro „dané tuhé“ tření

- **modely tření: c)** – formulace podmínek reprezentujících jednostranné posuvné podpory s „daným tuhým třením“ pro dvojici $(T(u), u_2)$

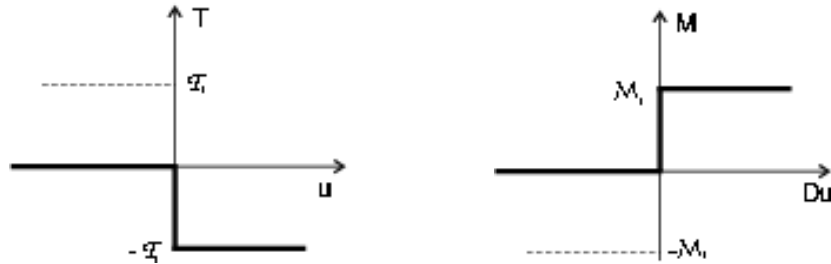
$$\begin{aligned} T(u_2, \vartheta_2)(0^+) &\in (-\mathcal{T}_1, 0), & T(u_2, \vartheta_2)(L^-) &\in (-\mathcal{T}_2, 0), \\ \mathcal{T}_1|u_2(0)| + T(u_2, \vartheta_2)(0^+)u_2(0)^+ &= 0, \\ \mathcal{T}_2|u_2(L)| + T(u_2, \vartheta_2)(L^-)u_2(L)^+ &= 0, \end{aligned}$$

a odpovídající varianta pro natočení, to je

- **modely tření: d)** – formulace podmínek reprezentujících jednostranné natáčivé podpory s „daným tuhým třením“ pro dvojici $(M(u_2, \vartheta_2), Du_2)$

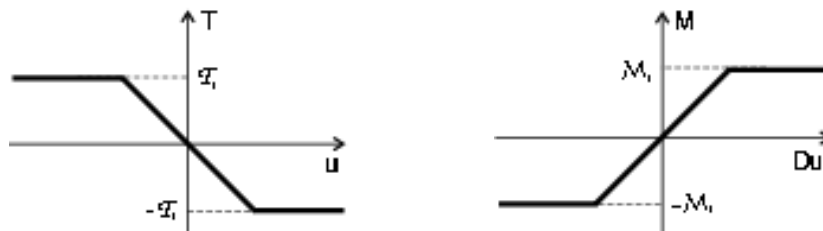
$$\begin{aligned} M(u_2, \vartheta_2)(0^+) &\in (0, \mathcal{M}_1), & M(u_2, \vartheta_2)(L^-) &\in (0, \mathcal{M}_2), \\ \mathcal{M}_1|Du_2(0)| - M(u_2, \vartheta_2)(0^+)(Du_2(0))^- &= 0, \\ \mathcal{M}_2|Du_2(L)| - M(u_2, \vartheta_2)(L^-)(Du_2(L))^- &= 0, \end{aligned}$$

jejich znázornění je uvedeno na následujícím obrázku.



Obrázek 9.: Okrajové podmínky pro jednostranné „dané tuhé“ tření

- **modely tření: e)** – nakonec uvádíme a jen pro ilustraci schema okrajových podmínek pro tzv. pružné posuvné a natáčivé tření, jež je jistým zobecněním Newtonových okrajových podmínek zahrnujících omezení na velikosti odpovídajících reakcí.



Obrázek 10: Okrajové podmínky pro „dané pružné“ tření

- **výjimečné kombinace** okrajových podmínek: budou tvořeny těmi *speciálními* kombinacemi předchozích typů okrajových podmínek, jež také ještě umožní následnou dekompozici svázané úlohy. Tedy v naší třídě speciálních okrajových podmínek nyní (jak vyplyne z další analýzy, uvádíme zde jen výčet typů podmínek) zůstávají pouze následující tři typy:

4. *výjimečný případ* – zřejmě jde o zobecnění 1. výjimečného případu daného prostým podepřením, kde nyní uvolníme vazbu na průhyb (to je nyní předepíšeme kombinaci *neklasických* podmínek Newtonova typu pro pružnou posuvnou podporu a *klasických* Neumannových podmínek):

– „pružně podepřené konce“:

$$\gamma_N^{(3)}(u_2) + k\gamma^{(0)}(u_2) = \hat{u}_3 \quad (\text{nebo } T(u_2, \vartheta_2) + ku_2 = \hat{T}),$$

– „momentové zatížení na koncích“:

$$\gamma_N^{(2)}(u_2) = \hat{u}_2 \quad (\text{nebo } M(u_2, \vartheta_2) = \hat{M});$$

a zřejmě také další

5. *výjimečný případ* – zřejmě jde o zobecnění 2. výjimečného případu (předepisujeme smíšené *neklasické* Newtonovy (místo klasických Dirichletových) a *klasické* Neumannovy podmínky):

– „pružně vetknutý konec“ v $x = 0$:

$$\gamma_N^{(3)}(u_2)|_{x=0} + k\gamma^{(0)}(u_2)|_{x=0} = \hat{u}_3^0 \quad (\text{nebo } T(0^+) + ku_2(0) = \hat{T}^0),$$

$$\gamma_N^{(2)}(u_2)|_{x=0} - m\gamma^{(1)}(u_2)|_{x=0} = \hat{u}_2^0 \quad (\text{nebo } M(0^+) + mDu_2(0) = \hat{M}^0),$$

– „volný zatížený konec“ v $x = L$:

$$\gamma_N^{(2)}(u)|_{x=L} = \hat{u}_2^L \quad (\text{nebo } M(L^-) = \hat{M}^L),$$

$$\gamma_N^{(3)}(u)|_{x=L} = \hat{u}_3^L \quad (\text{nebo } T(L^-) = \hat{T}^L).$$

a následuje poslední z elementárních možností redukce úlohy dekompozicí operátoru čtvrtého řádu, to je

6. *výjimečný případ* – zřejmě jde o přímé zobecnění 3. výjimečného případu (předepisujeme smíšené zobecnění kombinovaných podmínek typu II., to je *neklasické* Newtonovy (místo klasických Dirichletových) a *klasické* Neumannovy podmínky):

– „pružné posuvné podepření s momentovým zatížením“ v $x = 0$:

$$\gamma_N^{(3)}(u_2)|_{x=0} + k\gamma^{(0)}(u_2)|_{x=0} = \hat{u}_3^0 \quad (\text{nebo } T(0^+) + ku_2(0) = \hat{T}^0),$$

$$\gamma_N^{(2)}(u_2)|_{x=0} = \hat{u}_2^0 \quad (\text{nebo } M(0^+) = \hat{M}^0),$$

– „pružné natočení se zatížením“ v $x = L$:

$$\gamma_N^{(2)}(u)|_{x=L} - m\gamma^{(1)}(u_2)|_{x=L} = \hat{u}_2^L \quad (\text{nebo } M(L^-) - mDu_2(L) = \hat{M}^L),$$

$$\gamma_N^{(3)}(u)|_{x=L} = \hat{u}_3^L \quad (\text{nebo } T(L^-) = \hat{T}^L).$$

- **smíšené:** Poněvadž, jak lze podrobným rozbořem jednotlivých situací ověřit (viz také dále), žádná další kombinace jednotlivých typů okrajových podmínek na hranici $\partial\Omega$ situaci s řešitelností odpovídající úlohy oproti zde uvedeným variantám nezhorší, nebudeme se v této práci dalšími možnými kombinacemi zmíněných typů zabývat.

Již z geometrického znázornění uvedených jednotlivých typů okrajových podmínek (viz obrázky 1.–10.) lze pozorovat vzájemné souvislosti mezi některými okrajovými podmínkami. Například grafy Dirichletových a Neumannových okrajových podmínek jsou zřejmě limitními případy grafů pro Newtonovy okrajové podmínky (Dirichletovy pro $k, m \rightarrow \infty$, Neumannovy pro $k, m \rightarrow 0$), znázornění Signoriniho okrajových podmínek můžeme vnímat jako limitní případ znázornění jednostraných okrajových podmínek Newtonova typu, jež zase mohou být odvozeny z bilaterálních Newtonových podmínek, znázornění modelů pružného či tuhého tření mohou být odvozeny z limitních přechodů Newtonových okrajových podmínek s omezením na přenos sil, atd. Podrobné matematické dokazování těchto souvislostí ponecháme stranou, jednotlivé případy budou samostatně a podrobně analyzovány v dalších částech této práce.

Jednotlivé definice *klasických formulací* a řešení všech studovaných úloh s výše uvedenými typy okrajových podmínek zde nebudeme z důvodů stručnosti uvádět, v dalším se zaměříme pouze na modelové typy — rovnice a nerovnice — studovaných úloh a jejich zobecněné formulace (a odpovídající definice zobecněných, to je slabých řešení). Z metodických důvodů však zformulujeme, a pouze pro ilustraci, jeden prototyp definice klasické formulace a klasického řešení pro upravené a zjednodušené řídicí rovnice a modelové okrajové podmínky (viz [12]). Tedy bez dalších podrobností a s využitím aparátu abstraktních funkcí (viz například [7]) nyní přejdeme k následující definici *první z modelových úloh*.

Definice 1 Předpokládejme, že

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{r}\} \in [C(Q) \times C(Q)]^2, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2\}, \quad \mathbf{r} = \{r_1, r_2\}$$

je daná čtveřice spojitých abstraktních funkcí. Nech $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 \in \mathbf{R}^2$ jsou dané dvojice čísel, $\hat{s}_{2,0}, \hat{M} \in \mathbf{R}^1$, a $\vartheta_{0,1} = \vartheta_{0,1}(x)$, $\vartheta_{0,2} = \vartheta_{0,2}(x)$ jsou dané funkce. Potom čtveřice abstraktních funkcí

$$\{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\} = \{\{u_1(t), u_2(t)\}, \{\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)\}\}, \quad t \in I$$

pro níž platí

$$\begin{aligned} \{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\} &\in C(I; C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})) \cap C^{(1)}(I; C^{(1)}(\Omega)) \times \\ &\times C(I; C^{(4)}(\Omega) \cap C^{(2)}((0, L)) \cap C^{(1)}(\bar{\Omega})) \cap C^{(1)}(I; C^{(2)}(\Omega)) \times \\ &\times C^{(1)}((0, T); C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})) \times C^{(1)}((0, T); C^{(2)}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})) \end{aligned}$$

a taková, že platí

$$(P_v) \left\{ \begin{array}{ll} D^2\vartheta_1 - a_{1,1}\vartheta_1 + a_{1,2}\vartheta_2 - a_2 D_t(Du_1) + r_1 = a_1 D_t\vartheta_1 & \text{v } Q, \\ D^2\vartheta_2 - a_{2,2}\vartheta_2 - a_{2,1}\vartheta_1 + a_2 D_t(D^2u_2) + r_2 = a_1 D_t\vartheta_2 & \text{v } Q, \\ D^2u_1 - \alpha D\vartheta_1 = q_1 & \text{v } Q, \\ D^4u_2 + \alpha D^2\vartheta_2 = q_2 & \text{v } Q, \\ \gamma(u_1) = \hat{\mathbf{u}}_1, \gamma^{(0)}(u_2) = \hat{\mathbf{u}}_2, \gamma(\vartheta_1) = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1, \gamma(\vartheta_2) = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2 & \text{na } \Gamma, \\ \gamma^{(1)}(u_2) = \hat{s}_{2,0} & \text{na } \{0\} \times I, \\ \gamma_N^{(2)}(u_2) = \hat{M}, & \text{na } \{L\} \times I, \\ \vartheta_1 = \vartheta_{0,1}, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{0,2} & \text{v } \Omega_0 \end{array} \right.$$

se nazývá *klasickým* řešením modelové úlohy pro vetknutý nosník (na konci $x = 0$) v rámci linearizované teorie svázané termopružnosti.

Poznámka 2 Označení γ a γ_N v předchozí definici značí zmíněný Dirichletův a Neumannův operátor stop (viz například [2] a předchozí poznámku 1.).

Poznámka 3 Daná data $\hat{\mathbf{u}}_i = \{\hat{u}_{i,(0)}, \hat{u}_{i,(L)}\}$, $i = 1, 2$ reprezentují dané horizontální ($i = 1$) a vertikální ($i = 2$) posunutí konců nosníku (pro $i = 2$ jde o dané poklesy podpor), zatímco $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \{\hat{\vartheta}_{i,(0)}, \hat{\vartheta}_{i,(L)}\}$, $i = 1, 2$ reprezentují předepsanou teplotu ($i = 1$) a její gradient ($i = 2$) na koncích nosníku. Zadané funkce $\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}$ reprezentují počáteční hodnoty teploty a jejího gradientu v nosníku a $\hat{s}_{2,0}$ je daná hodnota natočení konce $x = 0$ zatímco \hat{M} reprezentuje velikost předepsaného momentového zatížení v $x = L$.

Předložená kombinace typů okrajových podmínek v předchozí definici je podle přesvědčení a znalostí autora práce nejjednodušší možná kombinace klasických okrajových podmínek, která ještě garantuje, že úloha zůstane svázanou.

Pokud jde o situaci s neklasickými okrajovými podmínkami, jako jsou např. jednostranné okrajové podmínky, podmínky se třením, nebo podmínky svazující u_i a ϑ_i na hranici, je situace komplikovanější a bude podrobně analyzována v dalším.

Poznámka 4 Nakonec ještě připomeňme, že všechny čtyři rovnice v úloze (P_v) jsou vzájemně svázané. Původ jejich svázanosti je však různý: svazující členy $a_2 D_t(Du_1)$ a $a_2 D_t(D^2u_2)$ pochází přímo z rovnice energie, zatímco členy $a_{i,j}\vartheta_j$, $i, j = 1, 2$ mají svůj původ v dimenzionální redukci a Newtonových okrajových podmínkách volné výměny tepla na povrchu původního tělesa. Poslední svázanost v rovnicích (1)–(4), to je členy v rovnicích (3) a (4) pochází z Duhamelova–Neumannova zákona (pro podrobnosti viz [3] a [16]).

Jak již bylo řečeno, analogicky lze postupovat při definici *klasického řešení* i pro *ostatní* typy okrajových podmínek: stačí upravit jen požadavek na hladkost funkcí $\{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$ a upřesnit tvar jejich předpisu na hranici $\partial\Omega$.

2.2 Zobecněné formulace modelových úloh

Jak je velmi dobře známo, klasické řešení úlohy nemusí existovat dokonce ani pro velmi standardní a praktické problémy, a to vzhledem k silným omezením jak na hladkosti řešení, tak i hladkosti zadávaných dat úlohy (materiálové funkce), zatížení, teplotní zdroje, atd. Proto, abychom dostatečně rozšířili třídu úloh majících v nějakém rozumném smyslu řešení, potřebujeme zavést nový, podstatně obecnější, ale stále „vhodný“ pojem řešení úlohy.

Z výše uvedených důvodů budeme definovat v této části práce pojem tzv. zobecněného (v literatuře někdy nazývaného slabého, často také variačního) řešení. Za tím účelem zavádíme nejdříve vhodné prostory funkcí a pak pomocné formy umožňující celý zápis nové formulace převést na formálně „jednotný“ tvar. Tedy definujeme používaný aparát a označení.

Lineární prostory kinematicky přípustných komponent vektorové funkce \mathbf{U} , to je funkce $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) = \{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}(t)$ (pro pevné $t \in I$) budou obecně vždy splňovat následující inkluze

$$H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq H^1(\Omega), \quad H_0^2(\Omega) \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq H^2(\Omega), \quad H_0^1(\Omega) \subseteq \mathcal{U}_i \subseteq H^1(\Omega), \quad i = 1, 2$$

a pro každou jednotlivou modelovou úlohu bude vždy upřesněn jejich konkrétní tvar, například pro v předchozím formulovanou úlohu (P_v) je volíme následovně

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}, \quad \mathcal{U}_1 = H_0^1(\Omega), \quad \mathcal{U}_2 = H_0^1(\Omega), \\ \mathcal{V} &= \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \mid \gamma(Dv) = 0\}, \end{aligned}$$

kde $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k = 1, 2$ značí standardní Sobolevovy prostory funkcí (viz např. [1] nebo [5]). Uvedená volba prostoru \mathcal{V} , odpovídající úloze (P_v), neumožňuje dekompozici úlohy (viz např. [12]), proto v následujících úlohách bude tvar prostoru měněn, nejčastěji bude definován jako $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Odpovídající prostor funkcí s konečnou energií je tvořen kartezským součinem příslušných prostorů testovacích funkcí a obecně (tedy i pro (P_v)) má tvar $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Pro formulace úloh s jednostrannými okrajovými podmínkami Signoriniho typu, předepsanými (z důvodů stručnosti a bez omezení na získané výsledky) pouze pro druhou složku funkce \mathbf{U} , definujeme opět modelovou konvexní množinu \mathcal{K} kinematicky přípustných průhybů následujícím předpisem

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{V} \in \mathcal{H} \mid u_2(x) \geq 0, \quad Du_2(x) \leq 0, \quad x = 0, L\}$$

a pro úlohy s okrajovými podmínkami (pro stejnou složku) modelujícími „dané“ tření zavádíme konvexní funkcionály $j, j_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{R}^1$, $i = 1, \dots, 4$ definované předpisy

$$j(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^4 j_i(\mathbf{V}) \quad \text{pro } \mathbf{V} \in \mathcal{H},$$

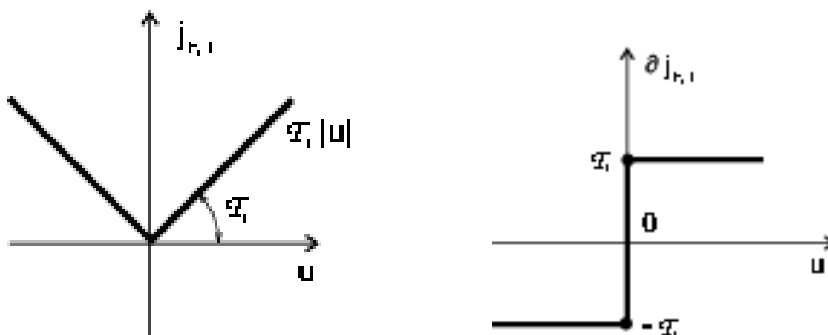
kde jednotlivé funkcionály $j_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{R}^1$ jsou pro dané „tuhé“ tření dány vztahy

(schema jejich průběhu včetně subgradientu je znázorněno na následujících obrázcích)

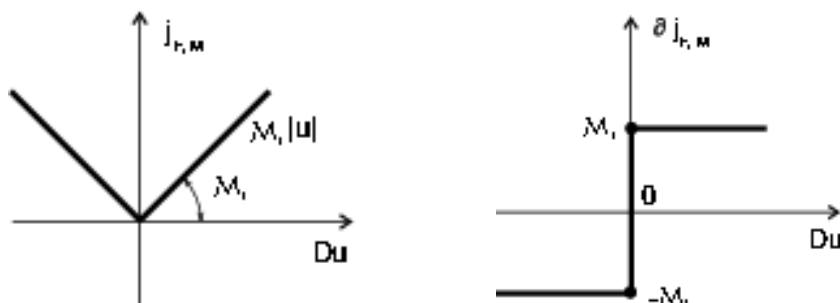
$$j_1(\mathbf{V}) = \mathcal{T}_1|v_2(0)|, \quad j_2(\mathbf{V}) = \mathcal{T}_2|v_2(L)|,$$

$$j_3(\mathbf{V}) = \mathcal{M}_1|Dv_2(0)|, \quad j_4(\mathbf{V}) = \mathcal{M}_2|Dv_2(L)|,$$

kde $\mathcal{T}_i, \mathcal{M}_i \geq 0, i = 1, 2$ jsou hodnoty daného tření odpovídající svislému posunutí (průhybu) a natáčení podpor.



Obrázek 11.1.: Potenciál a subgradient pro „dané tuhé“ posuvné tření

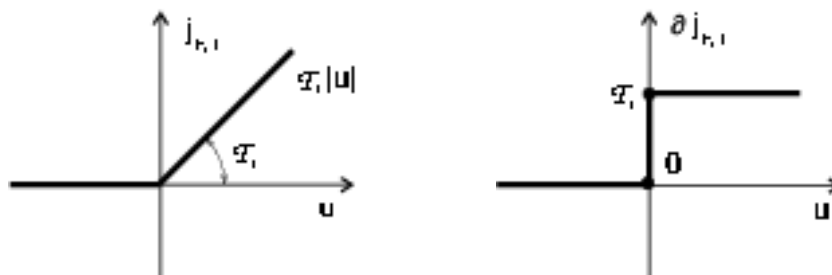


Obrázek 11.2.: Potenciál a subgradient pro „dané tuhé“ natáčivé tření

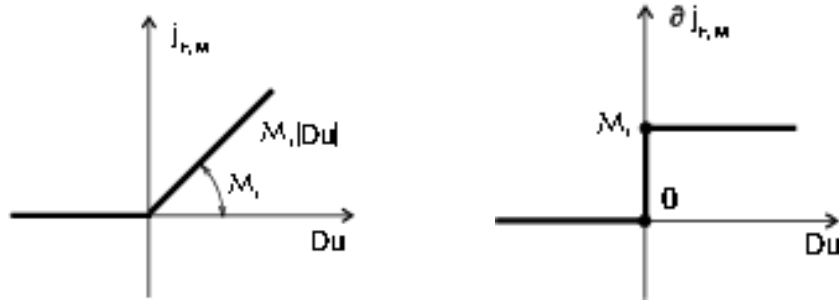
Pro variantu předchozích podmínek umožňující také odlehnutí od podpor, zavádíme podmínky jednostranného „tuhého“ tření, jež je zřejmě dáno následujícími vztahy (viz také schemata jejich znázornění na obrázcích)

$$j_1^+(\mathbf{V}) = \mathcal{T}_1(v_2(0))^+, \quad j_2^+(\mathbf{V}) = \mathcal{T}_2(v_2(L))^+,$$

$$j_3^-(\mathbf{V}) = \mathcal{M}_1(Dv_2(0))^-, \quad j_4^-(\mathbf{V}) = \mathcal{M}_2(Dv_2(L))^-.$$



Obr. 12.1.: Potenciál a subgradient pro jednostranné „dané tuhé“ posuvné tření



Obr. 12.2.: Potenciál a subgradient pro jednostranné „dané tuhé“ natáčivé tření

Pro zobecněnou (slabou) formulaci úlohy budeme dále potřebovat následující pomocné bilineární formy definované na $H^k(\Omega) \times H^k(\Omega)$ pro $k = 2$ a $k = 1$ předpisy

$$\mathbf{a}^{(i)}(u, v) = (D^i u, D^i v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} D^i u(x) D^i v(x) dx \quad u, v \in H^i(\Omega), \quad i = 0, 1, 2$$

$$\mathbf{b}(\vartheta, \eta) = (D\vartheta, \eta)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} D\vartheta(x) \eta(x) dx \quad \vartheta, \eta \in H^1(\Omega)$$

a nakonec definujeme hraniční bilineární formy reprezentující ve slabé formulaci vliv okrajových podmínek Newtonova typu

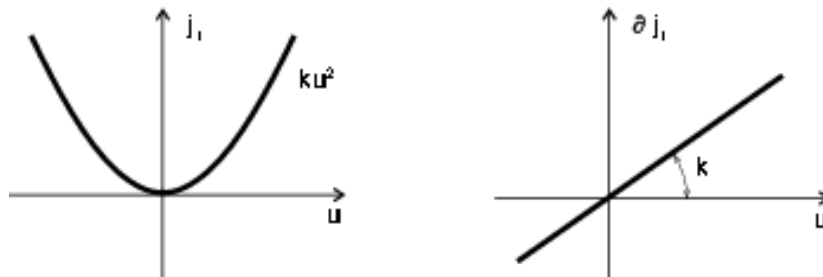
$$\mathbf{h}^{(T)}(u, v) [= (ku, v)_{L_2(\partial\Omega)}] = [k_{(x)} u(x) v(x)]_0^L,$$

$$\mathbf{h}^{(M)}(u, v) [= (mDu, Dv)_{L_2(\partial\Omega)}] = [m_{(x)} Du(x) Dv(x)]_0^L,$$

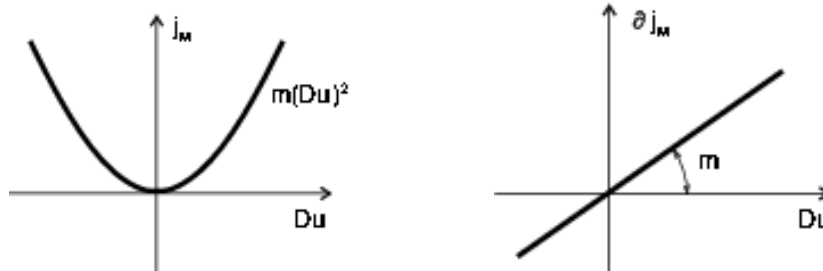
a pro vektorové funkce definujeme

$$\mathcal{H}^{(T)}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \mathbf{h}^{(T)}(u_2, v_2), \quad \mathcal{H}^{(M)}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \mathbf{h}^{(M)}(u_2, v_2),$$

když schema jejich potenciálu a průběhu gradientu je na následujících obrázcích



Obrázek 13.1.: Potenciál a jeho gradient pro pružné posuvné uložení



Obrázek 13.2.: Potenciál a jeho gradient pro pružné natáčivé uložení

Jejich nelineární analogie pro jednostranné pružné podpory získáme například derivováním odpovídajícího potenciálu, tedy pro zahrnutí jednostranných Newtonových okrajových podmínek do slabé formulace úlohy budeme definovat odpovídající formy ve tvaru

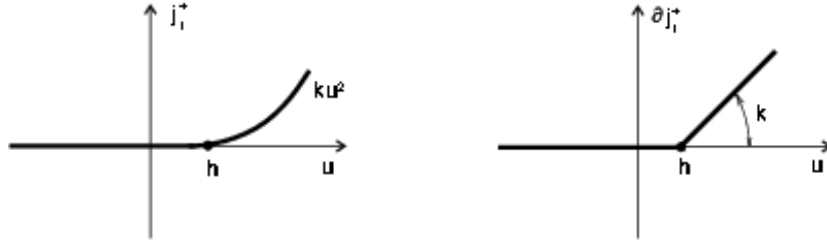
$$\mathbf{h}^{(T^+)}(u, v) [= (ku^+, v)_{L_2(\partial\Omega)}] = [k_{(x)}u(x)^+v(x)]_0^L$$

$$\mathbf{h}^{(M^-)}(u, v) [= (m(Du)^-, Dv)_{L_2(\partial\Omega)}] = [m_{(x)}(Du(x))^-Dv(x)]_0^L$$

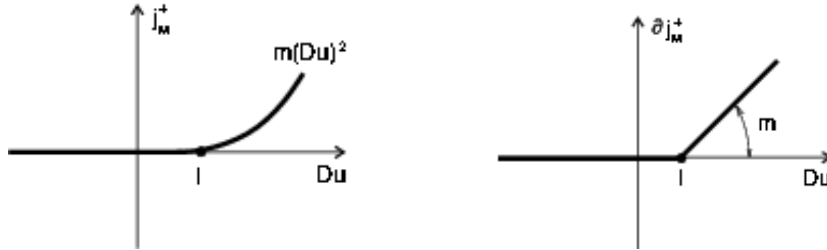
a opět pro vektorové funkce definujeme

$$\mathcal{H}^{(T^+)}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \mathbf{h}^{(T^+)}(u_2, v_2), \quad \mathcal{H}^{(M^-)}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \equiv \mathbf{h}^{(M^-)}(u_2, v_2),$$

odpovídající schéma je znázorněno na obrázcích



Obrázek 14.1.: Potenciál a jeho subgradient pro jednostranné pružné posuvné uložení



Obrázek 14.2.: Potenciál a jeho subgradient pro jednostranné pružné natáčivé uložení

Výsledné bilineární formy definované na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ a reprezentující deformační energii pro osově účinky (stretching), ohybové účinky (bending) a různé příspěvky od svázanosti mezi složkami \mathbf{U}

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_S(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= -\mathbf{a}^{(1)}(u_1, v_1) + \mathbf{a}^{(1)}(\vartheta_1, \eta_1) + a_{1,1}\mathbf{a}^{(0)}(\vartheta_1, \eta_1) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{A}_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathbf{a}^{(2)}(u_2, v_2) + \mathbf{a}^{(1)}(\vartheta_2, \eta_2) + a_{2,2}\mathbf{a}^{(0)}(\vartheta_2, \eta_2) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{B}_S(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= a_1(\vartheta_1, \eta_1)_{L_2(\Omega)} - a_2\mathbf{a}^{(0)}(u_1, D\eta_1) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{B}_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= a_1(\vartheta_2, \eta_2)_{L_2(\Omega)} + a_2\mathbf{a}^{(1)}(u_2, \eta_2) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{B}_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= -a_{1,2}\mathbf{a}^{(0)}(\vartheta_2, \eta_1) + a_{2,1}\mathbf{a}^{(0)}(\vartheta_1, \eta_2) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{C}_S(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \alpha\mathbf{b}(\vartheta_1, v_1) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{C}_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \alpha\mathbf{a}^{(1)}(\vartheta_2, v_2) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

kde jsme použili následujícího označení

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}, \quad u_i \in \mathcal{V}_i, \quad \vartheta_i \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{V} &= \{\{v_1, v_2\}, \{\eta_1, \eta_2\}\}, \quad v_i \in \mathcal{V}_i, \quad \eta_i \in \mathcal{U}_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

a nyní definujeme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathcal{A}_S(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \mathcal{A}_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathcal{B}_S(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \mathcal{B}_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \mathcal{B}_C(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{C}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathcal{C}_S(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \mathcal{C}_B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \text{pro } \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

Nakonec definujeme spojitou (jak se snadno ukáže) lineární formu na \mathcal{H} odpovídající potenciální energii vnějších sil, jež má pro úlohu (P_v) tvar (v ostatních případech se změní podle typu okrajových podmínek a jejich příspěvku k potenciální energii)

$$\mathcal{F}(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^2 (q_i, v_i)_{(i)} + \sum_{i=1}^2 (r_i, \vartheta_i)_{(i)} + \hat{M} \cdot Dv(0) \quad \text{pro } \mathbf{V} \in \mathcal{H},$$

kde $(\cdot, \cdot)_{(i)}$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(i)}$ značí párující dualitu na $\mathcal{V}_{(i)}^* \times \mathcal{V}_{(i)}$ a $\mathcal{U}_{(i)}^* \times \mathcal{U}_{(i)}$ (pro podrobnosti viz například [8]).

Nyní máme vše připraveno k definici pojmu zobecněného (slabého) řešení pro první modelovou úlohu (P_v) , jejíž klasická fomulace byla definována v předchozím odstavci. Poznamenejme, že následující zobecněná formulace úlohy (P_v) je typickým představitelem úloh majících tvar *lineární variační rovnice*.

Definice 2 Předpokládejme, že je dána čtveřice abstraktních funkcí

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{r}\} \in L_2(I; \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^*) \times L_2(I; \mathcal{U}_1^* \times \mathcal{U}_2^*)$$

představující zatížení a teplotní zdroje, a dvojice reálných funkcí

$$\boldsymbol{\vartheta}_0 = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$$

představujících počáteční podmínku. Nech \mathbf{u} dále $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}(t)$ je daná abstraktní funkce $\hat{\mathbf{U}}(t) \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ s.v. $t \in I$ a taková, že stopy funkčních hodnot jejích komponent jsou dány pomocí $\hat{\mathbf{u}}_1(t)$, $\hat{\mathbf{u}}_2(t)$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_1(t)$, $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_2(t) \in \mathbf{R}^2$ a stopa první derivace u_2 v $x = 0$ vztahem $\hat{s}_{2,0}(t) \in \mathbf{R}^1$; nech \mathbf{u} dále $\hat{M}(t) \in \mathbf{R}^1$ reprezentuje daný ohybový moment v $x = L$. Potom abstraktní funkci $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) : I \rightarrow \mathcal{H}$ takovou, že pro ni platí

$$\mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{H}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \quad (5)$$

$$D_t \mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \quad (6)$$

$$(P_{(0,0,3,4)} \mathbf{U})(0) = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \text{ v } C(I; L_2(\Omega)) \quad (7)$$

a takovou, že splňuje

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt - \int_I \mathcal{C}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{B}(D_t \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt = \int_I \mathcal{F}(\mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt \quad \forall \mathbf{V} \in L_2(I; \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (8)$$

nazveme *zobecněným* (slabým) řešením první modelové úlohy (P_v) pro jednostranně vetknutý nosník.

Pro úplnost a z metodických důvodů uvedeme ještě obecnější variantu předchozí formulace (při podrobnější analýze lze nahlédnout, že tato obecnější formulace v sobě obsahuje jednak předchozí a jednak i další formulace, tyto lze získat různými limitními přechody koeficientů posuvných a natáčivých tuhostí $k, m \rightarrow \infty, 0$). Z metodických důvodů je však vhodné jednotlivé typy rozlišovat a studovat samostatně. Tedy další významná typická formulace úlohy mající tvar *lineární variační rovnice* je úloha reprezentující zadání okrajových podmínek Newtonova typu, jež se ve formulaci projeví zahrnutím také hraničních bilineárních forem \mathbf{h}^T a \mathbf{h}^M , a je definována následujícím zápisem.

Definice 3 Předpokládejme, že je opět dána čtveřice abstraktních funkcí

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{r}\} \in L_2(I; \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^*) \times L_2(I; \mathcal{U}_1^* \times \mathcal{U}_2^*)$$

a dvojice reálných funkcí $\vartheta_0 = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Nech $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}(t)$ je daná abstraktní funkce $\hat{\mathbf{U}}(t) \in H^1(\Omega) \times (\cdot) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ s.v. $t \in I$ a taková, že stopy funkčních hodnot jejích komponent (s výjimkou druhé) jsou dány pomocí $\hat{\mathbf{u}}_1(t), \hat{\vartheta}_1(t), \hat{\vartheta}_2(t) \in \mathbf{R}^2$ a nech $\hat{M}^0(t), \hat{M}^L(t), \hat{T}^0(t), \hat{T}^L(t) \in \mathbf{R}^1$, s.v. $t \in I$, a $k^0, k^L, m^0, m^L \geq 0$, jsou dané tuhosti posuvných a natáčivých podpor. Potom abstraktní funkci $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) : I \rightarrow \mathcal{H}$ takovou, že pro ni platí

$$\mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{H}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \quad (9)$$

$$D_t \mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \quad (10)$$

$$(P_{(0,0,3,4)} \mathbf{U})(0) = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \text{ v } C(I; L_2(\Omega)) \quad (11)$$

a takovou, že splňuje

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt - \int_I \mathcal{C}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{H}^{(T)}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt + \int_I \mathcal{H}^{(M)}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{B}(D_t \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt = \int_I \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{V}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)) dt \quad \forall \mathbf{V} \in L_2(I; \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (12)$$

nazveme *zobecněným* (slabým) řešením „rozšířené varianty“ první modelové úlohy (P_{New}) s Newtonovými okrajovými podmínkami pro průhybovou funkci u_2 .

Poznámka 5 Zadané okrajové podmínky v předchozí definici představují úlohy ohybu termopružného nosníku na pružných posuvných i natáčivých podporách s předepsanými posunutími v ose nosníku a se zadanými okrajovými teplotami.

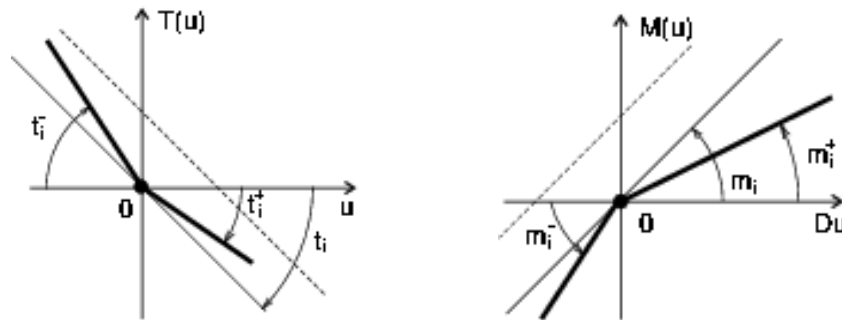
Toto zadání si zřejmě vynutí změnu ve druhé složce prostoru \mathcal{H} funkcí s konečnou energií, tedy prostor \mathcal{V}_2 definujeme pro tuto úlohu následovně: $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$. Funkcionál $\tilde{\mathcal{F}}$ se liší od funkcionálu \mathcal{F} z předchozí definice zahrnutím (standardním způsobem) daných zatížení $\hat{M}^0(t)$, $\hat{M}^L(t)$, $\hat{T}^0(t)$, $\hat{T}^L(t)$ v pružných podporech.

Zřejmě okrajové podmínky na ostatní komponenty abstraktní funkce \mathbf{U} lze volit také i jiným způsobem než v předchozí definici, a charakter úlohy (jak uvidíme z dalšího rozboru) se nezmění.

Poznámka 6 Newtonovy okrajové podmínky představují pružné posuvné a natáčivé podpory s danými tuhostmi $k_{(0)}$, $k_{(L)}$, $m_{(0)}$, $m_{(L)} \geq 0$, jež mají stejné vlastnosti pro tlakové i tahové namáhání.

Tyto podmínky lze zřejmým způsobem dále zobecnit a to tak, že můžeme uvažovat rozdílné tuhosti pro tahové aktivity, například $k_{(0)}^+$, $k_{(L)}^+$, $m_{(0)}^+$, $m_{(L)}^+$ a tlakové aktivity $k_{(0)}^-$, $k_{(L)}^-$, $m_{(0)}^-$, $m_{(L)}^-$, nebo rozdílné tuhosti pružin pro kladné a záporné výchylky.

Charakter odpovídající formulace je zřejmý a bude mít podobu nelineární variační rovnice druhé modelové úlohy (viz dále), s tím že hraniční členy budou rozlišovat znaménka výsledného průhybu. Schema odpovídajících okrajových podmínek je uvedeno na následujících obrázcích.



Obrázek 15.: Zobecněné Newtonovy okrajové podmínky

Zcela analogicky zavedeme další definice pro zbývající modelové případy, jež však mají výsledný tvar odlišný než je lineární variační rovnice.

Nejdříve uvedeme jednoduché zobecnění předchozí úlohy ve tvaru lineární variační rovnice užitím jednostranných Newtonových podmínek (alespoň na hodnoty komponenty u_2 nebo na její derivaci a alespoň na jednom konci nosníku).

Poznámka 7 Na tomto místě je vhodné poznamenat, že předchozí i následující formulace spolu velmi úzce souvisí. Opět je totiž možné analýzami předchozí formulace, zapsané ovšem pro „oboustranné“ Newtonovy podmínky, to je pro

různé hodnoty koeficientů $k_{(0)}^+$, $k_{(L)}^+$, $m_{(0)}^+$, $m_{(L)}^+$, $k_{(0)}^-$, $k_{(L)}^-$, $m_{(0)}^-$, $m_{(L)}^-$, a limitními přechody například pro $k_{(0)}^+ \rightarrow 0$, $k_{(L)}^+ \rightarrow 0$, $m_{(0)}^+ \rightarrow 0$, $m_{(L)}^+ \rightarrow 0$ a zavedením označení $k_{(0)} = k_{(0)}^-$, $k_{(L)} = k_{(L)}^-$, $m_{(0)} = m_{(0)}^-$, $m_{(L)} = m_{(L)}^-$, získat jednostranné okrajové podmínky pružného podepření.

Platí také obrácené tvrzení: složením dvou formulací pro jednostranné pružné podepření s opačnou orientací dostaneme bilaterální Newtonovy okrajové podmínky.

Tedy s využitím předchozího značení a s omezením na homogenní (z důvodu jednoduchosti zápisu) ostatní okrajové podmínky můžeme formulovat následující definici.

Definice 4 Předpokládejme, že je opět dána čtveřice abstraktních funkcí

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{r}\} \in L_2(I; \mathcal{V}_1^* \times \mathcal{V}_2^*) \times L_2(I; \mathcal{U}_1^* \times \mathcal{U}_2^*)$$

a dvojice reálných funkcí

$$\vartheta_0 = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$$

představujících počáteční podmínku, a nech $k_{(0)}, k_{(L)}, m_{(0)}, m_{(L)} \geq 0$, jsou dané tuhosti posuvných a natačivých podpor. Potom abstraktní funkci $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) : I \rightarrow \mathcal{H}$ takovou, že pro ni platí

$$\mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{H}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \quad (13)$$

$$D_t \mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2) \quad (14)$$

$$(P_{(0,0,3,4)} \mathbf{U})(0) = \{\vartheta_{0,1}, \vartheta_{0,2}\} \quad \forall C(I; L_2(\Omega)) \quad (15)$$

a takovou, že splňuje

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) dt - \int_I \mathcal{C}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{H}^{(T^+)}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) dt + \int_I \mathcal{H}^{(M^-)}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{B}(D_t \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)) dt = \int_I \mathcal{F}(\mathbf{V}(t)) dt \quad \forall \mathbf{V} \in L_2(I; \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (16)$$

nazveme *zobecněným* (slabým) řešením druhé modelové úlohy (P_{New^+}) s jednostrannými Newtonovými okrajovými podmínkami pro průhybovou funkci u_2 .

Poznámka 8 Zadání homogenních okrajových podmínek v předchozí definici značí zadání úlohy ohybu termopružného nosníku na jednostranných pružných posuvných i natačivých podporách a to jak bez vnějších silových i momentových zatížení v těchto podporách, tak i bez předepsaných osových posunutí a s nulovými okrajovými teplotami. Toto zadání si opět vynutí změnu v definici prostoru \mathcal{H} funkcí s konečnou energií pro tuto úlohu, tedy jednotlivé komponenty \mathcal{V}_1 , \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 , zůstanou stejné a prostor \mathcal{V}_2 definujeme pro tuto úlohu následovně $\mathcal{V}_2 = H_0^2(\Omega)$.

Dalším vzorovým modelem pro naše analýzy je *třetí modelová úloha* mající tvar v literatuře (alespoň pro stacionární případy) často nazývaný *variační nerovnice* prvního druhu (viz například [9]). Tato formulace odpovídá užití jednostranných („tuhých“, namísto „pružných“, jako tomu bylo pro Newtonovy podmínky v předchozí definici) okrajových podmínek Signoriniho typu pro průhybovou funkci v klasické formulaci. To má za následek zúžení lineárního prostoru testovacích funkcí \mathcal{H} na konvexní množinu kinematicky přípustných funkcí \mathcal{K} . Pokud současně předepíšeme ostatní okrajové podmínky stejně jako v předchozí definici, to je zvolíme stabilní homogenní okrajové podmínky, bude mít prostor funkcí s konečnou energií opět tvar $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, kde pro jednotlivé komponenty platí $\mathcal{V}_1 = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, $\mathcal{U}_i = H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. Tedy definujeme

Definice 5 Nech \mathcal{L} je dána čtveřice abstraktních a dvojice reálných funkcí

$$\{q_1, q_2, r_1, r_2\} \in L_2(I; [L_2(\Omega)]^4), \quad \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \in [L_2(\Omega)]^2.$$

Potom abstraktní funkci $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) : I \rightarrow \mathcal{H}$ pro níž platí

$$\mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{K}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \quad (17)$$

$$D_t \mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{(0,0,3,4)} \mathbf{U}(0) \equiv \{\vartheta_1, \vartheta_2\}(0) = \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \quad (\text{v } C(I; [L_2(\Omega)]^2)), \quad (19)$$

a takovou, že splňuje

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt + \int_I \mathcal{C}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{B}(D_t \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt \geq \int_I \mathcal{F}(\mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt \quad \forall \mathbf{V} \in L_2(I; \mathcal{K}) \end{aligned} \quad (20)$$

nazveme *zobecněným* řešením třetí modelové úlohy (P_S) s jednostrannými okrajovými podmínkami Signoriniho typu pro průhybovou funkci u_2 .

Zbývá poslední, to je čtvrtá modelová úloha zahrnující vliv tření v podporách odpovídající průhybové funkci. Pro jednoduchost se zde omezíme jen na tzv. dané „tuhé“ tření, pro jiné, obecnější modely viz například [13]. Pokud uvažujeme stejně jako v předchozí definici ostatní okrajové podmínky jako stabilní a homogenní, bude prostor funkcí s konečnou energií dán vztahem $\mathcal{H} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$, kde opět $\mathcal{V}_1 = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, $\mathcal{U}_i = H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$. Tedy můžeme zavést následující definici, pro stacionární úlohy někdy nazývanou variační nerovnicí 2. druhu (viz [9]).

Definice 6 Nech \mathcal{L} je dána čtveřice abstraktních a dvojice reálných funkcí

$$\{q_1, q_2, r_1, r_2\} \in L_2(I; [L_2(\Omega)]^4), \quad \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \in [L_2(\Omega)]^2.$$

Potom abstraktní funkci $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) : I \rightarrow \mathcal{H}$ pro níž platí

$$\mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{K}) \cap AC(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \quad (21)$$

$$D_t \mathbf{U} \in L_2(I; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times [L_2(\Omega)]^2), \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_{(0,0,3,4)} \mathbf{U}(0) \equiv \{\vartheta_1, \vartheta_2\}(0) = \{\vartheta_{1,0}, \vartheta_{2,0}\} \quad (\text{v } C(I; [L_2(\Omega)]^2)), \quad (23)$$

a takovou, že splňuje

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt + \int_I \mathcal{C}(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt + \\ & + \int_I j(\mathbf{V}(t)) dt - \int_I j(\mathbf{U}(t)) dt + \int_I \mathcal{B}(D_t \mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt \geq \\ & \geq \int_I \mathcal{F}(\mathbf{V}(t) - \mathbf{U}(t)) dt \quad \forall \mathbf{V} \in L_2(I; \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (24)$$

se nazývá *zobecněným* řešením čtvrté modelové úlohy ($P_{\mathcal{F}}$) s daným „tuhým“ třením na průhybovou funkci u_2 .

Je zřejmé, že k uvedeným prototypům modelových úloh lze definovat nejrůznější zobecnění a to pomocí různých variant zde uvedených či dalších typů okrajových podmínek.

Poznámka 9 Pokud v předchozí formulaci ($P_{\mathcal{F}}$) vezmeme místo funkcionalů j_i v definici j následující funkcionaly

$$\begin{aligned} j_i(\mathbf{V}) &= k_{(x)}(v_2(x))^2, \quad i = 1, 2, \quad x = 0, L \\ j_i(\mathbf{V}) &= m_{(x)}(Dv_2(x))^2, \quad i = 3, 4, \quad x = 0, L \end{aligned}$$

přejde úloha ($P_{\mathcal{F}}$) na úlohu (P_{New}) a to v důsledku diferencovatelnosti funkcionalů $j_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Zcela analogicky přejde tato úloha ($P_{\mathcal{F}}$) na v předchozím formulovanou úlohu (P_{New^+}), pokud za funkcionaly j_i v definici funkcionalu j vezmeme funkcionaly j_i^+ a j_i^- definované předpisem

$$\begin{aligned} j_i^+(\mathbf{V}) &= k_{(x)}(v_2^+(x))^2, \quad i = 1, 2, \quad x = 0, L \\ j_i^-(\mathbf{V}) &= m_{(x)}(Dv_2^-(x))^2, \quad i = 3, 4, \quad x = 0, L. \end{aligned}$$

Tedy úloha ($P_{\mathcal{F}}$) reprezentuje v tomto případě úlohu s jednostranným „pružným daným“ třením vymezeným velikostmi daného tření $k_{(x)}, m_{(x)} \geq 0, x = 0, L$ a jak je vidět, je ekvivalentní s dříve formulovanou úlohou (P_{New^+}) s jednostrannými pružnými podporami o tuhostech $k_{(x)}, m_{(x)} \geq 0, x = 0, L$. Důkaz tohoto tvrzení opět snadno plyne z diferencovatelnosti funkcionalů $j_i^+, i = 1, 2$ a $j_i^-, i = 3, 4$.

Uvedené vztahy mezi úlohami platí ovšem jen v důsledku diferencovatelnosti funkcionalů j_i , pokud mají „jen“ obecný tvar (například jsou konvexní a nediferencovatelné) nelze evoluční nerovnici v úloze ($P_{\mathcal{F}}$) dále zjednodušit.

2.3 Zjednodušení modelových úloh

Řídící rovnice (1)–(4) pro studovanou třídu modelových úloh tvoří soustavu čtyř vzájemně svázaných rovnic. Kontrolou jejich odvození a v důsledku zavedených předpokladů lze snadno zjistit, že k jejich podstatnému zjednodušení stačí učinit jeden, s ohledem na praktické použití výsledného modelu, velmi smysluplný předpoklad: stačí totiž předpokládat, že okolní prostředí obklopující náš modelový nosník (desku) má stejné fyzikální vlastnosti pod i nad nosníkem (deskou). Tedy vezmeme-li navíc v úvahu již učiněný předpoklad o homogenním a isotropním materiálu vyšetřovaného nosníku (desky), dostáváme se k situaci, kdy koeficienty α_h, α_d vyjadřující chování materiálu při volné výměně tepla na horním i dolním povrchu s okolím nabývají stejných hodnot, tedy platí

$$\alpha_h = \alpha_d = \bar{\alpha}.$$

V tomto případě se svázaný systém čtyř rovnic rozpadne na dva jednodušší systémy pro dvě rovnice (zřejmě rovnice (1) a (2) již nebudou vzájemně svázané přes teploty ϑ_1 a ϑ_2), jež však zůstanou i nadále svázané prostřednictvím deformačních a teplotních veličin. Tyto nové a jednodušší systémy umožní oddělit chování nosníku v ose a kolmo k ose, a popisují tak dva samostatné jevy, které se v literatuře nazývají „stretching effect“ (osové namáhání) a „bending effect“ (ohybové namáhání). Tedy původní soustava řídicích rovnic (1) – (4) se rozloží do dvou vzájemně nezávislých následující soustav:

— **stretching** effect (osové účinky)

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} - \frac{2\bar{\alpha}}{kH} \vartheta_1 - \theta_0 \frac{E\alpha}{k} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + \tilde{r}_1 = a \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EH \frac{\partial}{\partial x} u_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha EH \vartheta_1) = \tilde{q}_1, \quad (26)$$

— **bending** effect (ohybové účinky)

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} - \left(\frac{12}{H^2} + \frac{6\bar{\alpha}}{kH} \right) \vartheta_2 + \theta_0 \frac{E\alpha}{k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + \tilde{r}_2 = a \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha EJ \vartheta_2) = \tilde{q}_2, \quad (28)$$

kde jsme užili následujícího označení

$$\tilde{r}_1 = r_1 + \frac{\bar{\alpha}}{kH} (\vartheta_h + \vartheta_d), \quad \tilde{r}_2 = r_2 + \frac{6\bar{\alpha}}{kH^2} (\vartheta_h - \vartheta_d).$$

Vzhledem k tomu, že problematika spojená s řešitelností první soustavy je zcela analogická k problematice řešitelnosti úloh svázané termopružnosti druhého řádu jejichž řešitelnosti byla věnována v literatuře značná pozornost (pro přehled

literatury a komentáře viz například [12] a [16], atd.) a pokud je nám známo, nelze ji nijak výrazně dále zjednodušit, nebudeme se jí v dalším již zabývat a soustředíme svoji pozornost zcela na analýzu úlohy čtvrtého řádu, to je na analýzu ohybových účinků.

Pro úplnost uvedeme na tomto místě tvar zobecněné formulace po dekompozici obou účinků, a to jen pro jednu z úloh definovaných v předchozí kapitole. U ostatních úloh již nebudeme dále osově namáhání (stretching effect) formulovat ani analyzovat a v dalších částech předkládané práce se zaměříme pouze na podrobné studium úloh reprezentujících pouze ohybové účinky.

Jestliže tedy předpokládáme $\alpha_u = \alpha_d = \bar{\alpha}$ a zaměříme-li se na ilustraci situace pro jednostranné okrajové podmínky Signoriniho typu pro průhybovou funkci, potom lze například *třetí modelovou úlohu* (\mathcal{P}_S) rozložit do dvou vzájemně nezávislých úloh, to je (\mathcal{P}_S) rozložíme na úlohu (\mathcal{P}_S^{Str}) a úlohu (\mathcal{P}_S^{Ben}). Potom místo úlohy svázané termopružnosti (\mathcal{P}_S) pro čtveřici neznámých funkcí $\mathbf{U} = \{\{u_1, u_2\}, \{\vartheta_1, \vartheta_2\}\}$ máme dvě navzájem nezávislé úlohy svázané termopružnosti pro následující dvojice funkcí $\mathbf{U}_1 = \{u_1, \vartheta_1\}$ a $\mathbf{U}_2 = \{u_2, \vartheta_2\}$ (kde testovací funkce značíme $\mathbf{V}_i = \{v_i, \eta_i\}$, $i = 1, 2$):

– *úloha svázané termopružnosti pro osově účinky* (\mathcal{P}_S^{Str})

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}_S(\mathbf{U}_1(t), \mathbf{V}_1(t)) dt + \int_I \mathcal{C}_S(\mathbf{U}_1(t), \mathbf{V}_1(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{B}_S(D_t \mathbf{U}_1(t), \mathbf{V}_1(t)) dt = \int_I \mathcal{F}_S(\mathbf{V}_1(t)) dt \quad \forall \mathbf{V}_1 \in L_2(I; \mathcal{H}_S) \end{aligned}$$

– *úloha svázané termopružnosti pro ohybové účinky* (\mathcal{P}_S^{Ben})

$$\begin{aligned} & \int_I \mathcal{A}_B(\mathbf{U}_2(t), \mathbf{V}_2(t) - \mathbf{U}_2(t)) dt + \int_I \mathcal{C}_B(\mathbf{U}_2(t), \mathbf{V}_2(t) - \mathbf{U}_2(t)) dt + \\ & + \int_I \mathcal{B}_B(D_t \mathbf{U}_2(t), \mathbf{V}_2(t) - \mathbf{U}_2(t)) dt \geq \int_I \mathcal{F}_B(\mathbf{V}_2(t) - \mathbf{U}_2(t)) dt \quad \forall \mathbf{V}_2 \in L_2(I; \mathcal{K}_B), \end{aligned}$$

kde bilineární formy \mathcal{A}_S , \mathcal{B}_S , \mathcal{C}_S , \mathcal{A}_B , \mathcal{B}_B , \mathcal{C}_B a lineární formy \mathcal{F}_S , \mathcal{F}_B jsou odpovídající části forem \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} a \mathcal{F} , zatímco \mathcal{H}_S , \mathcal{K}_B jsou odpovídající restriktce \mathcal{H} , \mathcal{K} odpovídající osovým a ohybovým účinkům (podrobnosti pro jiné formulace popisující ohybové účinky budou uvedeny v dalším).

Poznamenejme ještě, že úloha (\mathcal{P}_S^{Str}) má tvar pouze variační rovnice vzhledem k linearitě prostoru testovacích funkcí \mathcal{H}_S zatímco (\mathcal{P}_S^{Ben}) má tvar variační nerovnice v důsledku omezení množiny kinematicky přípustných funkcí $\mathcal{K}_B \equiv \mathbf{P}_{(0,2,0,4)}(\mathcal{K})$. Pokud bychom opustili stabilní homogenní okrajové podmínky v úloze (\mathcal{P}_S^{Str}) a předepsali například jednostranné podmínky Signoriniho typu i na osově posunutí nebo teploty, měla by i úloha (\mathcal{P}_S^{Str}) tvar variační nerovnice.

Zcela analogický přístup může být použit i pro ostatní modelové úlohy definované v předchozí kapitole, abychom získaly obdobné zjednodušení a rozpad soustavy vzhledem k materiálovým vlastnostem.

3 Řešitelnost modelových úloh

Vzhledem k vytčeným cílům této práce se dále budeme podrobněji zabývat jen úlohami, jejichž zobecněné formulace mají tvar evolučních nelineárních variačních rovnic nebo variačních nerovnic 1. a 2. druhu.

3.1 Poznámka k řešitelnosti první modelové úlohy

Poměrně komplikovaný případ úlohy (P_v) , to je lineární evoluční variační rovnice, jež nemůže být dále významně zjednodušena metodou faktorizace, je podrobně analyzován v [12] a v souvislostech s řešitelností zde studované třídy úloh také v [16], není tedy potřebné dále uvádět podrobnosti k metodě důkazu její řešitelnosti. Uvedeme jen několik poznámek k řešitelnosti úlohy, jež vznikne zobecněním úlohy (P_v) při užití Newtonových okrajových podmínek, tj. úlohy (P_{New}) .

3.2 Řešitelnost „rozšířené varianty“ první modelové úlohy

Jak lze ukázat, formulace úlohy (P_{New}) s Newtonovými okrajovými podmínkami v sobě zahrnuje celou třídu dalších úloh, jež jsou jejími speciálními případy a mohou být získány z úlohy (P_{New}) vhodnými manipulacemi s pružnými posuvnými a natáčivými tuhostmi $k_{(0)}, k_{(L)}, m_{(0)}, m_{(L)} \geq 0$, to je se zvětšováním nebo zmenšováním jejich hodnot.

Například v [12] podrobně analyzovanou úlohu (P_v) dostaneme z úlohy (P_{New}) následujícími limitními přechody

$$k_{(0)}, m_{(0)} \rightarrow \infty, \quad k_{(L)} \rightarrow \infty, \quad m_{(L)} \rightarrow 0.$$

Zcela analogicky, viz také poznámka 7., lze ze zobecněného zápisu (\tilde{P}_{New}) úlohy (P_{New}) rozlišujícího tuhosti přenášející tahová a tlaková namáhání, získat limitními přechody úlohu (P_{New+}) pro jednostranné Newtonovy okrajové podmínky. Tedy pro

$$k_{(0)}^+ \rightarrow 0, \quad k_{(L)}^+ \rightarrow 0, \quad m_{(0)}^+ \rightarrow 0, \quad m_{(L)}^+ \rightarrow 0$$

dostaneme z (\tilde{P}_{New}) úlohu (P_{New+}) .

To je však druhá modelová úloha, jež po omezení na ohybové účinky v sobě také zahrnuje třetí modelovou úlohu pro okrajové podmínky Signoriniho typu. K důkazu tohoto tvrzení stačí vzít v úvahu předchozí a následující limitní přechody

$$k_{(0)}^- \rightarrow \infty, \quad k_{(L)}^- \rightarrow \infty, \quad m_{(0)}^- \rightarrow \infty, \quad m_{(L)}^- \rightarrow \infty.$$

Vidíme, že k důkazu řešitelnosti úlohy (\tilde{P}_{New}) , nebo její jednodušší formy, to je úlohy (P_{New}) s Newtonovými okrajovými podmínkami bychom mohli užít obdobný postup realizovaný v [12] při důkazu řešitelnosti úlohy (P_v) , jen příslušné výpočty a odhady by musely nyní zahrnout i vliv hraničních členů. Z důvodů stručnosti tento důkaz zde neuvádíme.

3.3 Dekompozice modelových úloh

Připomeňme, že některé typy okrajových podmínek hrají při analýze úloh čtvrtého řádu zcela vyjimečnou roli. Umožňují totiž rozložit úlohu čtvrtého řádu na dvě úlohy druhého řádu, což bývá mnohem příjemnější pro techniku řešení. Pokud se však pohybujeme v matematické teorii svázané termopružnosti pro nosníky nebo desky, lze tímto způsobem pro vybranou třídu okrajových podmínek dosáhnout mnohem více než jen snížení řádu řešené úlohy, ale také transformaci svázané úlohy v úlohu nesvázanou.

Hlavní idea takového postupu je (v [12], [16] a [17]) ukázána na příkladě reprezentující prostě podepřený nosník (viz klasické okrajové podmínky Dirichletova typu kombinované s podmínkami Neumannova typu), kdy úloha čtvrtého řádu pro průhybovou funkci může být ekvivalentně přeformulována na dvě Dirichletovy úlohy druhého řádu (viz [12]). Stejného postupu (se stejným výsledkem pokud jde o dekompozici) lze užít i pro jednostranně vetknutý nosník s volným koncem, to je pro úlohu čtvrtého řádu se smíšenými okrajovými podmínkami Dirichletova (na jednom konci) a Neumannova typu (na druhém konci), viz [16] a [17] pro přesnou formulaci, jež může být ekvivalentně přeformulována na dvě Cauchyovy úlohy druhého řádu. Posledním základním typem takové úlohy je případ smíšených kombinovaných okrajových podmínek, to je podmínky prostého podepření na jednom konci a podmínky s vázaným natočením na druhém konci. Potom úlohu čtvrtého řádu lze ekvivalentně přeformulovat na dvě smíšené úlohy druhého řádu.

Další tři typy okrajových podmínek a jejich kombinací umožňujících dekompozici úlohy představují přirozené zobecnění prvních tří typů podpor (prosté podepření a vetknutí) o pružné podpory Newtonova typu. Tím je vyčerpáno šest případů (tři základní a tři jejich zobecnění), které jsme ve výčtu uvažovaných okrajových podmínek nazvali *vyjimečnými případy*, viz také [17].

Motivováni předchozími možnostmi dekompozice úloh s uvedenými okrajovými podmínkami typu *vyjimečné případy*, lze celý postup zobecnit a ukázat, že existuje celá, dostatečně široká třída okrajových podmínek, které za jistých, dodatečných podmínek dekompozice, umožňují vynucení realizace okrajových podmínek předchozího typu a tedy umožňujících transformaci svázané úlohy na úlohu jednodušší, nesvázanou. V semikoercivních případech mohou hrát roli podmínky dekompozice například podmínky řešitelnosti úlohy, to je podmínky které v některých případech budou garantovat existenci a jednoznačnost řešení budou i podmínkami dekompozice umožňujícími rozpad svázané úlohy. Je zřejmé, že předložená analýza může být velmi prospěšná při řešení praktických problémů: zdá se výrazně jednodušší počítat postupně dvě nesvázané úlohy než jednu úlohu se svázanými proměnnými (oba problémy mají zřejmě stejný počet diskrétních proměnných).

V následujícím se budeme zabývat pouze těmi vzorovými modelovými úlohami, jež s využitím rozpadu soustavy v důsledku materiálových předpokladů umožňují

studovat pouze ohybové námáhání nosníku (desky) a pomocí dodatečných podmínek vynutit jak dekompozici svázané soustavy tak i zajistit její řešitelnost. Zde vycházíme z prací [12], [16] a navazujeme na [17].

3.3.1 Speciální případy okrajových podmínek

V práci [17] je problematika užití metody faktorizace ilustrována na výše zmíněných šesti úlohách. Stručně připomínáme, že vzorová *modelová úloha* umožňující dekompozici svázané úlohy čtvrtého řádu na dvě nsvázané úlohy druhého řádu má tvar

$$(P_{pp}) \begin{cases} D^4u + \alpha D^2\vartheta = q & \text{v } Q, \\ a_1 D_t \vartheta = D^2\vartheta - a_2 \vartheta + a_3 D_t D^2u + r & \text{v } Q, \\ \gamma^{(0)}(u) = \hat{u}, \quad \gamma_N^{(2)}(M) = \hat{M}, \quad \gamma(\vartheta) = \hat{\vartheta} & \text{na } \Gamma, \\ \vartheta = \vartheta_0 & \text{na } \Omega_0, \end{cases}$$

kde a \hat{u} , $\hat{\vartheta}$, \hat{M} jsou předepsané vertikální poklesy podpor, předepsané teploty a zadané ohybové momenty na koncích nosníku.

Užitím metody faktorizace (viz [12], [16] a [17]), můžeme původní svázanou úlohu čtvrtého řádu (P_{pp}) ekvivalentně přeformulovat na tři vzájemně svázané úlohy druhého řádu pro neznámou trojici funkcí $\{M, u, \vartheta\}$ a z nové soustavy tří úloh můžeme eliminací členu $a_3 D_t D^2u$ z úlohy (P_ϑ) získat vzájemně nsvázanou soustavu dvou úloh druhého řádu. Tvrzení o řešitelnosti úlohy (P_{pp}^{Ben}), jejíž zobecněnou formulaci získáme dosazením za prostor kinematically přípustných posunutí \mathcal{V} prostor definovaný vztahem $H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$, je uvedeno v následující větě.

Věta 1 *Předpokládejme, že jsou dány funkce $\{q, r\} \in \mathcal{V}^* \times L_2(\Omega)$. Potom existuje jediné zobecněné řešení úlohy (P_{pp}^{Ben}).*

Důkaz věty spočívá, jak snadno vyplývá z předchozího, na dekompozici úlohy a postupném řešení nejdříve úlohy vedení tepla a potom úlohy pružnosti se zadaným teplotním polem. Pro existenci a jednoznačnost řešení úlohy pružnosti využijeme tvrzení, že $\|D^2u\|_{L_2(\Omega)}$ tvoří na $\mathcal{V} = H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ normu a to ekvivalentní se standardní normou na $H^2(\Omega)$.

3.3.2 Dekompozice a řešitelnost druhé modelové úlohy

O řešitelnosti druhé modelové úlohy vyznačující se pouze semikoercivní bilineární formou (výskyt pouze druhých derivací a důsledek užití pouze jednostranných okrajových podmínek) bude rozhodovat možnost formulace dodatečných podmínek řešitelnosti. Připomeňme však, že se zde a všude v další zabýváme pouze ohybovou variantou každé úlohy, to je nyní ohybovou variantou druhé modelové úlohy, to je úlohou ($P_{New^+}^{Ben}$).

Ukážeme, že v tomto v případě (a také v následujících případech) se podmínky řešitelnosti stávají současně podmínkami dekompozice ve smyslu předchozí poznámky. Snadno lze totiž nahlédnout, že v těchto speciálních případech si podmínky řešitelnosti vynutí realizaci některého z vyjímecných případů. V tomto konkrétním případě vynutí podmínky řešitelnosti realizaci podmínek pružného posuvného podepření, to je podmínek z 4. vyjímecného případu a tedy úlohu bude možno transformovat na nsvázanou, jež bude mít právě jedno řešení. Přesněji o situaci vypovídá následující tvrzení.

Věta 2 *Nutná podmínka pro existenci řešení úlohy (P_{New+}^{Ben}) má tvar*

$$0 \geq \langle q_2(t), L - x \rangle, \quad 0 \geq \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. t \in I,$$

zatímco postačující podmínka pro existenci a jednoznačnost řešení, a pro dekompozici úlohy (P_{New+}^{Ben}) mají stejný tvar, ale s ostrou nerovností, to je

$$0 > \langle q_2(t), L - x \rangle, \quad 0 > \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. t \in I.$$

Důkaz tohoto tvrzení zde nebudeme provádět, z matematického hlediska je zcela analogický postupu uvedeném při důkazu následujícího tvrzení o řešitelnosti třetí modelové úlohy.

3.3.3 Dekompozice a řešitelnost třetí modelové úlohy

Porovnáním třetí a předchozí druhé modelové úlohy vidíme, že nyní jde o speciální případ jednostranného pružného posuvného podepření, to je o limitní případ, kdy tuhosti jednostranných pružných podpor rostou nade všechny meze až se stanou dokonale tuhé, kdy reprezentují jednostranné Signoriniho okrajové podmínky. Pro řešení třetí modelové úlohy s okrajovými podmínkami Signoriniho typu můžeme postupovat zcela analogicky jako v předchozím případě. Opět řešíme pouze úlohu (P_S^{Ben}) a opět je tato úloha pouze semikoercivní, nosník (deskový pás) má, jak snadno vidíme, ponechány dva stupně volnosti (viz dále) a je tedy nutné formulovat dodatečné podmínky řešitelnosti zajišťující existenci, případně i jednoznačnost řešení.

Pro třetí modelovou úlohu tedy platí následující tvrzení.

Věta 3 *Nutná podmínka pro existenci řešení úlohy (P_S^{Ben}) má tvar*

$$0 \geq \langle q_2(t), L - x \rangle, \quad 0 \geq \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. t \in I,$$

zatímco postačující podmínka pro existenci a jednoznačnost, a pro dekompozici úlohy (P_S^{Ben}) mají stejný tvar, ale s ostrou nerovností, to je

$$0 > \langle q_2(t), L - x \rangle, \quad 0 > \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. t \in I.$$

Poznámka 10 Dříve než přistoupíme k důkazu tvrzení věty poznamenejme, že podmínky dekompozice jsou v tomto případě vynuceny podmínkami řešitelnosti úlohy (P_S^{Ben}). To znamená, že při splnění podmínek řešitelnosti může být úloha transformována na modelovou úlohu umožňující dekompozici, to je na úlohu s okrajovými podmínkami prostě podepřeného nosníku (1. výjimečný případ) a tedy i jednoznačně řešena (viz Věta 1 nebo také [12]).

Lineární prostor „tuhých“ posunutí a kinematicky přípustných posunutí mají v tomto případě tvar

$$\mathcal{R} = \mathbf{P}^1, \quad \mathcal{V}_2 = H^2(\Omega).$$

a poněvadž je

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_2 = \mathbf{P}^1,$$

a charakter okrajových podmínek nebrání volnému pohybu nosníku, je úloha pouze semikoercivní.

Nyní můžeme přejít k *důkazu* předchozí věty:

– Nutnost podmínky pro existenci je ihned vidět, stačí totiž vhodně dosadit za testovací funkce kombinaci řešení a lineárních funkcí patřících do \mathcal{K} .

– Pro důkaz postačitelnosti podmínky použijeme následující neortogonální rozklad prostoru $\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega)$, tedy

$$\mathcal{V}_2 = \tilde{\mathcal{V}} + \mathbf{P}^1, \quad \tilde{\mathcal{V}} = H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$$

a definici nové normy $\|D^2u\|_{L_2(\Omega)}$ jež je ekvivalentní se standardní normou $\|u\|_{H_2(\Omega)}$ na $\tilde{\mathcal{V}}$ (viz např. [12]).

3.3.4 Dekompozice a řešitelnost čtvrté modelové úlohy

Také tato úloha skrývá řadu možností a variant. Z důvodů jednoduchosti a přehlednosti se při diskusi o řešitelnosti poslední modelové úlohy ($P_{\mathcal{F}}$) omezíme na dva elementární případy obsažené ve formulaci ($P_{\mathcal{F}}$), přičemž jednu z dalších možných variant, vyžadující však jiný typ podmínek načrtneme v dalším odstavci.

a) Nejdříve vezmeme elementární modelovou úlohu, kterou označíme ($P_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^{Ben}$) a získáme z úlohy ($P_{\mathcal{F}}$) užitím následujících dat a limitního přechodu

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1 \in (\mathbf{R}^1)^+, \quad \mathcal{T}_1 \rightarrow \infty, \quad \mathcal{T}_2 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = 0.$$

Lineární prostor virtuálních posunutí má v tomto případě tvar

$$\mathcal{V}_2 = \{v_2 \in H^2(\Omega) \mid v_2(0) = 0\}$$

a konvexní funkcionál reprezentující práci tření je dán předpisem

$$j(\mathbf{V}) \equiv j_3(\mathbf{V}) = \mathcal{M}|Dv_2(0)|.$$

Potom platí následující tvrzení:

Věta 4 *Nutná podmínka pro existenci řešení úlohy $(P_{\mathcal{FM}}^{Ben})$ má tvar*

$$\mathcal{M}(t) \geq \left| \int_{\Omega} q_2(t, x)x \, dx \right|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. \, t \in I,$$

zatímco postačující podmínka pro existenci a jednoznačnost, a pro dekompozici úlohy $(P_{\mathcal{FM}}^{Ben})$ má stejný tvar, ale s ostrou nerovností, to je

$$\mathcal{M}(t) > \left| \int_{\Omega} q_2(t, x)x \, dx \right|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. \, t \in I.$$

Poznámka 11 Také v tomto elementárním případě je zřejmě podmínka dekompozice vynucena postačující podmínkou řešitelnosti úlohy $(P_{\mathcal{FM}}^{Ben})$. Tedy úloha může být transformována na úlohu nazvanou v předchozím druhým vyjimečným případě a potom dekomponována.

Lineární prostor přípustných „tuhých“ posunutí má tvar

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{V}_2 = \mathbf{P}_0^1,$$

kde $\mathbf{P}_0^1 = \{p \in \mathbf{P}^1 | p(0) = 0\}$.

Důkaz nutnosti podmínky ve větě je opět zřejmý a stejně jako v předchozím jej získáme vhodným výběrem testovací funkce typu řešení plus libovolně zvolený polynom $p \in \mathbf{P}_0^1$.

K *důkazu postačitelnosti* použijeme variantu Friedrichsovy nerovnosti a definici nové, ekvivalentní normy na $\tilde{\mathcal{V}}$, kde $\tilde{\mathcal{V}}$ je dán neortogonálním rozkladem prostoru $\mathcal{V}_2 = \{v_2 \in H^2(\Omega) | v_2(0) = 0\}$, tedy

$$\mathcal{V}_2 = \tilde{\mathcal{V}} + \mathbf{P}_0^1, \quad \tilde{\mathcal{V}} = \{v \in H^2(\Omega) | v_2(0) = 0, \, Dv_2(0) = 0\}.$$

b) Druhým elementárním případem, na kterém budeme ilustrovat dekompozici a řešitelnost úlohy s daným třením $(P_{\mathcal{F}})$ bude úloha označená jako $(P_{\mathcal{FT}}^{Ben})$, jenž je definována následujícími daty

$$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in (\mathbf{R}^1)^+, \quad \mathcal{M}_1 = 0, \quad \mathcal{M}_2 = 0.$$

Odpovídající definice prostoru virtuálních posunutí a funkcionalů reprezentujících práci tření jsou následující

$$\mathcal{V}_2 = H^2(\Omega),$$

$$j(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^2 j_i(\mathbf{V}), \quad j_1(\mathbf{V}) = \mathcal{T}_1 |v_2(0)|, \quad j_2(\mathbf{V}) = \mathcal{T}_2 |v_2(L)|.$$

Pro tuto formulaci úlohy se třením platí následující tvrzení:

Věta 5 *Nutné podmínky pro existenci řešení úlohy $(P_{\mathcal{F}_T}^{Ben})$ mají tvar*

$$\mathcal{T}_1 \geq |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad \mathcal{T}_2 \geq |\langle q_2(t), x/L \rangle|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. t \in I,$$

zatímco postačující podmínky pro existence, jednoznačnost a také dekompozici úlohy $(P_{\mathcal{F}_T}^{Ben})$ mohou být napsány v analogickém tvaru, ale s ostrými nerovnostmi, to je

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad \mathcal{T}_2 > |\langle q_2(t), x/L \rangle|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad s.v. t \in I.$$

Poznámka 12 Přestože úlohy $(P_{\mathcal{F}_T}^{Ben})$ a (P_S^{Ben}) , mají zcela odlišný původ i charakter jsou podmínky dekompozice opět i v tomto případě vynuceny postačujícími podmínkami pro existenci řešení úlohy.

Úloha $(P_{\mathcal{F}_T}^{Ben})$ může totiž být při splnění uvedených podmínek transformována na úlohu nazvanou 1. vyjimečný případ, poté dekomponována a jednoznačně řešena.

Ovšem podmínky řešitelnosti i dekompozice mají v obou případech zcela rozdílný mechanický význam. V úloze (P_S^{Ben}) jde o požadavek na velikost a orientaci zatížení, v úloze $(P_{\mathcal{F}_T}^{Ben})$ zase jde o požadavek na maximální hodnoty reakcí (v absolutním smyslu, bez požadavku na jejich případný směr), které jsou ještě schopny přenést zatížení bez uvedení systému do pohybu.

Lineární prostor přípustných tuhých posunutí má v tomto případě tvar

$$\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{R} = \mathbf{P}^1,$$

což nás opět upozorňuje, s ohledem na typ okrajových podmínek umožňujících volný pohyb, na semikoercivitu úlohy.

Důkaz první části věty je opět zřejmý, stačí vzít za odpovídající složku testovací funkce \mathbf{V} ve formulaci $(P_{\mathcal{F}_T}^{Ben})$ funkci typu $v = u + p$, kde $p \in \mathbf{P}^1$.

Pro důkaz druhé části věty, to je pro postačitelost podmínek použijeme neortogonální rozklad prostoru

$$\mathcal{V}_2 = \tilde{\mathcal{V}} + \mathbf{P}^1, \quad \tilde{\mathcal{V}} = H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$$

a použijeme stejnou definice ekvivalentní normy na $\tilde{\mathcal{V}}$ jako v úloze (P_S^{Ben}) .

3.4 Varianty modelových úloh

Až doposud jsme diskutovali pouze vzorové varianty okrajových podmínek, jež umožnily transformovat úlohy jednoduchým způsobem na některý *vyjimečný případ*. Je zřejmé, že lze volit i jiné, komplikovanější typy okrajových podmínek. Naznačme alespoň stručně další možnosti:

- například můžeme kombinovat podmínky jednostranné Signoriniho typu a podmínky daného tření (jednostranného i oboustranného),

- všechny uvažované podmínky můžeme nějakým způsobem dále omezit, například pružné podpory Newtonova typu (jednostranné i oboustranné) mohou být omezeny maximální hodnotou zatížení, které jsou schopny přenést, atd.,
- můžeme studovat obecnější typy předpisů popisující vztah mezi hodnotami funkce a jejími derivacemi na hranici (nelineární pružné podpory, nemonotónní tření odpovídající nekonvexnímu superpotenciálu, viz obrázky 16. a 17., atd.)
- můžeme uvažovat situace, kdy podmínky řešitelnosti a podmínky dekompozice jdou proti sobě, to je kdy požadavek na rozpad a tedy zjednodušení úlohy má opačný charakter než požadavek na řešitelnost úlohy.

Pokud jde o poslední zmíněnou možnost, uveďme dva ilustrující příklady.

Uvažujme například následující variantu čtvrté modelové úlohy, to je úlohy s okrajovými podmínkami reprezentujícími dané tření, kdy máme $\mathcal{M}_2 = 0$. Potom jeden možný požadavek na dekompozici úlohy prostřednictvím její transformace na první vyjímecný případ by mohl být zapsán ve tvaru

$$\mathcal{M}_1(t) < \left| \int_{\Omega} q_2(t, x) x dx \right|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

a současně požadavek na řešitelnost by měl tvar

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad \mathcal{T}_2 > |\langle q_2(t), x/L \rangle|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I.$$

Pokud bychom ve stejné úloze zadali namísto daného posuvného tření jednostrannou posuvnou podporu Signoriniho typu v $x = L$, pak požadavek na dekompozici i řešitelnost by mohl mít tvar

$$\mathcal{M}_1(t) < \left| \int_{\Omega} q_2(t, x) x dx \right|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

a současně

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad 0 > \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

což by zajistilo transformaci úlohy opět na první vyjímecný případ.

Nebo v jiné kombinaci bychom mohli pro dekompozici požadovat

$$\mathcal{M}_1(t) > \left| \int_{\Omega} q_2(t, x) x dx \right|, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

a současně

$$\mathcal{T}_1 > |\langle q_2(t), 1 - x/L \rangle|, \quad 0 = \langle q_2(t), x \rangle, \quad q_2(t) \in L_2(\Omega), \quad \text{s.v. } t \in I,$$

což by umožnilo transformaci úlohy na druhý vyjímecný případ.

Zřejmě takto lze dále postupovat a analyzovat nabízené možnosti podle situace s daty úlohy a požadavků zadavatele.

4 Zobecnění a otevřené problémy

V předložené práci jsme se zabývali problematikou řešitelnosti úloh čtvrtého řádu v rámci linearizované teorie svázané termopružnosti, a to pro formulace modelových úloh ve tvaru evolučních nelineárních variačních rovnic a nerovnic, včetně semikoercivních případů. Ukázali jsme pro které typy, případně kombinace, okrajových podmínek lze úlohy zjednodušit metodou faktorizace, to je dekomponovat svázaný systém na ekvivalentní soustavu úloh druhého řádu a následně řešit jako úlohy nesvázané. Podmínky dekompozice byly v některých semikoercivních případech vynuceny dodatečnými podmínkami řešitelnosti.

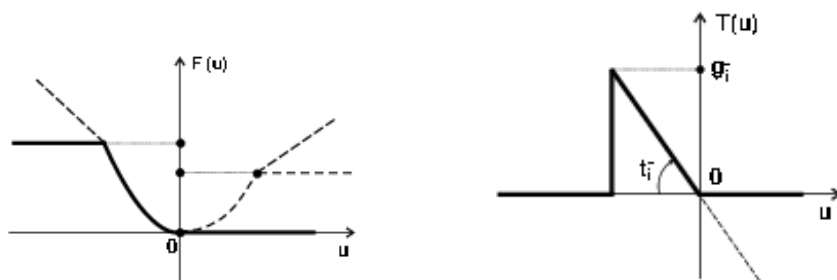
Z pohledu matematické analýzy, zde byly formulovány tvrzení o existenci a případně i jednoznačnosti řešení modelových úloh a jejich variant pro různé typy okrajových podmínek, včetně podmínek umožňujících dekompozici a zjednodušení svázané úlohy její redukcí na úlohu nesvázanou. V této práci však byly všechny matematické věty omezeny pouze na ty varianty okrajových podmínek jež odpovídají průhybové funkci. Ostatní neznámé funkce, posunutí v ose (před zjednodušením) a obě teplotní funkce, měly ponechány stejnou okrajovou podmínku na hranici ve všech zde analyzovaných případech. Kontrolou předchozích tvrzení i použité důkazové techniky, lze snadno nahlédnout, že i pro tyto komponenty neznámé funkce U lze užít různé další typy okrajových podmínek a prakticky všechny zde předložené výsledky zůstanou v platnosti.

Pokud jde o další zobecnění uvedených tvrzení, je například možné opustit první zjednodušující fyzikální předpoklad o koeficientech výměny tepla na horním a dolní povrchu nosníku.

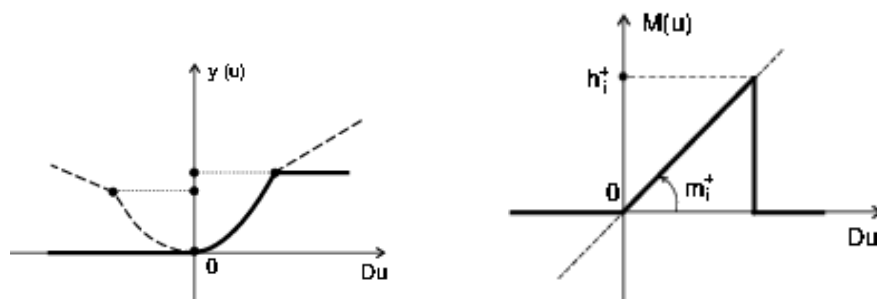
Podstatnějšího zobecnění, pokud jde o realističtější vystižení skutečného chování podpor, to je o přesnější reprezentaci okrajových podmínek v matematickém modelu úlohy, lze také dosáhnout uvažováním předpisů zachycujících v jistém smyslu porušení materiálu, to je skokovou změnu v chování podpory. Některé podrobnosti týkající se formulací takového předpisu lze nalézt jednak již v [10], ale nověji, včetně numerických analýz především v [13]. Pro lepší představu o charakteru předpisu takových podmínek zde uvedeme schema okrajové podmínky (bez přesné definice odpovídajícího superpotenciálu) popisující jednostrannou pružnou podporu s omezením přenosu maximálního namáhání, a to pro posuvnou i natáčivou podporu, viz obrázky 16. a 17., kde odpovídající superpotenciály nejsou ani konvexní ani diferencovatelné a subgradienty ztratili vlastnost monotonicity.

Výsledná formulace úlohy má v takovém případě tvar evoluční (vázané) hemivariační nerovnice a pro její numerické řešení je třeba minimalizovat nediferencovatelný a nekonvexní funkcionál, jak plyne z tvaru superpotenciálu reprezentujícího danou okrajovou podmínku.

Opět lze ukázat, že i v tomto případě lze nalézt jistou třídu okrajových podmínek, která i pro formulace úloh ve tvaru evolučních hemivariačních nerovnic umožní její dekompozici a následné zjednodušení, to je řešení úlohy jako nesvázané.



Obr. 16.: Zobecněné posuvné okrajové podmínky; superpotenciál a subgradient



Obr. 17.: Zobecněné natáčivé okrajové podmínky; superpotenciál a subgradient

Podobně lze postupovat také při zobecňování předpisů pro modelování tření. Formulaci studované úlohy lze dále rozšířit o analýzu vlivu podloží, a to pro analogické modely podloží jako byly předpisy pro okrajové podmínky. Obdobný přístup lze aplikovat zřejmě i na modelování konstitučních vztahů, pro jejichž předpis může být použit kterýkoliv ze vztahů zde uváděných pro okrajové podmínky.

Výsledné úlohy budou potom mít vždy tvar buďto evoluční variační rovnice (lineární i nelineární), evoluční variační nerovnice nebo také evoluční (vázané) hemivariační nerovnice.

Poděkování Autor příspěvku považuje za svou milou povinnost poděkovat na tomto místě Radě vlády České republiky pro výzkum, Grantové agentuře České republiky a Universitě Palackého Olomouc za finanční podporu jeho výzkumné činnosti. Výsledky předložené práce byly získány v rámci řešení následujících projektů: grantu GAČR 105/99/1651 a výzkumného záměru KAMaAM, PřF UP, č. J14/98 1531 000 11.

Reference

- [1] Nečas, J.: Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. *Masson, Paris*, 1967.
- [2] Aubin, J. P.: Approximation of Elliptic Boundary – Value Problems. *Wiley-Interscience, London*, 1972.
- [3] Carlson, D. E.: Linear Thermoelasticity. Encyklopedia of Physics, ed. S. Flüge, Volume VIa/2, Mechanics of Solids II. *Springer-Verlag, Berlin*, 1972.

- [4] Lions, J. L.: Někatorýje metody řešeníja nelinejnych krajevych zadač. *Izdatelstvo Mir, Moskva*, 1972 (v ruštině).
- [5] Adams, R. A.: Sobolev Spaces. *Academic Press, New York*, 1975.
- [6] Duvuat, G., Lions, J. L.: Inequalities in Mechanics and Physics. *Springer-Verlag, New York*, 1976.
- [7] Kufner, A., John, O., Fučík, S.: Function Spaces. *Academia, Praha*, 1977.
- [8] Aubin, J. P.: Applied Functional Analysis. *J. Wiley and sons, New York*, 1979.
- [9] Glowinski, R.: Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. *Springer-Verlag, New York*, 1984.
- [10] Panagiotopoulos, P. D.: Inequality problems in mechanics and applications. Convex and nonconvex energy functions. *Birkhauser, Boston*, 1985.
- [11] Rektorys, K.: Method of discretization in time and partial differential equations. *TKI, SNTL, Praha*, 1985 (v češtině).
- [12] Horák, J. V.: *On solvability of one special problem of coupled thermoelasticity, Part I.* Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat., Math. 34 (1995), 39–58.
- [13] Haslinger, J., Miettinen, M., Panagiotopoulos, P. D.: Finite Element Method for Hemi-variational Inequalities. Theory, Methods, Applications. *Kluwer Academic Press, London*, 1999.
- [14] Horák, J. V.: *O okrajových podmínkách a řešitelnosti úlohy ohybu nosníku.* Sborník 8. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství – 3μ“, VŠB TU Ostrava, Dolní Lomná 9.–11. 6. 1999, 38–44, ISBN 80-7078-725-2
- [15] Horák, J. V.: *On a Class of Boundary Conditions Splitting 1D Coupled Thermoelasticity Problems.* „IMSE – 2000“, University of Alberta, Canada
- [16] Horák, J. V.: *Užití variačních nerovnic v mechanice.* Habilitační práce, VUT Brno, Fakulta strojní, 2001.
- [17] Horák, J. V.: *O dekompozici a zjednodušení 1D úlohy svázané termopružnosti: I. Rovnice.* Sborník 10. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství — 3μ“, VŠB TU Ostrava, Dolní Lomná 30.–1. 5. 2001, 71–75, ISBN 80-248-0013-6.



Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Dept of Math. Anal. and Appl. of Math.
ODAM (2001) 75–100

O řešitelnosti semikoercivních úloh ohybu desek — nerovnice

JIŘÍ V. HORÁK¹, PETR FIBINGER²

¹*Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics
Faculty of Science, Palacký University
Tomkova 40, 779 00 Olomouc, Czech Republic
e-mail: jhorak@risc.upol.cz*

²*Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics
Faculty of Science, Palacký University
Tomkova 40, 779 00 Olomouc, Czech Republic
e-mail: petr.fibinger@email.cz*

Abstrakt

V příspěvku se zabýváme problematikou řešitelnosti modelů tenkých pružných desek s různými typy okrajových podmínek. Uvažujeme jednu klasickou okrajovou podmínku a to Neumannova typu. Další podmínky jsou neklasické, jedná se o podmínky se zadaným tuhým třením, s jednostranným posunutím a jednostrannou Newtonovou podmínkou na posunutí. Charakteristickým rysem zde uvažovaných úloh je to, že výsledná forma (bilineární či nelineární) je semikoercivní. V článku jsou dokázány nutné a postačující podmínky pro to, aby existovalo slabé řešení zadaných úloh, dále jsou zde formulovány podmínky zaručující jednoznačnost slabého řešení.

1 Úvod

V příspěvku analyzujeme řešitelnost vybraných typů semikoercivních úloh, které se mohou vyskytnout při matematickém modelování Kirchhoffova modelu tenké pružné desky (pro podrobné odvození viz například [2] nebo [6]). Zabýváme se zde především neklasickými okrajovými podmínkami, které se objevují u problémů s daným třením a jednostranných úloh.

V první části je uveden příklad známé úlohy s volnou hranicí, mající tvar lineární variační rovnice, neboť některé speciální úlohy s neklasickými okrajovými podmínkami lze převést na řešitelnost zmíněné úlohy, pouze musíme předpokládat platnost některých dodatečných požadavků. Další uvedené úlohy budou mít podobu nelineární variační rovnice nebo variační nerovnice.

Pro uvažované typy semikoercivních úloh je typické, že data problému musí splňovat dodatečné podmínky řešitelnosti, které nám zaručují existenci, případně jednoznačnost, řešení studované úlohy. Pokud však nepožadujeme platnost nutných podmínek v „zesíleném“ tvaru, ztrácíme jednoznačnost řešení. Při dokazování existence postupujeme většinou tak, že celou úlohu převedeme na minimalizační problém a snažíme se ukázat koercivitu minimalizovaného funkcionálu, samozřejmě za splnění vhodných podmínek řešitelnosti původní úlohy. V závěru článku ukazujeme, jak lze tento postup úspěšně využít při řešení některých nelineárních rovnic.

2 Označení a pomocný aparát

2.1 Prostory funkcí

V dalším budeme používat následující značení. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je omezená oblast s dostatečně hladkou³ hranicí Γ . Množinu všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí s kvadrátem nad Ω značíme jako $L^2(\Omega)$, zavádíme zde skalární součin $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$. Symbolem $H^2(\Omega)$ značíme Sobolevův prostor funkcí, majících zobecněné derivace do druhého řádu včetně, jež jsou integrovatelné s kvadrátem (viz např. [8]), to je

$$H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial_{\alpha} v \in L^2(\Omega), 0 \leq \alpha \leq 2\}.$$

Pokud vybavíme $H^2(\Omega)$ skalárním součinem

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^2 (\partial_{\alpha} u, \partial_{\alpha} v)_{L^2(\Omega)},$$

³stačilo by předpokládat, že hranice je pouze lipschitzovská (viz další diskuzi týkající se Greenovy formule)

tvoří dvojice $\{H^2(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^2(\Omega)}\}$ Hilbertův prostor s normou $\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = (v, v)_{H^2(\Omega)}$. V $H^2(\Omega)$ je druhá seminorma definována předpisem

$$|v|_{H^2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=2} \|\partial_\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pro prvek v prostoru $H^2(\Omega)$ můžeme jednoznačně definovat stopu funkce v a její normálové derivace funkce na Γ , neboť *existuje právě jeden spojitý lineární operátor*

$$\gamma \equiv (\gamma_0, \gamma_1) : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$$

takový, že

$$\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\Gamma}, \quad \gamma_1(\varphi) = \partial_n \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

(kde ∂_n značí derivaci podle normály v klasickém smyslu), a pro který platí odhad

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad \|\gamma_1 v\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|v\|_{H^2(\Omega)},$$

kde c značí kladnou konstantu závislou pouze na oblasti Ω . Dále definujeme prostory

$$H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega); \gamma_0 v = 0 \text{ na } \Gamma, \gamma_1 v = 0 \text{ na } \Gamma\},$$

a

$$H^{1/2}(\Gamma) := \gamma_0(H^2(\Omega)) \subset L^2(\Gamma), \quad H^{3/2}(\Gamma) := \gamma_1(H^2(\Omega)) \subset L^2(\Gamma).$$

Duální prostory k $H^{1/2}(\Gamma)$ a $H^{3/2}(\Gamma)$ označujeme jako $H^{-1/2}(\Gamma)$ a $H^{-3/2}(\Gamma)$.

Uvedeme si ještě některé tvary zobecněné Poincarého nerovnosti

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_1 \left(|v|_{H^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right), \quad (1)$$

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_1 \left(|v|_{H^2(\Omega)}^2 + (\gamma_0 v, 1)_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\gamma_1 v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right), \quad (2)$$

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_1 \left(|v|_{H^2(\Omega)}^2 + (v, 1)_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=1} (\partial_\alpha v, 1)_{L^2(\Omega)}^2 \right), \quad (3)$$

podrobněji viz [8] nebo [11], podstatné je to, že pravé strany nerovností kromě čtverce seminormy na $H^2(\Omega)$ obsahují součet čtverců spojitých lineárních funkcíonálů, které mají tu vlastnost, že pokud je nuluje lineární polynom, tak jde o polynom nulový. Nerovnost (1) je někdy v literatuře nazývána Friedrichsovou nerovností.

2.2 Kirchhoffův model tenké pružné desky

Pokud se omežíme pouze na situace, kdy je průhyb u desky (deska je těleso zaujímající objem $\Omega \times (-h/2, h/2)$) dostatečně malý vzhledem k její tloušťce h ($u(x) \ll h(x) \forall x \in \Omega$) a $h \ll \text{diam}(\Omega)$, můžeme chování desky zatížené pouze příčnými silami popsat vhodnou aproximativní teorií zakládající se na těchto předpokladech:

- Nevznikají žádné deformace ve střednicové ploše, tato plocha zůstává neutrální během ohybu.
- Normálové napětí σ_{33} lze zanedbat (kde $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^3$ je tenzor napětí).
- Body ležící na normálách ke střednicové ploše před ohybem vytvářejí normály ke střednicové ploše i po deformaci desky.

V linearizované teorii pružnosti můžeme všechny složky tenzoru napětí vyjádřit pomocí průhybu desky $u = u(x_1, x_2)$. Pro jednoduchost budeme navíc předpokládat, že materiál desky je homogenní a izotropní. Za těchto předpokladů funkce u splňuje lineární parciální diferenciální rovnici

$$D\Delta^2 u = f \text{ v } \Omega, \quad (4)$$

kde Δ je dvojrozměrný Laplaceův operátor, funkce f představuje příčné zatížení desky a $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ je kladná konstanta (pokud je $h = h(x)$ konstantní) nazývaná modul ohybové tuhosti ($E > 0$ je Youngův modul pružnosti a $0 < \mu < 1/2$ je Poissonův součinitel příčné kontrakce). Rovnice (4) spolu s vhodnými okrajovými podmínkami určuje okrajový problém čtvrtého řádu s neznámou funkcí (průhybem) u , při důkazu existence, případně jednoznačnosti řešení modelové úlohy však podstatně záleží na typech okrajových podmínek a jejich vztazích se zadávanými veličinami. Základní fyzikální veličiny, vystupující při modelování ohybu tenkých desek, definujeme následovně:

- ohybový moment značíme M_n ,

$$M_n v = -D[\mu\Delta v + (1-\mu)\partial_{nn}v], \quad (5)$$

- kroutící moment H_n ,

$$H_n v = -D(1-\mu)[-n_1 n_2 \partial_{11}v + (n_1^2 - n_2^2)\partial_{12}v + n_1 n_2 \partial_{22}v], \quad (6)$$

- a posouvající síly jako T_n ,

$$T_n v = -D[\partial_n(\Delta v) + (1-\mu)\partial_\tau(-n_1 n_2 \partial_{11}v + (n_1^2 - n_2^2)\partial_{12}v + n_1 n_2 \partial_{22}v)], \quad (7)$$

kde symbolem $M_n v$ rozumíme ohybový moment příslušný průhybu v , analogicky pro $H_n v$ a $T_n v$. V našich úvahách se omezíme na analýzu chování těchto tří veličin pouze na hranici desky. Poznamenejme, že indexem n vyznačujeme závislost veličiny na normále $n = n(x_1, x_2)$ k dané křivce θ (zde se omezíme na případ, kde křivka je hranice, tedy $\theta \equiv \Gamma$), pokud by byla část hranice rovnoběžná s osou $0x_1$, můžeme např. M_n označit jako M_{x_1} , neboť $n = (1, 0)$, atd.

2.3 Greenova formule

Nejdříve naznačíme odvození klasické Greenovy formule pro deskové úlohy. Rovnici (4) si ekvivalentně přepíšeme jako

$$A u = f \text{ v } \Omega, \quad (8)$$

kde operátor A je definován jako

$$A = D \left[\partial_{11}(\partial_{11} + \mu \partial_{22}) + 2\partial_{12}((1 - \mu)\partial_{12}) + \partial_{22}(\mu \partial_{11} + \partial_{22}) \right]. \quad (9)$$

Dále definujeme bilineární formu $\sigma : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ předpisem

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) = D & \left((\partial_{11}u + \mu \partial_{22}u, \partial_{11}v)_{L^2(\Omega)} + \right. \\ & + 2(1 - \mu)(\partial_{12}u, \partial_{12}v)_{L^2(\Omega)} + \\ & \left. + (\mu \partial_{11}u + \partial_{22}u, \partial_{22}v)_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Nechť $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a $D = 1$. Integrujeme formu $\sigma(u, v)$ dvakrát *per partes*, pak

$$\sigma(u, v) = (Au, v)_{L^2(\Omega)} - (\partial_n(\Delta u), v)_{L^2(\Gamma)} - (M_n u, \partial_n v)_{L^2(\Gamma)} - (H_n u, \partial_\tau v)_{L^2(\Gamma)}. \quad (10)$$

Jestliže by platila rovnost

$$-(H_n u, \partial_\tau v)_{L^2(\Gamma)} = -[H_n u(s) v(s)]_{s \in \Gamma} + (\partial_\tau H_n u, v)_{L^2(\Gamma)} \quad (11)$$

potom můžeme (10) upravit jako

$$\sigma(u, v) = (Au, v)_{L^2(\Omega)} + (T_n u, v)_{L^2(\Gamma)} - (M_n u, \partial_n v)_{L^2(\Gamma)} \quad (12)$$

(neboť $T_n u = -\partial_n(\Delta u) + \partial_\tau H_n u$), což je Greenova formule pro deskové úlohy v klasickém tvaru a pro hladké funkce. K tomu, aby platilo (11), stačí platnost jednoho z těchto předpokladů:

- Hranice Γ je dostatečně hladká na to, aby limita zprava funkce v se rovnala limitě zleva funkce v v každém bodě křivky Γ .
- V bodech x_k křivky Γ , ve kterých je kroutící moment $H_n u$ nespojitý, platí podmínka

$$\lim_{x \rightarrow x_k^+} H_n u(x) - \lim_{x \rightarrow x_k^-} H_n u(x) = 0. \quad (13)$$

Pokud chceme získat Greenovu formuli v obecnějším tvaru, uvažujeme prvky $v \in H^2(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega, A) := \{u \in H^2(\Omega); Au \in L^2(\Omega)\}$. Podle [7] existuje k Dirichletovu operátoru stop

$$\gamma = (\gamma_0, \gamma_1) : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \times H^{3/2}(\Gamma)$$

právě jeden spojitý lineární operátor

$$\delta = (\delta_3, \delta_2) : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$$

(tzv. Neumannův operátor) takový, že platí zobecněná Greenova formule

$$\sigma(u, v) = (Au, v)_{L^2(\Omega)} + (\delta_3 u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} + (\delta_2 u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)}, \quad (14)$$

pokud je oblast Ω dostatečně hladká (tedy aby platila rovnost (11)). Označíme-li rozšíření operátorů M_n a T_n (viz (5) a (7)) z $C^2(\bar{\Omega})$ a $C^3(\bar{\Omega})$ na příslušné prostory stejnými symboly (tedy

$$\begin{aligned} T_n &: H^2(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma), \\ M_n &: H^2(\Omega) \rightarrow H^{-3/2}(\Gamma), \end{aligned}$$

dostáváme $\delta_3 = T_n$ a $\delta_2 = -M_n$. Vzhledem k tomu, že operátory M_n a T_n lépe demonstrují fyzikální podstatu modelovaného problému, budeme v dalším za Greenovu formuli považovat rovnost

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= (Au, v)_{L^2(\Omega)} + \langle T_n u, \gamma_0 v \rangle_{H^{1/2}(\Gamma)} - \langle M_n u, \gamma_1 v \rangle_{H^{3/2}(\Gamma)} \\ &\text{pro } u \in H^2(\Omega, A), \quad v \in H^2(\Omega), \end{aligned}$$

kde symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^k(\Gamma)}$ značí dualitu nad $H^{-k/2}(\Gamma) \times H^{k/2}(\Gamma)$, $k = 1, 3$.

Po dosazení $Au = f$ Greenova formule reprezentuje z fyzikálního pohledu princip virtuálních prací: *práce vnitřních sil* $\sigma(u, v)$ je rovna *součtu práce vykonané vnějšími silami působícími na plochu desky* $(f, v)_{L^2(\Omega)}$ a *na okraj desky* $(T_n u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)}$ a *práce vykonané momenty sil na okraji desky* $(M_n u, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)}$.

Poznamenejme, že pro formu σ platí rovnost

$$\sigma(v, v) = (1 - \mu)|v|_{H^2(\Omega)}^2 + \mu\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

tedy

$$(1 - \mu)|v|_{H^2(\Omega)}^2 \leq \sigma(v, v) \quad \forall v \in H^2(\Omega). \quad (15)$$

Odtud a z definice formy σ snadno plyne, že výraz $\sigma(v, v)$ je nulový právě pro prvky prostoru všech lineárních polynomů nad Ω (který budeme v dalším značit jako $P^1(\Omega)$), tedy $\sigma(v, v)$ se nuluje pro malá tuhá posunutí.⁴

Zřejmě je forma σ spojitá nad prostorem $H^2(\Omega)$ ve smyslu

$$|\sigma(u, v)| \leq c\|u\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H^2(\Omega),$$

kde $c > 0$ je konstanta závislá pouze na oblasti Ω a konstantě μ .

⁴Jestliže $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^3$ označuje tenzor malých deformací, pak lze ukázat, že $\varepsilon_{ij}(v) = 0$ právě, když $v = a + b \times x$, $a, b \in \mathbf{R}^3$, viz [1]. Prvky tvaru $a + b \times x$ se nazývají malá tuhá posunutí, zde se omezuje na 2D-úlohy, tedy malá tuhá posunutí je prvek tvaru $a + b \times x$, $a, b \in \mathbf{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$.

2.4 Variační přístup

Nechť $\{V, (\cdot, \cdot)_{H^2(\Omega)}\}$ je Hilbertův prostor takový, že

$$H_0^2(\Omega) \subset V \subset H^2(\Omega)$$

a K je neprázdná, konvexní, neomezená a uzavřená podmnožina ve V , to je $K \subset V$. Dále nechť je dána symetrická bilineární forma $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, spojitá na V , tedy

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(v, u) \quad \forall u, v \in V, \\ a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) &= c_1 a(u_1, v) + c_2 a(u_2, v) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbf{R}, \forall u_1, u_2, v \in V, \\ |a(u, v)| &\leq c \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in V, \end{aligned}$$

$F : V \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitý lineární funkcionál a $j : V \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitý konvexní funkcionál. *Variační (lineární) rovnici* nazýváme úlohu

$$\exists u \in V : \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (16)$$

variační nerovnicí prvního druhu úlohu

$$\exists u \in K : \quad a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (17)$$

a *variační nerovnicí druhého druhu* úlohu

$$\exists u \in V : \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in V. \quad (18)$$

Jestliže je forma a koercivní nad V , tedy pro nějakou kladnou konstantu c platí

$$c \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V, \quad (19)$$

potom zmíněné úlohy mají právě jedno řešení, jak plyne z věty Lax–Milgramovy a z vět Lions–Stampacchiových (pro úlohu (17) postačuje koercivita formy pouze na množině K).

V aplikacích se však také vyskytují fyzikálně smysluplné úlohy, kdy forma a není koercivní, ale pouze semikoercivní, tedy kdy existuje kladná konstanta c , závislá pouze na oblasti Ω , a taková, že

$$c |v|_{H^2(\Omega)}^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in V. \quad (20)$$

V semikoercivních případech musíme nejprve zjistit, zda data úlohy jsou „rozumně“ předepsána, aby vůbec mohlo řešení existovat, popřípadě, jak zajistit jednoznačnost tohoto řešení. Někdy je výhodné převést tyto problémy na úlohy minimalizace nějakého funkcionálu, v takových případech však potřebujeme předpokládat symetrii formy a . Můžeme ukázat, že jednotlivé úlohy (17), (18) a (16)

jsou postupně ekvivalentní minimalizačním problémům

$$?u \in V : \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v), \quad (21)$$

$$?u \in K : \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v), \quad (22)$$

$$?u \in V : \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + j(v) - F(v). \quad (23)$$

O řešitelnosti těchto úloh platí následující věta (viz [3]).

Věta 1 *Nechť K je neprázdná, konvexní, uzavřená a neomezená podmnožina Hilbertova prostoru $\{V, \|\cdot\|_{H^2(\Omega)}\}$ a $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitý a konvexní funkcionál, který je nad množinou K koercivní,*

$$J(v) \rightarrow +\infty \quad \text{pro } v \in K \text{ takové, } \|v\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Potom existuje aspoň jedno řešení úlohy

$$?u \in K : \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (25)$$

Jestliže je funkcionál J ryze konvexní, potom má úloha (25) právě jedno řešení.

Poznámka 1 Tuto větu lze použít pro všechny tři minimalizační problémy, v úlohách (22) a (23) uvažujeme mezní případ množiny K , kdy $K = V$.

3 Lineární variační rovnice

V této části se budeme zabývat úlohou fyzikálně odpovídající desce, na jejíchž okrajích je předepsán průběh posouvající síly a ohybového momentu (deska s volnou hranicí), desce jako tuhému tělesu jsou tedy ponechány všechny tři stupně volnosti. Zadaný typ podmínek patří mezi nestabilní okrajové podmínky, z matematického hlediska jde o Neumannovu úlohu pro operátor A . Třebaže zde uvažujeme typ okrajových podmínek, které se řadí mezi klasické, má tato úloha zvláštní význam, neboť některé typy úloh s neklasickými okrajovými podmínkami lze převést na řešení tohoto problému s dodatečnými upřesňujícími podmínkami.

Poznámka 2 (Klasická formulace) Pro úplnost zavedeme pojem klasického řešení Neumannova problému, ze kterého je lépe zřejmé, jaký fyzikální model zde uvažujeme. Pro dané, dostatečně hladké funkce f, g_2, g_3 hledáme dostatečně hladkou funkci u takovou, že splňuje diferenciální rovnici (8) a vyhovuje okrajovým podmínkám

$$M_n u = g_2 \text{ na } \Gamma, \quad (26)$$

$$T_n u = g_3 \text{ na } \Gamma. \quad (27)$$

Takovou funkci u nazýváme klasické řešení Neumannova problému. Jestliže formálně vynásobíme rovnici (8) funkcí v a integrujeme tuto rovnost přes oblast Ω , dostaneme za použití Greenovy formule (15) spolu s podmínkami (27) a (26) (formálně) následující úlohu.

Definition 1 (Variační formulace) Necht $f \in L^2(\Omega)$ a $g_2, g_3 \in L^2(\Gamma)$. Definujeme

$$V = H^2(\Omega), \quad (28)$$

$$a(u, v) = \sigma(u, v), \quad (29)$$

$$F(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} + (g_3, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} - (g_2, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)} \quad (30)$$

(pro definici σ viz (10)). Funkci u vyhovující úloze

$$?u \in V : \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V, \quad (31)$$

nazýváme variační (slabé) řešení Neumannova problému.

V dalším budeme uvažovat množinu \mathcal{P}_V , skládající se z prvků nulujících funkcional $a(p, p)$ a patřících do prostoru V . Fyzikálně \mathcal{P}_V představuje množinu kinematicky přípustných malých tuhých posunutí.

Definition 2 Pro daný prostor V a formu a definujeme

$$\mathcal{P}_V := V \cap P_1(\Omega) = \{p \in V; a(p, p) = 0\}. \quad (32)$$

Lemma 1 Pro $V = H^2(\Omega)$ dostáváme, že $\mathcal{P}_V = P_1(\Omega)$ (tedy \mathcal{P}_V je uzavřený prostor). Jestliže provedeme ortogonální rozklad prostoru V na \mathcal{P}_V a \mathcal{P}_V^\perp vzhledem ke skalárnímu součinu

$$((u, v))_{H^2(\Omega)} := (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=2} (\partial_\alpha u, \partial_\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

potom platí

$$\mathcal{P}_V^\perp = \{v \in V; (v, 1)_{L^2(\Omega)} = (v, x_1)_{L^2(\Omega)} = (v, x_2)_{L^2(\Omega)} = 0\}.$$

Důkaz viz [4] nebo [11].

Poznámka 3 Vzhledem k tomu, že pro libovolný prvek $p \in \mathcal{P}_V$ je výraz $\sigma(p, p)$ nulový, není forma a koercivní na celém prostoru V . Vzhledem k nerovnosti (15) vidíme, že forma a je na V pouze semikoercivní. Ukážeme, že ztráta koercivity formy a vynucuje formulaci a plnění dodatečných předpokladů na data úlohy nutných k tomu, aby vůbec mělo smysl mluvit o řešitelnosti úlohy (31).

Lemma 2 (Nutné podmínky řešitelnosti) *Nechť úloha (31) má řešení. Potom zadané funkce f a g_2, g_3 musí splňovat rovnost*

$$F(p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_V, \quad (33)$$

podrobněji

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\Gamma} g_3(s) \, d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Omega} x_1 f(x) \, dx + \int_{\Gamma} x_1 g_3(s) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} n_1(s) g_2(s) \, d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Omega} x_2 f(x) \, dx + \int_{\Gamma} x_2 g_3(s) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} n_2(s) g_2(s) \, d\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

K důkazu tohoto tvrzení stačí do rovnice (31) dosadit $v = p \in \mathcal{P}_V \subset V$ a uvědomit si, že v \mathcal{P}_V je báze tvořena prvky $1, x_1, x_2$, a použít vztahů

$$\gamma_1 x_i = \partial_n x_i = n_i, \quad i = 1, 2$$

(kde $n = (n_1, n_2)$ je jednotkový vektor vnější normály k Γ).

Poznámka 4 Poznamenejme, že fyzikálně tyto podmínky odpovídají podmínkám rovnováhy sil a momentů. Intuitivně očekáváme, že při splnění těchto podmínek řešení úlohy (31) bude existovat. To také v dalším dokážeme.

Lemma 3 (Zobecněná Poicarého nerovnost) *Nechť $\Omega \in C^{0,1}$. Pak platí*

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c \left(|v|_{H^2(\Omega)}^2 + (v, 1)_{L^2(\Omega)}^2 + (v, x_1)_{L^2(\Omega)}^2 + (v, x_2)_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad (34)$$

kde c je kladná konstanta závislá pouze na oblasti Ω .

Důkaz Podle [8] stačí dokázat, že soustava spojitých lineárních funkcionalů $\mathcal{F}_\alpha : H^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$, $\alpha = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(v) &= (v, 1)_{L^2(\Omega)} \\ \mathcal{F}_1(v) &= (v, x_1)_{L^2(\Omega)}, \\ \mathcal{F}_2(v) &= (v, x_2)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

má tu vlastnost, že lineární polynom, jenž ji nuluje, může být pouze nulovým polynomem, tedy

$$\forall p \in \mathcal{P}_1(\Omega) : \left(\forall \alpha = 0, 1, 2 \quad \mathcal{F}_\alpha(p) = 0 \implies p \equiv 0 \right).$$

Uvažujme tedy rovnice $\mathcal{F}_\alpha(p) = 0$, $\alpha = 0, 1, 2$ pro polynom $p = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$:

$$(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, 1)_{L^2(\Omega)} + (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, x_1)_{L^2(\Omega)} + (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, x_2)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

tedy

$$\begin{bmatrix} (1, 1)_{L^2(\Omega)} & (x_1, 1)_{L^2(\Omega)} & (x_2, 1)_{L^2(\Omega)} \\ (1, x_1)_{L^2(\Omega)} & (x_1, x_1)_{L^2(\Omega)} & (x_2, x_1)_{L^2(\Omega)} \\ (1, x_2)_{L^2(\Omega)} & (x_1, x_2)_{L^2(\Omega)} & (x_2, x_2)_{L^2(\Omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tvrzení lemmatu nyní plyne z toho, že tato soustava nemůže mít jiné než triviální řešení, neboť matice soustavy je Grammovou maticí pro lineárně nezávislé funkce $1, x_1, x_2$ (která je regulární). \square

Lemma 4 *Forma a je koercivní nad prostorem \mathcal{P}_V^\perp .*

Důkaz: Z vyjádření prostoru \mathcal{P}_V^\perp plyne, že nerovnost (34) má pro prvky prostoru \mathcal{P}^\perp tvar

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c|v|_{H^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in \mathcal{P}_V^\perp.$$

Z nerovnosti (15) dostáváme koercivitu formy a na \mathcal{P}_V^\perp :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c \frac{1-\mu}{2} a(v, v) \quad \forall v \in \mathcal{P}_V^\perp.$$

Lemma 5 (Postačitelnost podmínek (33)) *Nechť funkce $f \in L^2(\Omega)$ a $g_2, g_3 \in L^2(\Gamma)$ splňují (33). Potom existuje právě jedno slabé řešení úlohy (31) patřící do prostoru \mathcal{P}_V^\perp . Libovolná dvě řešení Neumannovy úlohy na prostoru V se liší o prvek prostoru \mathcal{P}_V a každé takové řešení u lze odhadnout vztahem*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g_2\|_{L^2(\Gamma)} + \|g_3\|_{L^2(\Gamma)} \right), \quad (35)$$

kde c je kladná konstanta závisající pouze na oblasti Ω .

Důkaz plyne z předchozích tvrzení (pro podrobnosti důkazu viz [11]), poznamejme pouze, že $V/\mathcal{P}_V \cong \mathcal{P}_V^\perp$ a nad \mathcal{P}_V^\perp je forma a koercivní, při důkazu (35) využíváme omezenosti operátoru stop γ .

Poznámka 5 (Minimalizační problém) Úloha nalézt slabé řešení Neumannova problému (31) je ekvivalentní úloze nalezení minima funkcionálu

$$J(v) = \frac{1}{2} \sigma(v, v) - (f, v)_{L^2(\Omega)} - (g_3, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} + (g_2, \gamma_1 v)_{L^2(\Gamma)}$$

nad prostorem V . Nad celým prostorem V je funkcionál J semikoercivní, ale na prostoru \mathcal{P}_V^\perp je koercivní.

4 Eliptická variační nerovnice prvního druhu

Nyní budeme uvažovat úlohou, která fyzikálně odpovídá desce, jejíž okraj se nemůže natočit. Dále je deska na okraji jednostranně podepřená, takže se může vychýlit pouze na jednu stranu a posouvající síla T_n může být nenulová pouze při nulové výchylce (tedy na okraji je předepsána podmínka Signoriniho typu mezi posunutím u a posouvající silou $T_n u$). Desce jako tuhému tělesu byl tedy ponechán pouze jeden stupeň volnosti. Z důvodů jednoduchosti budeme předpokládat homogenní tvar okrajových podmínek, avšak zobecnění pro nehomogenní tvar nečiní jiné než technické problémy. Uvažovaný typ okrajových podmínek již patří mezi neklasické.

Poznámka 6 (Klasická formulace) Nejprve uvedeme pojem klasického řešení tohoto problému. Pro danou dostatečně hladkou funkci f hledáme dostatečně hladkou funkci u splňující diferenciální rovnici (8) a vyhovující okrajovým podmínkám

$$\partial_n u = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (36)$$

$$u \geq 0, \quad T_n u \geq 0, \quad u T_n u = 0 \text{ na } \Gamma. \quad (37)$$

Takovou funkci u nazýváme klasickým řešením problému vázaným natočením a s jednostranným posunutím. Podmínka (36) vystihuje skutečnost, že se deska na okraji nemůže natočit, podmínka (37) reprezentuje již zmíněný vztah mezi posunutím a posouvající silou.

Definition 3 (Variační formulace) Nechť $f \in L^2(\Omega)$. Definujeme

$$V = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_1 v = 0 \text{ na } \Gamma\}, \quad (38)$$

$$K = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_0 v \geq 0 \text{ na } \Gamma, \gamma_1 v = 0 \text{ na } \Gamma\}, \quad (39)$$

$$a(u, v) = \sigma(u, v), \quad (40)$$

$$F(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (41)$$

Variačním (slabým) řešením problému s jednostranným posunutím nazýváme funkci u vyhovující úloze

$$?u \in K : \quad a(u, v - u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in K. \quad (42)$$

Poznámka 7 Poznamenejme, že K je neprázdná, konvexní, uzavřená a neomezená podmnožina ve V , navíc K je kužel s vrcholem v 0. Při formálním odvození nerovnice (42) z klasické formulace využíváme právě vlastnosti kuželovosti K , když nejprve odvodíme rovnost

$$a(u, u) = F(u)$$

a poté nerovnost

$$a(u, v) \geq F(v) \quad \forall v \in K$$

(samozřejmě s pomocí Greenovy formule). Tyto dva vztahy jsou ekvivalentní nerovnosti (42).

Poznámka 8 (Minimalizační problém) Úloha nalézt slabé řešení problému (42) je ekvivalentní úloze nalezení minima funkcionálu

$$J(v) = \frac{1}{2}\sigma(v, v) - (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (43)$$

na množině K .

Poznámka 9 Podobně jako v předchozí části definujeme množinu \mathcal{P}_K (viz (32)) kinematicky přípustných malých tuhých posunutí jako

$$\mathcal{P}_K := \{p \in K; a(p, p) = 0\},$$

zřejmě $\mathcal{P}_K = P_1(\Omega) \cap K$. Opět zjistíme, že daná forma a je pouze semikoercivní (stačí uvažovat libovolný prvek množiny \mathcal{P}_K), a že jsme nuceni formulovat dodatečnou podmínku zajišťující existenci řešení - tato podmínka fyzikálně odpovídá podmínce silové rovnováhy.

Lemma 6 $\mathcal{P}_K = \mathbf{R}_0^+$, kde \mathbf{R}_0^+ označuje množinu všech nezáporných konstant.

Důkaz plyne z toho, že lineární polynom s nulovou normálovou derivací a s nezápornou hodnotou na hranici souvislé oblasti může být pouze nezáporná konstanta.

Lemma 7 (Nutná podmínka řešitelnosti) *Nechť úloha (42) má řešení. Potom funkce f , reprezentující zatížení vnějšími silami, musí splňovat podmínku*

$$F(p) = \int_{\Omega} f(x)p(x) dx \leq 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_K, \quad (44)$$

tedy $F(1) \leq 0$, podrobněji

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq 0.$$

K důkazu stačí, pokud do nerovnice (42) dosadíme za prvek v libovolný prvek $p \in \mathcal{P}_K \subset K$, zřejmě lze každý nenulový prvek množiny \mathcal{P}_K vyjádřit jako kladný násobek funkce 1.

Poznámka 10 V dalším budeme rozlišovat dva případy podmínky (44): situaci, kdy platí ostrá nerovnost

$$\int_{\Omega} f(x) dx < 0 \quad (45)$$

a situaci, kdy platí rovnost

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0. \quad (46)$$

První případ, nerovnost (45), zajišťuje jednak nenulovou výslednici povrchového zatížení desky a jednak i její „správnou“ orientaci (proti jednostranným podporám), narozdíl od případu rovnosti (46), kdy výslednice povrchových sil je pouze nulová a tedy není zajištěn kontakt mezi deskou a podporami.

Tento fyzikální náhled si ve zbývajících částech tohoto odstavce dokážeme.

Lemma 8 (Postačitelnost podmínky (45)) *Nechť funkce f splňuje podmínku řešitelnosti ve tvaru ostré nerovnosti (45). Potom existuje aspoň jedno řešení úlohy (42).*

Podrobné zpracování důkazu je uvedeno v [5], zde si pouze naznačíme základní myšlenku, kterou lze úspěšně využít i u jiných modelových úloh. Postup je následující:

- (i) Řešíme ekvivalentní úlohu minimalizace funkcionálu J nad množinou K (viz (43)) a snažíme se dokázat koercivitu J na K .
- (ii) Pro každou funkci $v \in H^2(\Omega)$ definujeme funkce \bar{v} a v^* předpisy

$$\bar{v} := \frac{1}{\text{mes}(\Gamma)} \int_{\Gamma} \gamma_0 v(s) \, d\Gamma,$$

$$v^*(x) := v(x) - \bar{v},$$

zřejmě platí $|v|_{H^2(\Omega)} = |v^*|_{H^2(\Omega)}$, $\bar{v} \in \mathbf{R}$, $H^2(\Omega) = \mathbf{R} + V$ (neortogonální rozklad).

- (iii) Podle zobecněné Poincarého nerovnosti (2), to je

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_P \left(|v|_{H^2(\Omega)}^2 + (\gamma_0 v, 1)_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\gamma_1 v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

kde c_P je kladná konstanta závislá pouze na oblasti Ω , platí

$$\|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_P |v^*|_{H^2(\Omega)}^2, \quad v \in K,$$

neboť $(\gamma_0 v^*, 1)_{L^2(\Gamma)} = 0$ a využíváme toho, že $\gamma_1 v = 0$.

- (iv) Pro dostatečně velká $v \in H^2(\Omega)$ platí nerovnost

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c \left(\|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + \bar{v}^2 \right),$$

kde c je kladná konstanta závislá na oblast Ω a funkci v^* , neboť

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \|v^* + \bar{v}\|_{H^2(\Omega)}^2 = \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + 2(v^*, \bar{v})_{L^2(\Omega)} + \bar{v}^2 |\Omega|^2.$$

- (v) Funkcionál J pro dostatečně velká $v \in K$ odhadneme zdola jako

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1-\mu}{2} |v^*|_{H^2(\Omega)}^2 - F(v^*) - F(1)\bar{v} \geq \\ &\geq \frac{1-\mu}{2c_P} \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 - \|F\|_{L^2(\Omega)} \|v^*\|_{H^2(\Omega)} - F(1)\bar{v} \geq \\ &\geq c_1 \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + c_2 \bar{v}, \end{aligned}$$

kde $c_1 > 0$ a $c_2 = -F(1) > 0$ (konstanta c_1 je závislá na funkci v^*).

(vi) Pro $v \in K$, $\|v\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ roste aspoň jedno z čísel $\|v^*\|_{H^2(\Omega)}$ a \bar{v} nade všechny meze (viz bod (iv)), tedy i $J(v) \rightarrow +\infty$. Proto řešení úlohy (42) existuje.

Lemma 9 *Jestliže existují dvě a více řešení úlohy (42), potom musí funkce f splňovat podmínku (46).*

Důkaz Předpokládejme, že existují aspoň dvě řešení $u_1, u_2 \in K$ úlohy (42) (tedy platí nutná podmínka (44)). Dosazením do nerovnosti (42) dostáváme

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq F(u_2 - u_1)$$

a

$$a(u_2, u_1 - u_2) \geq F(u_1 - u_2),$$

sečtením obou nerovnic dostáváme, že $-a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \geq 0$. To podle definice množiny \mathcal{P}_K znamená, že každá dvě řešení se liší nejvýše o prvek z \mathcal{P}_K ,

$$u_2 = u_1 + p, \quad p \in \mathcal{P}_K.$$

Z ekvivalence úloh (42) (variační nerovnice) a (43) (minimalizace funkcionálu) plyne rovnost hodnot $J(u_1) = J(u_2)$, to je

$$\frac{1}{2}a(u_1, u_1) - F(u_1) = \frac{1}{2}a(u_1 + p, u_1 + p) - F(u_1 + p) = \frac{1}{2}a(u_1, u_1) - F(u_1) - F(p),$$

tedy pro funkcionál F musí platit

$$F(p) = 0 \quad p \in \mathcal{P}_K, p \neq 0,$$

tedy funkce f musí vyhovovat podmínce (46). \square

Poznámka 11 Jestliže funkce f splňuje podmínku (45)⁵, pak podle předchozího lemmatu existuje nejvýše jedno řešení úlohy (42). A podle předchozí věty má tato úloha aspoň jedno řešení. Proto platí:

Věta 2 *Jestliže platí podmínka (45) ve tvaru ostré nerovnosti, má úloha (42) právě jedno slabé řešení.*

Lemma 10 (Ekvivalentní formulace za předpokladu (46)) *Nechť platí podmínka řešitelnosti ve tvaru rovnosti (46). Dále nechť w je slabým řešením pomocné úlohy⁶*

$$\sigma(w, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W := \{v \in H^2(\Omega); \gamma_1 v = 0 \text{ na } \Gamma\}, \quad (47)$$

⁵pro $\int_{\Omega} f(x) dx > 0$ nemá úloha (42) řešení

⁶kteřá má v klasické formulaci tvar

$$\begin{aligned} Aw &= f \text{ v } \Omega, \\ \partial_n w &= 0 \text{ na } \Gamma, \\ T_n w &= 0 \text{ na } \Gamma \end{aligned}$$

kteřé splňuje podmínku

$$\int_{\Gamma} \gamma_0 w(s) \, d\Gamma = 0. \quad (48)$$

Potom existuje slabé řešení u úlohy (42) právě tehdy, když stopa $\gamma_0 w$ funkce w je omezená zdola s.v. na Γ . Pak mají všechna řešení úlohy (42) tvar

$$w + c, \quad (49)$$

kde $c \in \mathbf{R}$ je taková konstanta, aby platilo, že $w + c \in K$, to je

$$\gamma_0 w + c \geq 0 \text{ na } \Gamma. \quad (50)$$

Důkaz Před provedením důkazu poznamenejme, že (46) je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby existovalo slabé řešení pomocné úlohy (47), a že slabé řešení pomocné úlohy je určeno jednoznačně až na konstantu (viz [11]).

(i) Nejprve předpokládejme, že u je slabým řešením úlohy (42). Pak $Au = f$ v Ω a $\partial_n u = 0$ na Γ . Dále podle Greenovy formule a nutné podmínky (46) je

$$0 = (f, 1)_{L^2(\Omega)} = (Au, 1)_{L^2(\Omega)} + \langle T_n u, 1 \rangle,$$

odkud plyne $\langle T_n u, 1 \rangle = 0$. A protože $T_n u \geq 0$ na Γ , je $T_n u = 0$ na Γ . Definujeme funkci w jako

$$w := u - \frac{1}{\text{mes } \Gamma} \int_{\Gamma} \gamma_0 u(s) \, d\Gamma.$$

Pak zřejmě $Aw = f$ v Ω , $\partial_n w = 0$ na Γ , $T_n w = 0$ na Γ a

$$\int_{\Gamma} \gamma_0 w(s) \, d\Gamma = 0.$$

Také funkce $\gamma_0 w$ je omezená zdola.

(ii) Naopak, nyní předpokládejme, že w je řešením (47) takovým, že splňuje (48). Definujeme funkci u pomocí (49) tak, aby platilo (50) (což lze vzhledem k omezenosti stopy funkce w zezdola). Pak zřejmě $u \in K$. K tomu, aby u bylo slabým řešením úlohy (42), zbývá dokázat nerovnost

$$\sigma(u, v - u) \geq (f, v - u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in K.$$

Ale

$$\sigma(u, v - u) = \sigma(w, v - w) = F(v - w) = F(v - u) + F(c) = F(v - u) + cF(1)$$

a podle předpokladu je $F(1) = 0$, tedy hledaná nerovnost platí dokonce jako rovnost. \square

Poznámka 12 Jak jsme viděli, v případě platnosti podmínky (45) nám stačovalo dokázat koercivitu funkcionálu J nad K , zatímco v druhém případě (46) jsme problém převedli na řešení ekvivalentní úlohy (47), která má podle [11] řešení určeno jednoznačně až na reálnou konstantu, tuto nejednoznačnost zde odstraníme podmínkou (48).

5 Eliptická variační nerovnice druhého druhu

V této části se budeme zabývat jednoduchou modelovou úlohou, která vede na eliptickou variační nerovnici druhého druhu. Uvažujeme desku, jejíž okraj se opět nemůže natočit a je na něm předepsáno „dané tuhé“ tření κ omezující posunutí v závislosti na velikosti posouvající síly T_n . Tedy, pokud je velikost posouvající síly ostře menší než dané tření, nedochází k posunutí okraje desky, teprve až velikost T_n nabyde dané hodnoty κ , dojde k posuvu okraje směrem nahoru či dolů, podle orientace posouvající síly. Při takovéto volbě okrajových podmínek je desce jako tuhému tělesu ponechán pouze jeden stupeň volnosti. Opět z důvodů jednoduchosti budeme předpokládat homogenní tvar okrajových podmínek. O funkci $\kappa : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$, reprezentující tuhé tření, předpokládáme, že je na hranici větší nebo rovna než nějaká kladná konstanta, to je

$$\kappa(x) \geq \kappa_0 > 0 \text{ s.v. na } \Gamma.$$

Poznámka 13 (Klasická formulace) Pro danou dostatečně hladkou funkci f hledáme dostatečně hladkou funkci u , která splňuje diferenciální rovnici (8) a okrajové podmínky

$$\partial_n u = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (51)$$

$$|T_n u| \leq \kappa, \quad u T_n u - \kappa |u| = 0 \text{ na } \Gamma. \quad (52)$$

Takovou funkci nazýváme klasickým řešením problému s „daným tuhým“ posuvným třením. Poznamenejme, že okrajovou podmínku (52) lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$|T_n u| < \kappa \implies u = 0 \text{ na } \Gamma,$$

$$T_n u = +\kappa \implies u \geq 0 \text{ na } \Gamma,$$

$$T_n u = -\kappa \implies u \leq 0 \text{ na } \Gamma.$$

Definition 4 (Variační formulace) Necht $f \in L^2(\Omega)$, $\kappa \in L^\infty(\Gamma)$, definujeme

$$V = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_1 v = 0 \text{ na } \Gamma\}, \quad (53)$$

$$a(u, v) = \sigma(u, v), \quad (54)$$

$$j(v) = \int_{\Gamma} \kappa(s) |\gamma_0 v(s)| \, d\Gamma, \quad (55)$$

$$F(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (56)$$

Funkci u nazýváme variačním (slabým) řešením problému s „daným tuhým“ posuvným třením, jestliže vyhovuje úloze

$$?u \in V : \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq F(v - u) \quad \forall v \in V. \quad (57)$$

Poznámka 14 Pokud chceme formálně odvodit nerovnici (57) z klasické formule, tak v Greenově formuli využijeme rovnost $\langle T_n u, \gamma_0 u \rangle = j(u)$, která plyne z okrajové podmínky (52) a získáme rovnost

$$a(u, u) = -j(u) + F(u).$$

Z první části podmínky (52) dostaneme i nerovnost $\langle T_n u, \gamma_0 v \rangle \leq j(v)$, odtud a z Greenovy formule plyne

$$a(u, v) + j(v) \geq F(v) \quad \forall v \in V.$$

Shrnutím těchto dvou vztahů dostaneme nerovnost (57). Podotkněme, že variační nerovnici zde uvažujeme nad celým prostorem V , nikoliv pouze nad nějakou jeho vlastní konvexní podmnožinou.

Poznámka 15 (Minimalizační problém) Úloha nalézt slabé řešení úlohy (57) je ekvivalentní úloze nalezení minima funkcionálu

$$J(v) = \frac{1}{2}\sigma(v, v) + \int_{\Gamma} \kappa(s) |\gamma_0 v(s)| \, d\Gamma - (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (58)$$

nad prostorem V . Funkcionál J , narozdíl od předchozích dvou případů, není kvadratický, ale sestává se ze součtu kvadratické části $\frac{1}{2}\sigma(v, v) - (f, v)_{L^2(\Omega)}$ a spojitého, konvexního, ale nediferencovatelného funkcionálu $j(v) = (\kappa, |\gamma_0 v|)_{L^2(\Gamma)}$.

Poznámka 16 (Vlastnosti j) Konvexitu a spojitost funkcionálu j lze snadno ověřit. Stejně tak snadno je vidět, že j splňuje rovnost

$$j(v) = j(-v) \quad \forall v \in V. \quad (59)$$

Z konvexity j dostáváme, že

$$\frac{1}{2}j(v+w) = j\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) \leq \frac{1}{2}j(v) + \frac{1}{2}j(w)$$

tedy po vynásobení celé nerovnosti platí

$$j(v+w) - j(v) \leq j(w) \quad \forall v, w \in V. \quad (60)$$

Tuto nerovnost můžeme snadno upravit do tvaru ($v = -v$ a $w = w + v$)

$$j(w) - j(v) \leq j(v+w) \quad \forall v, w \in V. \quad (61)$$

Poznámka 17 Opět definujeme množinu \mathcal{P}_V (viz (32)) a můžeme ukázat, že forma a na V není koercivní. I v tomto modelu je forma a pouze semikoercivní (podle nerovnosti (10)) a musíme formulovat dodatečnou podmínku zajišťující existenci řešení (která opět fyzikálně odpovídá podmínce silové rovnováhy), znovu si tuto podmínku rozlišíme na dva případy.

Lemma 11 *Množina kinematicky přípustných malých tuhých posunutí je v případě problému s daným tuhým posuvným třením tvořena konstantami, tedy*

$$\mathcal{P}_V = \mathbf{R}.$$

Snadno lze ověřit, že lineární polynom s nulovou normálovou derivací na hranici souvislé oblasti musí být konstanta.

Lemma 12 (Nutná podmínka řešitelnosti) *Nechť úloha (57) má řešení. Potom „dané“ tření κ a funkce f musí splňovat podmínku*

$$j(p) \geq |F(p)| \quad \forall p \in \mathcal{P}_V,$$

podrobněji

$$\int_{\Gamma} \kappa(s) \, d\Gamma \geq \left| \int_{\Omega} f(x) \, dx \right|. \quad (62)$$

K důkazu stačí, pokud do rovnice (57) dosadíme za prvek v prvek $u + p \in V$, $p \in \mathcal{P}_V$,

$$j(u + p) - j(u) \geq F(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}_V$$

a využijeme vlastnosti (60)

$$j(p) \geq j(u + p) - j(u).$$

Tvar (62) dostáváme z toho, že $+1, -1 \in \mathcal{P}_V$.

Poznámka 18 Jak jsme se již zmínili, budeme rozlišovat dva případy (62), ostrou nerovnost

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \, dx \right| < \int_{\Gamma} \kappa(s) \, d\Gamma \quad (63)$$

a rovnost

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \, dx \right| = \int_{\Gamma} \kappa(s) \, d\Gamma \quad (64)$$

I zde lze podmínky (63) a (64) fyzikálně interpretovat. První případ (63) odpovídá situaci, kdy výslednice daného tření na okraji je větší než výslednice vnějšího zatížení na povrchu desky, úloha by tedy měla mít právě jedno řešení. V druhém případě je výslednice tření na okraji rovna výslednici vnější síly na ploše a vzhledem k tomu, že desce je zabráněno pouze v jejím natočení, tak možná řešení se liší o konstantu reprezentující posunutí nahoru či dolů. Dokážeme si tento fyzikální náhled.

Lemma 13 *Jestliže existují dvě a více řešení úlohy (57), pak se tato řešení liší o prvek množiny \mathcal{P}_V a dále funkce $f \in L^2(\Omega)$ a dané tření $\kappa \in L^2(\Gamma)$ musí splňovat podmínku (64).*

Důkaz: Předpokládáme, že existují aspoň dvě řešení $u_1, u_2 \in V$ a dosadíme je do (57), pak dostáváme

$$\begin{aligned} a(u_1, u_2 - u_1) + j(u_2) - j(u_1) &\geq F(u_2 - u_1), \\ a(u_2, u_1 - u_2) + j(u_1) - j(u_2) &\geq F(u_1 - u_2), \end{aligned}$$

Odtud (sečtením) plyne nerovnost $-a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \geq 0$, což z definice množiny \mathcal{P}_V znamená, že každá dvě řešení se mohou lišit nejvýše o prvek z \mathcal{P}_V , t.j.

$$u_2 = u_1 + p, \quad p \in \mathcal{P}_V.$$

Vzhledem k ekvivalenci úloh (57) a (58) musí platit rovnost $J(u_1) = J(u_2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(u_1, u_1) + j(u_1) - F(u_1) &= \frac{1}{2}a(u_2, u_2) + j(u_2) - F(u_2), \\ \frac{1}{2}a(u_1, u_1) + j(u_1) - F(u_1) &= \frac{1}{2}a(u_1, u_1) + j(u_1 + p) - F(u_1) - F(p), \\ j(u_1) &= j(u_1 + p) - F(p), \\ F(p) &= j(u_1 + p) - j(u_1). \end{aligned}$$

Dále užitím okrajových podmínek máme, že

$$\begin{aligned} T_n(u_1)u_1 + \kappa|u_1| &= 0, \\ T_n(u_1 + p)(u_1 + p) + \kappa|u_1 + p| &= 0, \end{aligned}$$

tedy

$$T_n(u_1)(u_1 + p) + \kappa|u_1 + p| = 0.$$

Odtud plyne, že $|T_n(u_1)| \leq \kappa$ a $|T_n(u_1 + p)| \leq \kappa$. Protože u_1 a u_2 jsou dvě různá řešení, musí být jedno z nich nenulové, nechť $u_1 \neq 0$. Pak $|T_n(u_1)| = \kappa$. Z Greenovy formule pro $v = 1$ dostáváme

$$(f, 1)_{L^2(\Omega)} = \langle T_n(u), 1 \rangle,$$

tedy pro řešení u_1 a $u_1 + c$ máme

$$\langle T_n(u_1 + p), 1 \rangle = (f, 1)_{L^2(\Omega)} = \langle T_n(u_1), 1 \rangle.$$

Z $|T_n(u_1)| = \kappa$ (tedy buď $T_n(u_1) = \kappa$ nebo $-T_n(u_1) = \kappa$) plyne, že

$$\begin{aligned} j(u_1) &= (\kappa, u_1)_{L^2(\Gamma)} = \pm(T_n(u_1), u_1)_{L^2(\Gamma)}, \\ j(u_1 + p) &= (\kappa, u_1 + p)_{L^2(\Gamma)} = \pm(T_n(u_1), u_1 + p)_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Protože $F(p) = j(u_1 + p) - j(u_1)$, to je

$$F(p) = \pm(T_n(u_1), (u_1 + p) - u_1)_{L^2(\Gamma)} = \pm(T_n(u_1), p)_{L^2(\Gamma)},$$

platí, že

$$F(1) = \pm(T_n(u_1), 1)_{L^2(\Gamma)} = \pm(\text{sign } \kappa, \kappa)_{L^2(\Gamma)} = \mp(\kappa, 1)_{L^2(\Gamma)},$$

což je podmínka (64).

Poznámka 19 Je-li pro funkce $f(x)$ a $\kappa(s)$ splněna podmínka (63), potom může existovat nejvýše jedno slabé řešení úlohy (57). V následujícím ukážeme, že za platnosti takové podmínky je v příslušném minimalizačním problému funkcionál J koercivní, tedy bude zajištěna existence slabého řešení.

Lemma 14 (Postačitelnost podmínky (63)) *Nechť funkce f a κ splňují podmínku řešitelnosti ve tvaru ostré nerovnosti (63). Potom existuje právě jedno řešení úlohy (57).*

Důkaz Tvrzení dokážeme podobným způsobem jako u předchozí modelové úlohy, navíc se zde objeví modifikace zapříčiněná funkcionálem j .

- (i) Úloha minimalizace funkcionálu J nad prostorem V (viz (58)) je ekvivalentní úloze (57), chceme dokázat koercivitu funkcionálu J . Definujeme $\bar{v} := (\text{mes } \Gamma)^{-1} \int_{\Gamma} \gamma_0 v(s) d\Gamma$ a $v^* := v - \bar{v}$, zřejmě $|v|_{H^2(\Omega)} = |v^*|_{H^2(\Omega)}$, $\|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \bar{v}^2 \text{mes } (\Omega)$ a $(\gamma_0 v^*, 1)_{L^2(\Gamma)} = 0$.
- (ii) Ze zobecněné Poincarého nerovnosti ve tvaru (2) plyne, že

$$\|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_P |v^*|_{H^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V,$$

kde c_P je kladná konstanta závislá pouze na oblasti Ω .

- (iii) Pro dostatečně velká $v \in V$ platí nerovnost $\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c(\|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + \bar{v}^2)$ pro nějakou kladnou konstantu c , neboť

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^2(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha|=0}^2 \|\partial_\alpha v^* + \partial_\alpha \bar{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v^* + \bar{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=1}^2 \|\partial_\alpha v^*\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ &= \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + 2(v^*, \bar{v})_{L^2(\Omega)} + \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + 2\|v^*\|_{H^2(\Omega)} \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq c' \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + \text{mes}^2(\Omega) \bar{v}^2, \end{aligned}$$

$c' > 0$ je kladná konstanta⁷.

⁷neboť pro dostatečně velké $t \in \mathbf{R}$ ze odhadnout zhora výraz $t^2 + 2\|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)}t$ funkcí $c't^2$ pro nějakou kladnou konstantu c' (obecně závislou na nezáporném čísle $\|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)}$)

(iv) Nyní můžeme odhadnout výraz $j(v) - F(v)$ zdola. Podle (61) je

$$\begin{aligned} j(v) - F(v) &= j(v^* + \bar{v}) - F(v^* + \bar{v}) \geq \\ &\geq j(\bar{v}) - j(v^*) - F(v^*) - F(\bar{v}) = \\ &= |\bar{v}|j(1) - \bar{v}F(1) - j(v^*) - F(v^*) \geq \\ &\geq |\bar{v}|j(1) - \bar{v}F(1) + \\ &\quad - (\|\kappa\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_0 v^*\|_{L^2(\Gamma)} + \|F\|_{L^2(\Omega)} \|v^*\|_{H^2(\Omega)}) \geq \\ &\geq |\bar{v}|j(1) - \bar{v}F(1) - c_2 \|v^*\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

kde c_2 je kladná konstanta. Předpoklad $-j(1) < F(1) < j(1)$ lze zapsat jako nerovnosti $F(1) < j(1)$ a $j(1) > -F(1)$, tedy pro nenulové \bar{v} je výraz $|\bar{v}|j(1) - \bar{v}F(1)$ kladný, neboť

$$|\bar{v}|j(1) - \bar{v}F(1) = \begin{cases} \bar{v}j(1) - \bar{v}F(1); & \bar{v} > 0, \\ \bar{v}j(1) + \bar{v}F(1); & \bar{v} < 0, \end{cases} = \begin{cases} \bar{v}(j(1) - F(1)); & \bar{v} > 0, \\ \bar{v}(j(1) + F(1)); & \bar{v} < 0. \end{cases}$$

(Pro nulové \bar{v} je výraz $|\bar{v}|j(1) - \bar{v}F(1)$ nulový.) Proto

$$j(v) - F(v) \geq c_1 \bar{v} - c_2 \|v^*\|_{H^2(\Omega)},$$

kde c_1, c_2 jsou kladné konstanty.

(v) Nakonec odhadneme funkcionál J zdola pro dostatečně velká $v \in V$ jako

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1-\mu}{2} |v|_{H^2(\Omega)}^2 + j(v) - F(v) = \\ &= \frac{1-\mu}{2} |v^*|_{H^2(\Omega)}^2 + j(v) - F(v) \geq \\ &\geq \frac{1-\mu}{2c_P} \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + j(v) - F(v) \geq \\ &\geq c \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 - c_2 \|v^*\|_{H^2(\Omega)} + c_1 \bar{v} \geq \\ &\geq c_3 \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + c_1 \bar{v} \end{aligned}$$

kde c_3 a c_1 jsou kladné konstanty.

(vi) Pro $v \in V$, $\|v\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ roste aspoň jedno z čísel $\|v^*\|_{H^2(\Omega)}$ a \bar{v} nade všechny meze (viz bod (iii)), tedy i $J(v) \rightarrow +\infty$. Proto je funkcionál J na prostoru V koercivní a řešení minimalizační úlohy existuje aspoň jedno. Z předchozích tvrzení plyne, že toto řešení je jediné.

Poznámka 20 Analogicky jako v přechozím problému s jednostranným posunutím lze studovat podmínku ve tvaru rovnosti, to je podmínky (64). Lze definovat pomocnou úlohu a ukázat, že každé řešení tohoto pomocného problému je zároveň i řešením problému (57). Poznamenejme, že klasické řešení w této pomocné úlohy splňuje

$$\begin{aligned} A w &= f \text{ v } \Omega, \\ \partial_n w &= 0 \text{ na } \Gamma, \\ T_n w &= -\kappa \text{ na } \Gamma. \end{aligned}$$

6 Nelineární variační rovnice

Nakonec analyzujeme problematiku řešitelnosti úlohy, která vede na řešení nelineární variační rovnice, neboť vystupující forma a není bilineární, ale je lineární pouze v jedné proměnné. Tato úloha vzniká při modelování ohybu tenké desky, jejíž okraj se opět nemůže natočit a navíc je na tomto okraji ještě předepsána jednostranná Newtonova podmínka na posunutí (okraj desky je pružně podepřen a posunutí okraje směrem vzhůru je volné). Tuhost tohoto uložení je reprezentována kladnou funkcí $k : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ takovou, že

$$k(s) \geq k_0 > 0 \text{ s.v. na } \Gamma, \quad (65)$$

kde k_0 je daná kladná konstanta. Opět budeme uvažovat homogenní tvar okrajových podmínek.

Poznámka 21 (Klasická formulace) Pro danou dostatečně hladkou funkci f hledáme dostatečně hladkou funkci u , která splňuje diferenciální rovnici (8) a okrajové podmínky

$$\partial_n u = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (66)$$

$$T_n u + k u^+ = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (67)$$

takovou funkci nazýváme klasickým řešením problému s jednostranným pružným podepřením. Symbolem u^+ budeme označovat kladnou část funkce u ,

$$u^+(s) = \begin{cases} u(s); & u(s) \geq 0, \\ 0; & u(s) < 0. \end{cases}$$

Pomocí Greenovy formule lze formálně z klasické formulace snadno odvodit následující úlohu.

Definition 5 (Variační formulace) Nechtě $f \in L^2(\Omega)$ a $k \in L^\infty(\Omega)$, $k(x) \geq k_0 > 0$. Definujeme

$$V = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_1 v = 0 \text{ na } \Gamma\}, \quad (68)$$

$$a(u, v) = \sigma(u, v) + (k\gamma_0^+ u, \gamma_0 v)_{L^2(\Gamma)} \quad (69)$$

$$F(v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \quad (70)$$

kde $\gamma_0^+ u := \gamma_0(u^+)$. Variačním (slabým) řešením problému s jednostranným pružným podepřením nazýváme funkci u vyhovující úloze

$$?u \in V : \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (71)$$

Poznámka 22 Ani zde není forma a koercivní, k ověření této skutečnosti stačí uvažovat libovolnou nekladnou konstantu, neboť

$$\int_{\Gamma} k(s)(\gamma_0^+(-c))^2 d\Gamma = 0 \quad \forall c \in \mathbf{R}_0^+.$$

Semikoercivita formy a plyne z (15), tedy

$$a(v, v) = \sigma(v, v) + (k\gamma_0^+v, \gamma_0v)_{L^2(\Gamma)} \geq \frac{1-\mu}{2}|v|_{H^2(\Omega)}^2 + (k, (\gamma_0^+v)^2)_{L^2(\Gamma)} \geq \frac{1-\mu}{2}|v|_{H^2(\Omega)}^2$$

(kde jsme využili rovnosti

$$\int_{\Gamma} k(s)\gamma_0^+v\gamma_0v ds = \int_{\Gamma} k(s)\gamma_0^+v\gamma_0^+v ds).$$

Poznámka 23 (Minimalizační problém) Problém nalezení slabého řešení úlohy (71) je ekvivalentní úloze nalezení minima funkcionalu

$$J(v) = \frac{1}{2}\sigma(v, v) + (k\gamma_0^+v, \gamma_0^+v)_{L^2(\Gamma)} - (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (72)$$

nad prostorem V . Funkcionál J je kvadratický a diferencovatelný, ale příslušná forma není bilineární.

Poznámka 24 Poznamenejme, že pokud bychom formálně uvažovali $k \rightarrow \infty$, dostáváme se k jiné úloze, jde o Signoriniho úlohu minimalizace na množině

$$K = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_0v \geq 0 \text{ na } \Gamma, \gamma_1v = 0 \text{ na } \Gamma\}.$$

Lemma 15 (Nutná podmínka řešitelnosti) *Nechť úloha (71) má řešení. Potom funkce f musí splňovat podmínku*

$$F(1) \geq 0,$$

podrobněji

$$\int_{\Omega} f(x) dx \geq 0. \quad (73)$$

Důkaz: Nechť $u \in V$ je slabým řešením úlohy (71). Do rovnice (71) můžeme dosadit za prvek v nenulovou konstantu $c \in \mathbf{R} \subset V$ a získáme rovnost

$$(k\gamma_0^+u, c)_{L^2(\Gamma)} = F(c),$$

tedy

$$0 \leq (k\gamma_0^+u, 1)_{L^2(\Gamma)} = F(1),$$

ale $\gamma_0^+u \geq 0$ a $k(s) \geq k_0 > 0$, tedy nutně $F(1) \geq 0$.

Poznámka 25 V dalším se omezíme na případ, kdy platí nutná podmínka ve tvaru ostré nerovnosti

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx > 0. \quad (74)$$

Lemma 16 (Postačitelnost podmínky (74)) *Nechť funkce f splňuje podmínku řešitelnosti ve tvaru ostré nerovnosti (74). Potom existuje aspoň jedno slabé řešení úlohy (71).*

Vzhledem k tomu, že tento důkaz je analogický předchozím, provedeme jej stručně.

- (i) Ekvivalence úlohy minimalizace funkcionalu J nad V (viz (72)) s nelineární variační rovnicí (71) převádí problém řešitelnosti na problém koercivity J nad prostorem V .
- (ii) Definujeme $\bar{v} := (\text{mes}(\Gamma))^{-1} \int_{\Gamma} \gamma_0 v(s) \, d\Gamma$ a $v^* := v - \bar{v} \in V$, zřejmě $\|v\|_{H^2(\Omega)} = \|v^*\|_{H^2(\Omega)}$ a $(\gamma_0 v^*, 1)_{L^2(\Gamma)} = 0$. Podle zobecněné Poincarého nerovnosti ve tvaru (2) platí, že

$$\|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c_P \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V,$$

kde $c_P = c_P(\Omega) > 0$.

- (iii) Pro dostatečně velká $v \in V$ platí nerovnost

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq c (\|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + \bar{v}^2),$$

kde $c > 0$ je konstanta.

- (iv) Odhadneme funkcional J zdola pro dostatečně velká $v \in V$

$$\begin{aligned} J(v) &\geq \frac{1-\mu}{2} \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + k_0 \|\gamma_0^+ v\|_{L^2(\Gamma)}^2 - F(v^*) - F(1)\bar{v} \geq \\ &\geq \frac{1-\mu}{2c_P} \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + k_0 \|\gamma_0^+ \bar{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \|F\|_{L^2(\Omega)} \|v^*\|_{H^2(\Omega)} - F(1)\bar{v} \geq \\ &\geq c_1 \|v^*\|_{H^2(\Omega)}^2 + c_2 \bar{v}^2, \end{aligned}$$

kde $c_1 > 0$ a $c_2 > 0$, nebo, v výraz

$$k_0 \|\gamma_0^+ \bar{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - F(1)\bar{v}$$

lze pro $\bar{v} > 0$ odhadnout jako

$$k_0 \|\gamma_0^+ \bar{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - F(1)\bar{v} \geq k_0 \text{mes}^2(\Gamma) \bar{v}^2 - F(1)\bar{v} \geq c_2 \bar{v}^2$$

a pro $\bar{v} < 0$ jako

$$k_0 \|\gamma_0^+ \bar{v}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - F(1)\bar{v} \geq -F(1)\bar{v} \geq c_2 \bar{v}.$$

- (v) Pro $v \in V$ takové, že $\|v\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow \infty$, roste aspoň jedno z čísel $\|v^*\|_{H^2(\Omega)}$ a \bar{v} nade všechny meze, tedy i $J(v) \rightarrow +\infty$. Proto řešení úlohy (71) existuje.

Poděkování Autoři příspěvku považují za svou milou povinnost poděkovat na tomto místě Radě vlády České republiky pro výzkum a Grantové agentuře České republiky za finanční podporu své výzkumné a prezentační činnosti. Výsledky předložené práce byly získány v rámci řešení projektu GAČR 105/99/1651 a výzkumného záměru katedry MAaAM na PřF UP Olomouc, č. J14/98 1531 000 11.

Reference

- [1] Nečas, J., Hlaváček, I.: Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: An Introduction. *Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York*, 1981.
- [2] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. *Pergamon Press, Oxford*, 1968.
- [3] Kufner, A., Fučík, S.: Nelineární diferenciální rovnice. SNTL, Praha, 1978.
- [4] Rektorys, K.: Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky. *SNTL, Praha*, 1974.
- [5] Horák, J., Fibinger, P.: *O řešitelnosti semikoercivních úloh ohybu desek*. In: Sborník 10. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství – 3μ “, VŠB TU 2001 Ostrava.
- [6] Lions, J. L., Duvaut, G.: Les inequations en mecanique et an physique. *Paris, Dunod*, 1972.
- [7] Aubin, J. P.: Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems. *Wiley-Interscience, London*, 1972.
- [8] Kufner, A., John, O., Fučík, S.: Function Spaces. *Academia, Praha*, 1977.
- [9] Haslinger, J., a kol.: Variační nerovnice v mechanice. *ALFA, Bratislava*, 1979.
- [10] Horák, J.: *O okrajových podmínkách a řešitelnosti úlohy ohybu nosníku*. In: Sborník 8. semináře „Moderní matematické metody v inženýrství – 3μ “, VŠB TU Ostrava, Dolní Lomná 9. – 11. 6. 1999, 38–44, ISBN 80-7078-725-2.
- [11] Fibinger, P.: *Modelování ohybu pružných desek s neklasickými okrajovými podmínkami*. Diplomová práce, Katedra matematiky, PřF OU v Ostravě, 2001.



Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat.,
Dept of Math. Anal. and Appl. of Math.
ODAM (2001) 101–125

Příspěvek k řešení semikoercivní kontaktní úlohy bez tření

HORYMÍR NETUKA

*Department of Mathematical Analysis and Applications of Mathematics
Faculty of Science, Palacký University
Tomkova 40, 779 00 Olomouc, Czech Republic
e-mail: netuka@inf.upol.cz*

Abstrakt

Autor zde navazuje na své dřívější práce v této oblasti (viz např. [40]), kde se opíral o postup uvedený v [30]. Občasné problémy, které se při počítání úloh z technické praxe vyskytovaly, však poukazyvaly na potřebu podrobnější analýzy a případného přepracování realizace některých kroků řešení.

Cílem této práce bylo proto znovu přezkoumat postup řešení kontaktní úlohy s ohledem na nové výsledky z oblasti numerické optimalizace. Předmětem studia zde však není běžně se v publikacích vyskytující koercivní úloha, ale úloha semikoercivní. Ta je dobře známa z četných aplikací a nemá, narozdíl od koercivního případu, zaručenu existenci ani jednoznačnost řešení. Její teoretické rozborů jsou uvedeny v [31]. Nově upravený postup řešení je založen na výsledcích uveřejněných v [41].

1 Úvod

Pokud jde o řešení kontaktní problematiky, do relativně nedávné doby nebylo její korektní matematické řešení známo. Velmi zjednodušený přístup k řešení problematiky kontaktních úloh pružných těles dříve spočíval pouze v užití Hertzových

vorců z r. 1882, kde však jedním z limitujících faktorů byl tvar vyšetřovaného tělesa. Průlom znamenaly až výsledky vynikajícího francouzského matematika J. L. Lionse v šedesátých letech, které ukázaly, že tyto problémy lze matematicky formulovat pomocí variačních nerovnic (viz např. [17]). U nás pak na to bezprostředně navázaly práce, které se zabývaly různými aspekty kontaktních úloh nejprve bez tření a později s Coulombovým modelem tření a jejichž autory byli převážně J. Haslinger, I. Hlaváček a J. Nečas. Větší část dosažených výsledků, jež pokrývají otázky formulace, existence a jednoznačnosti, aproximace metodou konečných prvků i numerické realizace, lze nalézt v knize [31]. Dalšími fundamentálními publikacemi v této oblasti jsou [34] a [45].

Numerická realizace kontaktních úloh se může ubírat v zásadě třemi směry (opomineme-li různé více méně intuitivní pokusy prezentované zejména v technických a inženýrských periodikách). Předně jde o využití penalizační metody, jak je např. popsáno v [34]. Na tomto přístupu je založeno i řešení kontaktní problematiky ve známém programovém systému ANSYS. Zkušenosti s ním však ukazují (viz [43]), že tento způsob řešení není dostatečně spolehlivý. Postup ANSYSu ovšem není zcela v intencích [34], ale kombinuje penalizaci s intuitivním přístupem.

Druhou cestou je regularizace nediferencovatelných členů, což popisuje např. [47]. Ani tento postup není ideální, neboť není dostatečně numericky stabilní.

Třetím směrem jsou postupy založené na dualizaci, jež jsou popsány v [31]. Jejich realizace spočívá na dvou bodech:

1. kvadratickém programování,
2. hledání sedlového bodu,

přičemž obojí se týká úloh velkého rozměru. V odborné literatuře (např. [22]) se však podrobně diskutují pouze postupy řešení běžných úloh. Teprve v poslední době se začínají objevovat práce, zabývající se i velkými úlohami (např. [27]). Využití navržených postupů přitom předpokládá dobře vypracovaný programový systém pro práci s řídkými maticemi a finitní řešení velkých řídkých symetrických nedefinitních soustav rovnic (viz např. [16]).

V [30] je k řešení zmíněných úloh doporučena metoda z knihy [46], založená na kombinaci metody projekce gradientu a metody konjugovaných gradientů. Protože se však jedná o řešení singulárních soustav rovnic, je celá záležitost výrazně komplikovanější než v standardním, tj. pozitivně definitním případě. Přesto bylo uvedené řešení s úspěchem realizováno u nás (viz např. [32], [9]) i v cizině (zde však pouze pro úlohu bez tření, viz [8]).

Současné trendy v metodách řešení kontaktní problematiky a jeho realizace se ubírají zhruba v následujících směrech:

- postup založený na duální formulaci úlohy a využívající jednak techniky metody rozložení oblasti (viz např. [10]) a rovněž algoritmu proporcionalizace urychlujícího výrazně celkový proces minimalizace, jehož autorem je prof. Z. Dostál (např. [11] nebo [13]); kromě prof. Dostála se na těchto pracích podílí i sku-

pina matematiků z Brazílie (A. Friedlander, S. A. Santos aj.) a nejvýznamnější výsledky jsou obsaženy v [12], [13] a [15] (velmi zajímavá možnost *matematicky korektního* využití metody okrajových prvků je zkoumána v [14]);

- postup založený na technice blokové relaxace (viz [23]) rozvíjený matematiky z Lince, jak je prezentován např. v [48];
- postup využívající tzv. monotónní multigridové techniky, jehož autorem je německý matematik R. Kornhuber, viz např. [36];
- „inženýrské“ postupy řešení problematiky (např. [49]), jež nemívají obvykle solidní matematické základy, ale přesto jsou s většími či menšími úspěchy používány, např. i v rámci známého systému ANSYS (viz [35]).

S výjimkou posledně jmenovaného případu lze tedy říci, že se jedná o matematicky vysoce sofistikované postupy založené na různých iteračních metodách.

Z uvedené literatury je známo, že uvažovaný problém představuje po diskretizaci poněkud speciální úlohu kvadratického programování, v níž vystupuje (právě jen) konvexní kvadratická funkce a lineárně nezávislá množina lineárních omezujících podmínek. Protože matice kvadratické formy je nyní singulární, je třeba hledat postupy, které tuto skutečnost akceptují. Přitom počet neznámých je obecně velký (řádově stovky a více), kdežto počet podmínek nikoliv (obvykle nejméně o řád menší). Odborná literatura však takový případ téměř opomíjí. Výjimkou jsou [46] a [4], kde jsou však uvažovány jen úlohy malé.

Jak již bylo uvedeno výše, v [30] byla pro řešení kontaktních úloh (bez tření) předložena metoda založená na kombinaci metody projekce gradientu a metody konjugovaných gradientů a v zásadě převzatá z [46]. I když obecně není podobný postup ve velkých úlohách vhodný, v případě kontaktní problematiky umožňuje speciální struktura vazbových podmínek na kontaktu jeho úspěšnou realizaci (např. [40]). Prezentace metody v [46] je však z pohledu současného stavu numerické optimalizace zastaralá, neboť konjugované gradienty jsou uvažovány jako finitní metoda.

Zásadní význam pro úspěšnou realizaci má stanovení ukončovacího kritéria. Zde je třeba poznamenat, že navzdory úsilí předních specialistů neexistuje uspokojivé *obecné* řešení této známé slabiny iteračních metod (viz [1]). Výchozím bodem pro metodu konjugovaných gradientů může být práce [33], kde je však uvažována pouze pozitivně definitní nepředpodmíněná varianta. Navíc navržený postup není bohužel vhodný pro úlohy velkých rozměrů. Konečně dalším, nikoliv bezvýznamným problémem, je poměrně značná citlivost metody na *výpočetní* konsistentnost řešené soustavy rovnic. Možnosti, jak se s tímto jevem vypořádat, popř. další rozbor jsou uvedeny v [44] a [5].

Vzhledem k zmíněným praktickým potížím s iteračními metodami se autor pokusil navrhnout postup založený na finitním řešení. Ten vychází z nové metody řešení singulárních symetrických semidefinitních soustav rovnic. K tomuto účelu je zde využít algoritmus modifikované Choleského faktorizace, který je v numerické

optimalizaci používán při minimalizaci nekonvexních funkcí. Tímto způsobem se získá přibližné řešení soustavy, takže následně je třeba provést jeho *iterační* zpřesnění, které zpravidla čítá jeden či nejvýše několik málo kroků. Je tedy použito kombinace obou principů řešení soustav rovnic (podrobněji viz [42]).

Dalším důležitým problémem, který je zapotřebí zvládnout, je řešení tzv. Kuhn–Tuckerových soustav rovnic s maticí tvaru

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Rozbor této problematiky a nově navržený postup řešení pro případ singulární matice \mathbf{C} , založený na „vhodné“ regularizaci dané soustavy, byly publikovány v předchozím sborníku (viz [41]).

Posledním krokem je analýza procesu řešení semidefinitní úlohy kvadratického programování. Jak je dnes obvyklé, spočívá toto řešení na metodě aktivní množiny, která představuje jisté zobecnění simplexové metody z lineárního programování. V semidefinitním případě může ovšem dojít k selhání standardního algoritmu a takovýmto situacím je pak věnována speciální pozornost. Nicméně se ukazuje, že při použití nově zavedených regularizačních technik není zapotřebí testovat singulárnost popř. řešitelnost Kuhn–Tuckerových soustav.

2 Matematický model kontaktní úlohy bez tření

V následujícím výkladu se omezíme na rovinnou úlohu. Uvažujme dvě tělesa reprezentovaná omezenými oblastmi $\Omega^{[1]}$ a $\Omega^{[2]}$ v \mathbb{R}^2 , jež se navzájem dotýkají. Předpokládejme, že jejich chování lze popsat v rámci teorie lineární pružnosti (viz [39]).

V dalším budeme značit veličiny vztahující se k oblasti $\Omega^{[k]}$, $k = 1, 2$, horním indexem $[k]$. Pole posunutí bodů tělesa $\Omega^{[k]}$ bude tedy $\mathbf{u}^{[k]} = (u_1^{[k]}, u_2^{[k]})$, tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}^{[k]} = (\tau_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^2$, vektor napětí $\mathbf{T}^{[k]} = (T_1^{[k]}, T_2^{[k]})$, atd. S ohledem na předpoklad lineární teorie budeme uvažovat pouze malé deformace a platnost lineárního Hookova zákona

$$\tau_{ij}^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) = c_{ijml}^{[k]} \varepsilon_{ml}^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ml}^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l^{[k]}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{[k]}}{\partial x_l} \right), \quad (2)$$

přičemž koeficienty $c_{ijml}^{[k]} \in L^\infty(\Omega^{[k]})$ splňují obvyklé podmínky symetrie

$$c_{ijml}^{[k]} = c_{jiml}^{[k]} = c_{mlij}^{[k]} \quad (3)$$

a elipticity

$$\exists \alpha > 0 : c_{ijml}^{[k]} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \in \mathbb{R} \text{ s.v. v } \Omega^{[k]}. \quad (4)$$

Zde i v dalším textu používáme sumační pravidlo a zde i v dalším textu budou indexy i, j, k, l, m nabývat libovolnou z hodnot 1, 2.

V obou tělesech musejí být splněny rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \tau_{ij}^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]})}{\partial x_j} + F_i^{[k]} = 0 \quad \text{v } \Omega^{[k]}, \quad (5)$$

kde $\mathbf{F}^{[k]} = (F_1^{[k]}, F_2^{[k]})$ značí vektor objemových sil, jež zatěžují těleso $\Omega^{[k]}$.

Hranice obou těles mějme rozděleny takto

$$\partial\Omega^{[k]} = \bar{\Gamma}_u^{[k]} \cup \bar{\Gamma}_P^{[k]} \cup \bar{\Gamma}_0^{[k]} \cup \bar{\Gamma}_K,$$

přičemž Γ_K představuje kontaktní zónu, jež je u tzv. *nerozšiřujícího* se kontaktu dána jako

$$\Gamma_K = \partial\Omega^{[1]} \cap \partial\Omega^{[2]}.$$

Na části hranice $\Gamma_u^{[k]}$ bude těleso $\Omega^{[k]}$ fixováno, což vyjádříme předepsáním okrajových podmínek

$$u_i^{[k]} = 0 \quad \text{na } \Gamma_u^{[k]}, \quad (6)$$

zatím co na části $\Gamma_P^{[k]}$ působí povrchové síly $\mathbf{P}^{[k]} = (P_1^{[k]}, P_2^{[k]})$. Tím dostáváme další obvyklý typ okrajových podmínek

$$T_i^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) \equiv \tau_{ij}^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) n_j^{[k]} = P_i^{[k]} \quad \text{na } \Gamma_P^{[k]}, \quad (7)$$

přičemž $n_j^{[k]}$ značí j -tou komponentu vektoru vnější normály $\mathbf{n}^{[k]}$ v daném bodě hranice $\partial\Omega^{[k]}$.

Na části Γ_K však nejsou *klasické* podmínky tohoto typu předem známé. Obecně není předem známa ani kontaktní zóna sama. Předepisujeme zde namísto toho tzv. *jednostranné* okrajové podmínky, jež mají v případě nerozšiřující se kontaktní zóny tvar

$$u_n^{[1]} + u_n^{[2]} \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_K, \quad (8)$$

$$T_n^{[1]}(\mathbf{u}^{[1]}) = T_n^{[2]}(\mathbf{u}^{[2]}) \leq 0 \quad \text{na } \Gamma_K, \quad (9)$$

$$(u_n^{[1]} + u_n^{[2]}) T_n^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) = 0 \quad \text{na } \Gamma_K, \quad (10)$$

kde symboly s indexem n znamenají normálovou složku příslušného vektoru. Ty jsou tudíž definovány takto

$$u_n^{[k]} = u_i^{[k]} n_i^{[k]}, \quad (11)$$

$$T_n(\mathbf{u}^{[k]}) = \tau_{ij}(\mathbf{u}^{[k]}) n_j^{[k]} n_i^{[k]}. \quad (12)$$

Tyto podmínky vyjadřují to, že tělesa se nemohou pronikat a že v místech, kde dojde na kontaktní zóně k jejich odlehnutí, tj. kde bude $u_n^{[1]} + u_n^{[2]} < 0$, musí být $T_n(\mathbf{u}^{[k]}) = 0$. Zavedeme-li ještě tangenciální složku vektorů napětí vztahem

$$T_t(\mathbf{u}^{[k]}) = \tau_{ij}(\mathbf{u}^{[k]}) n_j^{[k]} t_i^{[k]}, \quad (13)$$

přičemž $t_i^{[k]}$ značí i -tou složku vektoru $\mathbf{t}^{[k]} = (t_1^{[k]}, t_2^{[k]}) = (-n_2^{[k]}, n_1^{[k]})$, lze jednostranné podmínky doplnit o podmínku nulového tření na Γ_K

$$T_t^{[1]}(\mathbf{u}^{[1]}) = T_t^{[2]}(\mathbf{u}^{[2]}) = 0. \quad (14)$$

Konečně na $\Gamma_0^{[k]}$ budou zadány podmínky *oboustranného* (bilaterálního) kontaktu

$$u_n^{[k]} = 0, \quad T_t^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) = 0 \quad \text{na } \Gamma_0^{[k]}. \quad (15)$$

Takovéto podmínky se vyskytují obvykle na osách symetrie úlohy.

Definice 2.1 Funkci

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{[1]}, \mathbf{u}^{[2]})$$

nazveme klasickým řešením kontaktní úlohy bez tření a s nerozšiřující se kontaktní zónou, jestliže \mathbf{u} splňuje rovnice rovnováhy (5), Hookův zákon (1), (2) a okrajové podmínky (6) až (10), (14) a (15).

V případě, že hranice těles jsou v okolí kontaktní zóny hladké, může dojít k rozšíření kontaktní zóny, což není v praktických aplikacích výjimečný případ. Toto lze studovat pomocí zavedení lokálního souřadného systému (ξ, η) v místě předpokládaného rozšíření, přičemž souřadnice ξ se umístí do společné normály obou těles a souřadnice η do společné tečny k jejich hranici. Podmínky (8) a (9) se pak změni takto (předpokládáme, že ξ má směr vnitřní normály k $\partial\Omega^{[1]}$)

$$u_\xi^{[2]} - u_\xi^{[1]} \leq \delta(\eta), \quad (16)$$

$$(u_\xi^{[2]} - u_\xi^{[1]} - \delta(\eta)) T_\xi^{[k]}(\mathbf{u}^{[k]}) = 0, \quad (17)$$

kde $\delta(\eta)$ je funkce vzdálenosti mezi oběma hranicemi v daném místě. Kontaktní zóna se rozšíří vně množiny $\partial\Omega^{[1]} \cap \partial\Omega^{[2]}$ a je proto třeba uvažovat dvě zóny $\Gamma_K^{[1]}$ a $\Gamma_K^{[2]}$. Podrobně je tato záležitost analyzována v [31]. V dalším textu se jí nebudeme zabývat až do doby, kdy budeme řešit diskretizovanou úlohu.

Nyní přejdeme k variační formulaci uvažované úlohy. Definujme prostor

$$\mathbf{H}^1 = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = (\mathbf{v}^{[1]}, \mathbf{v}^{[2]}) \in (H^1(\Omega^{[1]})^2 \times (H^1(\Omega^{[2]})^2)\}, \quad (18)$$

kde $H^1(\Omega^{[k]})$ jsou Sobolevovy prostory, tedy klasické prostory funkcí na $\Omega^{[k]}$, jež jsou spolu se svými zobecněnými derivacemi integrovatelné v kvadrátu. Dále zavedme prostor virtuálních posunutí

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{[1]}, \mathbf{v}^{[2]}) \in \mathbf{H}^1 \mid \mathbf{v}^{[k]} = \mathbf{o} \text{ na } \Gamma_u^{[k]}, v_n^{[k]} = 0 \text{ na } \Gamma_0^{[k]}\} \quad (19)$$

a v něm množinu přípustných posunutí

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid v_n^{[1]} + v_n^{[2]} \leq 0 \text{ na } \Gamma_K\}. \quad (20)$$

Poznamenejme, že \mathbf{K} je neprázdňá konvexní uzavřená podmnožina ve \mathbf{V} , definujeme-li zde normu vztahem

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}^{[1]}\|_{1,\Omega^{[1]}}^2 + \|\mathbf{v}^{[2]}\|_{1,\Omega^{[2]}}^2, \quad (21)$$

kde $\|\cdot\|_{1,\Omega^{[k]}}^2$ značí obvyklou normu prostoru $(H^1(\Omega^{[k]}))^2$.

Položme dále

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^{[1]}} \tau_{ij}^{[1]}(\mathbf{u}^{[1]}) \varepsilon_{ij}^{[1]}(\mathbf{v}^{[1]}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{[2]}} \tau_{ij}^{[2]}(\mathbf{u}^{[2]}) \varepsilon_{ij}^{[2]}(\mathbf{v}^{[2]}) \, d\mathbf{x} \quad (22)$$

a

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega^{[1]}} F_i^{[1]} v_i^{[1]} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_P^{[1]}} P_i^{[1]} v_i^{[1]} \, ds \\ &\quad + \int_{\Omega^{[2]}} F_i^{[2]} v_i^{[2]} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_P^{[2]}} P_i^{[2]} v_i^{[2]} \, ds, \end{aligned} \quad (23)$$

kde $\mathbf{F}^{[k]} \in (\mathbb{L}^2(\Omega^{[k]}))^2$ a $\mathbf{P}^{[k]} \in (\mathbb{L}^2(\Gamma_P^{[k]}))^2$, a definujme na \mathbf{V} funkcionál potenciální energie vztahem

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}). \quad (24)$$

Definice 2.2 Variačním řešením kontaktní úlohy bez tření nazveme funkci $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ takovou, že

$$J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} J(\mathbf{v}). \quad (25)$$

Není obtížné ukázat, že s takto formulovanou úlohou je ekvivalentní tvar používající variační nerovnici

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{u} \in \mathbf{K} \text{ tak, že} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \end{cases} \quad (26)$$

Povšimněme si rozdíl oproti klasickým úlohám lineární pružnosti. Tam minimalizujeme potenciální energii na celém prostoru \mathbf{V} , z čehož plyne, že tam řešíme variační *rovnicí*. To, že nyní máme minimalizační úlohu pouze na jeho konvexní podmnožině \mathbf{K} má za následek, že přecházíme k variační *nerovnici* a že úloha je *nelineární*.

V knize [31] je dokázáno, že každé klasické řešení kontaktní úlohy je i variačním řešením a že je-li variační řešení dostatečně hladké, je rovněž klasickým řešením. Dále je tam podrobně rozebrána problematika existence a jednoznačnosti řešení této úlohy. Připomeňme si stručně některé výsledky.

Nejprve zavedme prostor virtuálních posunutí dokonale tuhých těles

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{[1]}, \mathbf{z}^{[2]}) \in \mathbf{H}^1 \mid z_1^{[k]} = a_1^{[k]} - b^{[k]}x_2, z_2^{[k]} = a_2^{[k]} + b^{[k]}x_1\}, \quad (27)$$

kde $a_1^{[k]}, a_2^{[k]}, b^{[k]}$ jsou libovolná reálná čísla, a označme

$$\mathbf{R} \cap \mathbf{V} = \mathbf{R}_V, \quad \mathbf{R} \cap \mathbf{K} = \mathbf{R}_K.$$

Pro další úvahy mají zásadní význam dva případy:

1. $\mathbf{R}_V = \{\mathbf{o}\}$,
2. $\mathbf{R}_V \neq \{\mathbf{o}\}$.

Funkcionál (24) je v prvním případě *koercivní* na \mathbf{V} a bilineární forma (22) generuje tudíž normu ekvivalentní s (21). Úloha (25), resp. (26) má pak jediné řešení. Pokud jde o druhý případ, výraz $(a(\mathbf{v}, \mathbf{v}))^{\frac{1}{2}}$ je pouze seminormou a hovoříme pak o *semikoercivní* úloze. Ta bude v dalším předmětu našeho zájmu.

Pro posouzení jednoznačnosti řešení, která není obecně zajištěna, má význam následující tvrzení.

Věta 2.1 *Předpokládejme, že platí*

$$\mathbf{R}_V = \{\mathbf{o}\}$$

nebo

$$L(\mathbf{z}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}_V - \{\mathbf{o}\}.$$

Potom existuje nejvýše jedno řešení úlohy (25), resp. (26).

Důkaz viz [31].

Před formulací stěžejního existenčního tvrzení definujme množinu oboustranných přípustných posunutí dokonale tuhých těles takto

$$\mathbf{R}^* = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}_K \mid \mathbf{z} \in \mathbf{R}^* \Rightarrow -\mathbf{z} \in \mathbf{R}^*\},$$

přičemž lze snadno nahlédnout, že je

$$\mathbf{R}^* = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}_V \mid z_n^{[1]} + z_n^{[2]} = 0 \text{ na } \Gamma_K\}.$$

Věta 2.2 *Nechť*

$$L(\mathbf{y}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}_K, \tag{28}$$

$$L(\mathbf{y}) < 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}_K - \mathbf{R}^*. \tag{29}$$

Potom existuje aspoň jedno řešení \mathbf{u} úlohy (25), resp. (26). Každé další řešení $\tilde{\mathbf{u}}$ pak lze zapsat ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{y},$$

kde $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_V$ je takové, že

$$\mathbf{u} + \mathbf{y} \in \mathbf{K}$$

a

$$L(\mathbf{y}) = 0.$$

Důkaz viz např. [45].

Pokud jde o jednoznačnost řešení, velký význam má dimenze podprostoru \mathbf{R}_V . Uvažujeme-li např., že $\text{meas}(\Gamma_u^{[1]}) > 0$, $\Gamma_u^{[2]} = \emptyset$, $\Gamma_0^{[1]} = \emptyset$, $\text{meas}(\Gamma_0^{[2]}) \geq 0$, pak je $\dim(\mathbf{R}_V) \leq 3$. Jestliže je $\Gamma_0^{[2]} = \emptyset$, pak zřejmě

$$\mathbf{R}_V = \{\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{[1]}, \mathbf{y}^{[2]}) \mid \mathbf{y}^{[1]} = \mathbf{o}, y_1^{[2]} = a_1 - bx_2, y_2^{[2]} = a_2 + bx_1\}, \quad (30)$$

přičemž a_1, a_2 a b jsou libovolné konstanty, a tudíž $\dim(\mathbf{R}_V) = 3$. Těleso $\Omega^{[2]}$ je zcela volné. Pokud je $\Gamma_u^{[2]} \neq \emptyset$, lze snadno ukázat (viz [31]), že

$$\dim(\mathbf{R}_V) \leq 1. \quad (31)$$

Tato vlastnost je implicitně obsažena v následujících tvrzeních.

Věta 2.3 *Nechť je*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_K &= \mathbf{R}_V, \\ L(\mathbf{y}) &= 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}_V. \end{aligned}$$

Označíme-li $\mathbf{V} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{R}_V$ ortogonální rozklad prostoru \mathbf{V} , pak platí

- (i) *funkcionál J je koercivní na \mathbf{H} ;*
- (ii) *existuje, a to jednoznačně, řešení $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathbf{K}}$ úlohy*

$$J(\hat{\mathbf{u}}) \leq J(\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{z} \in \hat{\mathbf{K}}, \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cap \mathbf{H}; \quad (32)$$

- (iii) *libovolné řešení úlohy (26) lze zapsat ve tvaru*

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{y},$$

kde $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathbf{K}}$ je řešením (32) a $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_V$;

- (iv) *je-li $\hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathbf{K}}$ řešením (32), pak $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{y}$, kde \mathbf{y} značí libovolný prvek z \mathbf{R}_V , je řešením úlohy (26).*

Důkaz viz [31].

Věta 2.4 *Nechť platí*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* &= \{\mathbf{o}\} \quad \mathbf{R}_V \neq \{\mathbf{o}\}, \\ L(\mathbf{y}) &\neq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}_V - \{\mathbf{o}\} \end{aligned}$$

a buďto

$$\mathbf{R}_K = \{\mathbf{o}\},$$

nebo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_K &\neq \{\mathbf{o}\}, \\ L(\mathbf{y}) &< 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}_K - \{\mathbf{o}\}. \end{aligned}$$

Potom funkcionál J je koercivní na \mathbf{K} a existuje právě jedno řešení úlohy (26).

Důkaz viz [31].

Aproximace uvažovaného problému vede na řešení konečnědimenzionální úlohy, jež má formální vyjádření buďto

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h \text{ tak, že} \\ J(\mathbf{u}_h) = \min_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} J(\mathbf{v}_h), \end{cases} \quad (33)$$

nebo ekvivalentně

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h \text{ tak, že} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h. \end{cases} \quad (34)$$

Použijeme-li k diskretizaci metodu konečných prvků, obdržíme, jak je ukázáno podrobně v [31] nebo [34], následující úlohu

$$\begin{cases} \text{nalézt } \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K} \text{ tak, že} \\ f(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}} f(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (35)$$

kde

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{d}^T \mathbf{x} \quad (36)$$

je konvexní kvadratická funkce a

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{o}, \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{o}\}. \quad (37)$$

je konvexní množina. \mathbf{C} je symetrická matice, jež má strukturu

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{[1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{[2]} \end{pmatrix},$$

přičemž $\mathbf{C}^{[k]}$ značí matici tuhosti odpovídající tělesu $\Omega^{[k]}$. \mathbf{C} je obecně pouze pozitivně semidefinitní. Vektor \mathbf{d} má analogicky strukturu

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}^{[1]} \\ \mathbf{d}^{[2]} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{d}^{[k]}$ značí vektor zatížení příslušející tělesu $\Omega^{[k]}$. \mathbf{A} je matice vazeb, jež vznikla diskretizací podmínek nepronikání (a obsahuje tudíž složky jednotkových vektorů vnější normály ke Γ_K), \mathbf{B} je matice vazeb, jež vznikla diskretizací podmínek oboustranného kontaktu (a obsahuje tudíž složky jednotkových vektorů vnější normály ke $\Gamma_0^{[k]}$), a n je dimenze prvkové úlohy.

Provedeme-li opět srovnání s klasickým problémem lineární pružnosti, neobdrželi jsme po diskretizaci soustavu lineárních rovnic $\mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{d}$, ale namísto ní úlohu konvexního kvadratického programování (35). Metodě jejího řešení se budeme věnovat v následující kapitole.

Poznámka 2.1 Problém s rozšiřující se kontaktní zónou nás po diskretizaci dovede k minimalizaci funkce (36) na množině

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{o}\}, \quad (38)$$

kde vektor \mathbf{b} vyjadřuje vzdálenost mezi hranicemi $\Gamma_K^{[1]}$ a $\Gamma_K^{[2]}$ a matice vazeb \mathbf{A} má poněkud jiná pravidla pro své vytváření, než u případu, kdy je $\Gamma_K^{[1]} = \Gamma_K^{[2]}$.

Vzhledem k tomu, že toto se nezřídka objevuje v aplikacích a že tvar (37) je speciálním případem tvaru (38), bude účelné se v dalších úvahách zabírat úlohou (35) s obecnější množinou (38). Přitom množinu \mathbb{K} zredukujeme ještě na tvar

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{b}}\}. \quad (39)$$

Jak bude zřejmé z dalšího výkladu, nemá tato změna přílišný význam pro postup řešení úlohy (35).

3 Úloha konvexního kvadratického programování

Nyní se budeme zabývat řešením úlohy, k níž jsme dospěli v předcházející kapitole, tedy

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{x}^* \in \mathbb{K} \text{ tak, že} \\ f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}} f(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (40)$$

kde

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{d}^T \mathbf{x} \quad (41)$$

je konvexní kvadratická funkce a

$$\mathbb{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}. \quad (42)$$

$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická pozitivně semidefinitní matice, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, matice plné hodnosti, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. V dalším výkladu budeme ještě potřebovat značení pro prostor sloupcových vektorů matice \mathbf{A}

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}\}$$

a nulový prostor matice \mathbf{A}

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}\},$$

Úloha patří mezi základní úlohy v oblasti nelineárního programování. Její řešení lze charakterizovat pomocí tzv. Kuhn–Tuckerových podmínek obsažených v následujícím tvrzení.

Věta 3.1 *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby bod $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}$ byl řešením dané úlohy (40) až (42) je, aby existovala čísla λ_i^* , $i = 1, \dots, m$, tak, že platí*

$$\mathbf{C}\mathbf{x}^* - \mathbf{d} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \mathbf{a}_i = \mathbf{o}, \quad (43)$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (44)$$

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* - b_i < 0 \implies \lambda_i^* = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (45)$$

přičemž vektory \mathbf{a}_i^T , $i = 1, \dots, m$, představují řádky matice \mathbf{A} .

Důkaz viz např. [46].

V kompaktnější formě je možno zapsat všechny podmínky takto

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}, \quad (46)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{x}^* - \mathbf{d} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{o}, \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^* \geq \mathbf{0}, \quad (48)$$

$$\lambda_i^* (\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (49)$$

kde tzv. vektor Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ byl vytvořen z m složek λ_i^* , $i = 1, \dots, m$.

V dalším textu budeme předpokládat, že řešení úlohy (40) až (42) existuje. K jeho nalezení se dnes používá téměř standardně tzv. strategie aktivní množiny, jež je do jisté míry zobecněním simplexové metody z lineárního programování.

Definice 3.1 Omezující podmínka $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ se nazve aktivní v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$, jestliže $\mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{x}} = b_i$, a pasivní v tomto bodě, jestliže $\mathbf{a}_i^T \tilde{\mathbf{x}} < b_i$.

Množina $I(\tilde{\mathbf{x}})$ všech indexů i takových, že omezení $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ jsou aktivní v bodě $\tilde{\mathbf{x}}$, se nazve aktivní množina bodu $\tilde{\mathbf{x}}$.

Základní idea strategie aktivní množiny spočívá v následující rozvaze. Pokud bychom znali aktivní množinu bodu \mathbf{x}^* splňujícího podmínky (46) až (49), mohli bychom tento bod plně určit pomocí úlohy, jež má omezující podmínky pouze ve tvaru rovností

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{x}^* \in \mathbb{K}^* \text{ tak, že} \\ f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^*} f(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (50)$$

kde

$$\mathbb{K}^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \quad \forall i \in I(\mathbf{x}^*)\}. \quad (51)$$

S řešením úloh tohoto typu jsme se již seznámili ve stati o Kuhn–Tuckerových soustavách [41]. Jelikož však množinu $I(\mathbf{x}^*)$ zpravidla předem neznáme, vytváříme v procesu řešení úlohy (40) až (42) její predikce zvané pracovní množiny, jež postupně dle určitých pravidel, které popíšeme dále, upravujeme tak dlouho, až dosáhneme kýženého výsledku.

Definice 3.2 Bod $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}$ nazveme kvazistacionárním bodem úlohy (40) až (42), jestliže je řešením tzv. kvazistacionárního problému

$$\begin{cases} \text{nalézt } \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K} \text{ tak, že} \\ f(\hat{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x} \in \hat{\mathbb{K}}} f(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (52)$$

kde

$$\hat{\mathbb{K}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \ \forall i \in I(\hat{\mathbf{x}})\}. \quad (53)$$

Kvazistacionární bod $\hat{\mathbf{x}}$ tedy musí splňovat následující podmínky

$$\mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}} = b_i \quad \forall i \in I(\hat{\mathbf{x}}), \quad (54)$$

$$\mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}} \leq b_i \quad \forall i \notin I(\hat{\mathbf{x}}), \quad (55)$$

$$\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d} + \mathbf{A}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}, \quad (56)$$

$$\hat{\lambda}_i (\mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}} - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (57)$$

Podmínka (55) deklaruje, že bod $\hat{\mathbf{x}}$ nesmí opustit *přípustnou oblast* \mathbb{K} . Rovnice *komplementarity* (57) určují, že hodnoty multiplikátorů příslušející pasivním omezením jsou nulové. Podmínky (54) a (56) definují úlohu kvadratického programování s omezeními ve tvaru rovností. Existence i jednoznačnost kvazistacionárního bodu nejsou obecně zaručeny, a to ani v případě, že daná úloha (40) až (42) má jediné řešení. K tomuto problému se vrátíme později.

Je zřejmé, že pokud bude platit $\hat{\lambda}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, budou splněny podmínky (46) až (49) a bod $\hat{\mathbf{x}}$ je pak řešením uvažované úlohy (40) až (42).

Lemma 3.1 *Nechť $\hat{\mathbf{x}}$ je kvazistacionární bod úlohy (40) a necht' $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ je odpovídající vektor Lagrangeových multiplikátorů. Lze-li nalézt index l takový, že $\hat{\lambda}_l < 0$, pak existuje bod $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}$, pro nějž platí*

$$\mathbf{a}_l^T \bar{\mathbf{x}} < b_l \quad \text{a} \quad f(\bar{\mathbf{x}}) < f(\hat{\mathbf{x}}).$$

Důkaz Definujme směr \mathbf{p} takto

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{p} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad i \neq l$$

a

$$\mathbf{a}_l^T \mathbf{p} = -1.$$

To je možno realizovat např. pomocí pseudoinverze

$$\mathbf{p} = -\mathbf{A}^+ \mathbf{e}_l,$$

kde $\mathbf{e}_l = (\delta_{il})_{i=1}^m$. Takto určený směr je spádový, neboť užitím (56) a definice vektoru \mathbf{p} obdržíme

$$\mathbf{p}^T \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}) = -\mathbf{p}^T \mathbf{A}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = -\hat{\lambda}_l \mathbf{p}^T \mathbf{a}_l = \hat{\lambda}_l < 0.$$

Pro „vhodný“ krok $\alpha > 0$ v tomto směru \mathbf{p} dosáhneme tedy poklesu hodnoty funkce (41), což je zřejmé z rozvoje

$$f(\widehat{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{p}) = f(\widehat{\mathbf{x}}) + \alpha \mathbf{g}^T(\widehat{\mathbf{x}}) \mathbf{p} + \frac{1}{2} \alpha^2 \mathbf{p}^T \mathbf{C} \mathbf{p} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (58)$$

Nový bod $\bar{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{p}$ navíc leží v \mathbb{K} , jelikož je

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\widehat{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{p}) = \mathbf{A} \widehat{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{A} \widehat{\mathbf{x}} - \alpha \mathbf{e}_l,$$

odkud ihned nahlédneme, že platnost vztahů (54) a (55) zůstala zachována s výjimkou l -té rovnosti, která se změnila na nerovnost $\mathbf{a}_l^T(\widehat{\mathbf{x}} + \alpha \mathbf{p}) < b_l$. \square

Poznámka 3.1 Lemma poukazuje na známý fakt, že funkci f lze na \mathbb{K} redukovat tím, že učiníme pasivní omezující podmínku, jejíž multiplikátor je záporný.

V dalším textu budeme kvůli zjednodušení vynechávat znak „stříška“ u symbolů veličin spjatých s kvazistacionárními body.

Z předchozích úvah lze učinit dva důležité závěry. Předně, k určení bodu vyhovujícího podmínkám (46) až (49), tj. k určení řešení zadané úlohy (40), stačí prozkoumat množinu kvazistacionárních problémů, jež je, jak je evidentní, *konečná*. To, jak ihned ukážeme, nepředstavuje nezvládnutelný úkol, a to ani v případě, že řešení některého kvazistacionárního problému neexistuje. Algoritmus řešení založený na tomto principu, bude tudíž *finitní*, avšak v ještě nikoliv *efektivní*.

Efektivního prohledávání kvazistacionárních problémů se týká druhý závěr. Budeme-li ve smyslu výše provedených odvození redukovat funkční hodnoty tím, že po vyřešení úlohy (52) vyřadíme z aktivní množiny jedno či více omezení, jemuž přísluší negativní multiplikátor, budeme tak procházet posloupnost kvazistacionárních bodů vlastnosti

$$f(\mathbf{x}^0) > f(\mathbf{x}^1) > \dots > f(\mathbf{x}^k), \quad (59)$$

kteřá musí po konečném počtu kroků dospět k řešení \mathbf{x}^* úlohy (40). Poznamenejme, že v průběhu tohoto procesu může dojít i k přibírání nových omezení do aktivní množiny v důsledku toho, že nesmíme během řešení opustit přípustnou oblast \mathbb{K} . Výpočetní proces bude tedy generovat posloupnost bodů $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots$, přičemž se budeme, jak je v optimalizačních metodách běžné, řídit vztahem

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (60)$$

jenž vyjadřuje postup ve směru \mathbf{p}^k o krok délky $\alpha_k > 0$.

Předpokládejme tedy, že se nacházíme v bodě \mathbf{x}^k , máme k dispozici aktivní množinu $I_k = I(\mathbf{x}^k)$ a \mathbf{x}^k není kvazistacionárním bodem. Hledejme nyní řešení úlohy

$$\begin{cases} \text{nalézt } \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}_k \text{ tak, že} \\ f(\tilde{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{K}_k} f(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (61)$$

kde

$$\mathbb{K}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = b_i \ \forall i \in I_k\}. \quad (62)$$

Platí následující

Věta 3.2 *Bod $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}_k$ je řešením úlohy (61) tehdy a jen tehdy, když gradient v tomto bodě splňuje podmínku*

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}_k), \quad (63)$$

přičemž matice $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{m_k \times n}$ je tvořena právě těmi omezeními, resp. řádky matice \mathbf{A} , které jsou vybrány množinou indexů I_k (viz (62)). Číslo m_k je rovno počtu prvků množiny I_k .

Důkaz Nechť je $\tilde{\mathbf{x}}$ řešením (61). Potom existuje $\boldsymbol{\lambda}^k \in \mathbb{R}^{m_k}$ tak, že

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_k \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{d}.$$

Skalárním vynásobením zleva libovolným prvkem $\mathbf{p} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$ obdržíme

$$\mathbf{p}^T \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_k \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{p}^T \mathbf{d},$$

odkud máme

$$\mathbf{p}^T (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{d}) = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}_k),$$

tj. požadovanou vlastnost (63).

Nyní předpokládejme, že platí (63) a že řešením úlohy (61) je jiný bod $\bar{\mathbf{x}}$. Položme

$$\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{p}.$$

Vektor \mathbf{p} musí ležet v $\mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$, což lze ověřit vynásobením uvedeného vztahu maticí \mathbf{A}_k . Pokud je $\mathbf{p} = \mathbf{o}$, není už co dále dokazovat. Předpokládejme tedy, že vektor \mathbf{p} je nenulový. Pro gradienty v uvažovaných bodech zřejmě platí

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{C}\mathbf{p}. \quad (64)$$

Podle již dokázané první části tvrzení pak kromě (63) platí i

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}_k),$$

takže vynásobením vztahu (64) vektorem \mathbf{p} dává

$$\mathbf{p}^T \mathbf{C}\mathbf{p} = 0.$$

To však dle lemmatu 3.1 znamená, že \mathbf{p} náleží také do $\mathcal{N}(\mathbf{C})$. Kuhn–Tuckerova soustava rovnic je pak singulární a snadno se přesvědčíme o tom, že ji splňuje i bod $\tilde{\mathbf{x}}$, který je proto rovněž řešením úlohy (61).

Nakonec předpokládejme, že (63) platí a úloha (61) nemá řešení. V tom případě na základě výsledků z kap. 4 existuje nenulový vektor $\mathbf{p} \in (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k))$ a současně $\mathbf{d} \notin (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k))$. Potom je ale

$$\mathbf{p}^T \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{d}) = -\mathbf{p}^T \mathbf{d} \neq 0,$$

což je v rozporu s předpokladem (63). \square

Použijeme-li pro bod $\tilde{\mathbf{x}}$ vyjádření

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k, \quad (65)$$

je úloha (61), (62) ekvivalentní s úlohou

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{p}^k \in \mathcal{N}(\mathbf{A}_k) \text{ tak, že} \\ \hat{f}(\mathbf{p}^k) = \min_{\mathbf{p} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)} \hat{f}(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (66)$$

kde

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{C} \mathbf{p} - \hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{p}, \quad (67)$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \mathbf{C} \mathbf{x}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k). \quad (68)$$

Řešení problému (66), (67) vyhovuje Kuhn–Tuckerově soustavě rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}_k^T \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

kde $\boldsymbol{\lambda}^k \in \mathbb{R}^{m_k}$ je vektor multiplikátorů úlohy (66), resp. (61).

Z [41] již víme, že za předpokladu plné hodnosti matice \mathbf{A}_k rozhoduje o řešitelnosti takovéto soustavy rovnic množina $\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$. Obsahuje-li pouze nulový vektor, je matice

$$\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}_k^T \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

regulární a soustava (69) má právě jedno řešení. V opačném případě je matice \mathbf{K}_k singulární a jen za podmínky

$$\hat{\mathbf{d}} \perp (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)) \quad (70)$$

je soustava (69) řešitelná, přičemž řešení existuje nekonečně mnoho. Z (68) je ihned patrné, že (70) platí právě tehdy, když

$$\mathbf{d} \perp (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)) \quad (71)$$

Lemma 3.2 *Směr \mathbf{p}^k , který splňuje soustavu (69), je spádovým směrem v bodě \mathbf{x}^k tehdy a jen tehdy, když neleží v $\mathcal{N}(\mathbf{C})$.*

Důkaz První soustava v (69) má po vynásobení vektorem \mathbf{p}^k zleva tvar

$$\mathbf{p}^{kT} \mathbf{C} \mathbf{p}^k + \mathbf{p}^{kT} \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{p}^{kT} \hat{\mathbf{d}},$$

což po dosazení z (68) a s ohledem na to, že $\mathbf{p}^k \in \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$, dává

$$\mathbf{p}^{kT} \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{p}^{kT} \mathbf{C} \mathbf{p}^k. \quad (72)$$

Protože \mathbf{C} je pozitivně semidefinitní, dokazované tvrzení nyní plyne ihned z lemmatu 3.1. \square

Jestliže je tedy matice \mathbf{K}_k regulární, obdržíme řešením soustavy (69) spádový směr. Je-li \mathbf{K}_k singulární a je splněna podmínka (70), resp. (71), lze všechna řešení vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{p}}^k + \mathbf{q},$$

kde $\tilde{\mathbf{p}}^k$ je nějaké pevně zvolené řešení a \mathbf{q} je libovolný prvek z $\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$. S ohledem na to, že je

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{p}}^k + \mathbf{q}) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{p}}^k),$$

stačí se omezit na posouzení vektoru $\tilde{\mathbf{p}}^k$. Ten podle předchozího lemmatu není směrem spádu pouze, když $\tilde{\mathbf{p}}^k \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$. V takovém případě však první maticová rovnice v (69) dává

$$\mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k = \hat{\mathbf{d}},$$

což s ohledem na (68) znamená, že $\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \in \mathcal{R}(\mathbf{A}_k^T)$, nebo ekvivalentně $\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$. Tím je však podle věty 3.2 řečeno, že bod \mathbf{x}_k je řešením úlohy (61) až (62). Nebyl proto důvod hledat bod $\tilde{\mathbf{x}}$ a tudíž i řešit soustavu (66). Na závěr lze tedy konstatovat, že má-li soustava (66) řešení $\{\mathbf{p}^k, \boldsymbol{\lambda}^k\}$, je jeho první složka spádovým směrem v bodě \mathbf{x}^k . Platí proto, že $f(\tilde{\mathbf{x}}) < f(\mathbf{x}^k)$.

Nyní ještě musíme zajistit splnění podmínky *přípustnosti*, neboť bod $\tilde{\mathbf{x}}$ nemusí obecně patřit do \mathbb{K} . Za tím účelem definujme *maximální přípustný krok* ve směru \mathbf{p}^k jako největší z čísel $\alpha > 0$ takových, že $\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{p}^k$ leží v \mathbb{K} , a označme ho $\hat{\alpha}_k$. Je zřejmé, že platí

$$\hat{\alpha}_k = \min_{i \notin I_k: \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}^k > 0} \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^k}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}^k}. \quad (73)$$

Dále je zřejmé, že pokud je $\hat{\alpha}_k \geq 1$, bude $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}$, což značí, že tento bod je kvazistacionární a máme tedy

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k.$$

V případě, že $\hat{\alpha}_k < 1$, bod $\tilde{\mathbf{x}}$ v \mathbb{K} neleží a potom položíme

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \hat{\alpha}_k \mathbf{p}^k.$$

Označme nyní r index, pro nějž se ve výrazu (73) nabývá minima, tj. pro nějž platí

$$\hat{\alpha}_k = \frac{b_r - \mathbf{a}_r^T \mathbf{x}^k}{\mathbf{a}_r^T \mathbf{p}^k}.$$

Pak je evidentní, že omezení s tímto indexem se stalo v bodě \mathbf{x}^{k+1} aktivním a že tedy došlo k zařazení tohoto omezení do aktivní množiny, což zapíšeme takto

$$I_{k+1} = I_k \cup \{r\}.$$

Nyní vyšetřeme případ, kdy úloha (66) řešení nemá. Pak ho nemá ani s ní ekvivalentní úloha (61) a podle důsledku 4.2 to znamená, že funkce (41) je zdola neohraničená. Existuje tedy spádový směr v bodě \mathbf{x}^k , který lze zkonstruovat např. jako směr $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ takový, že

$$\mathbf{s} \in (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)), \quad \mathbf{s}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) < 0. \quad (74)$$

Nenulový vektor splňující oba vztahy v (74) existuje, neboť matice soustavy (69) je nyní singulární a neplatí podmínka řešitelnosti (70). Dále určíme maximální přípustný krok v tomto směru. Protože předpokládáme, že existuje řešení výchozí úlohy (40) až (42), musí být $\hat{\alpha}_k < +\infty$. Zopakujeme tedy postup uvedený výše včetně zařazení nového indexu do množiny I_{k+1} a obdržíme bod

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \hat{\alpha}_k \mathbf{s}.$$

V obou případech jsme tedy dospěli do kvazistacionárního bodu $\mathbf{x}^{k+1} \in \mathbb{K}$, přičemž v souladu s dřívějšími úvahami je $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$. Multiplikátory odpovídající omezením, jejichž indexy obsahuje aktivní množina I_k , jsme získali při řešení soustavy (66), popř. je můžeme dopočítat ze vztahu (56). V souladu s (57) pak položíme zbývající rovnými nule a tím získáme úplný vektor $\boldsymbol{\lambda}^{k+1} \in \mathbb{R}^m$. S ohledem na podmínku (48) bude nezápornost všech jeho složek znamenat, že bod \mathbf{x}^{k+1} je řešením úlohy (40). V opačném případě existuje index l takový, že $\lambda_l^{k+1} < 0$. Jak bylo ukázáno výše, dokážeme pak redukovat funkci (41) na \mathbb{K} pomocí vyřazení indexu l z aktivní množiny I_{k+1} .

Poznámka 3.2 Kandidátů na vyřazení z aktivní množiny je obvykle více a lze popř. uvažovat o vyřazení všech nebo některých z nich. Ohledně strategie vyřazování existuje řada prací preferujících určité postupy na podkladě numerických experimentů. Analyticky totiž nelze tyto závěry doložit. Z autorit je např. R. Fletcher [19] stoupcem principu nalézt takové l , že

$$\lambda_l^{k+1} = \min_{i \in I_{k+1}} \lambda_i^{k+1}$$

a z I_{k+1} pak vyřadit právě jen tento index. Analogické problémy jsou i se zařazováním omezení do aktivní množiny. Podle studie [37] je ve většině případů účelné

udržovat aktivní množinu co nejmenší. Odtud lze usoudit, že zařazovat omezení po jednom bude nevhodnější strategie. Tento postup doporučuje opět R. Fletcher. Pro jednoduchost se toho přidržíme i při formulování výsledného algoritmu. Některé práce z poslední doby (např. [38] nebo [20]) však ukázaly, že rychlého postupu lze docílit právě naopak velkými změnami v aktivní množině.

Celkem tedy dovedeme vytvářet posloupnost splňující podmínku (59), která po konečně mnoha krocích nalezne řešení úlohy (40). Ohledně finitnosti je však třeba mít zřeteli fakt, že toto platí pouze v *exaktní aritmetice* (důkaz viz [46]), kdy jsou jednotlivé dílčí úlohy řešeny přesně. V *počítačové aritmetice* však proces může finitní charakter ztratit např. v důsledku jevu, známému v optimalizačních výpočtech pod názvem *zigzagging* (viz např. [19]). Postup zformulujeme jako

Algoritmus 3.1 (*Metoda aktivní množiny*)

Krok 0. Zadat \mathbf{x}^0 a určit $I_0 = I(\mathbf{x}^0)$.

Položit $k = 0$.

Krok 1. Sestavit soustavu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}_k^T \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (75)$$

Má-li řešení, vypočítat ho a přejít na krok 3.

Krok 2. Určit \mathbf{p}^k jako řešení úlohy

$$\begin{cases} \text{nalézt } \mathbf{p}^k \in (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_k)) \text{ tak, že} \\ \mathbf{d}^T \mathbf{p}^k = -1. \end{cases} \quad (76)$$

Krok 3. Určit $\hat{\alpha}_k$ a r ze vztahu

$$\hat{\alpha}_k = \frac{b_r - \mathbf{a}_r^T \mathbf{x}^k}{\mathbf{a}_r^T \mathbf{p}^k} = \min_{i \notin I_k: \mathbf{a}_i^T \mathbf{p}^k > 0} \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^k}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{p}^k}. \quad (77)$$

Krok 4. Pokud byl směr \mathbf{p}^k získán řešením soustavy (75), stanovit

$$\alpha_k = \min[1, \hat{\alpha}_k]. \quad (78)$$

Jestliže byl získán z (76), položit

$$\alpha_k = \hat{\alpha}_k. \quad (79)$$

Krok 5. Položit

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{p}^k, \quad (80)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{C}\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{d}. \quad (81)$$

Krok 6. Je-li $\alpha_k = \hat{\alpha}_k$, položit

$$I_{k+1} = I_k \cup \{r\}.$$

Přejít na krok 9.

Krok 7. Vytvořit vektor multiplikátorů λ^{k+1} po složkách takto

$$\lambda_i^{k+1} = \begin{cases} \lambda_i^k & \text{je-li } i \in I_k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (82)$$

Jestliže $\lambda^{k+1} \geq \mathbf{o}$, položit $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{k+1}$ a konec.

Krok 8. Určit index l tak, že $\lambda_l^{k+1} < 0$ a položit

$$I_{k+1} = I_k - \{l\}.$$

Krok 9. Položit $k = k + 1$ a přejít ke kroku 1.

Poznámka 3.3 Pokud není zaručeno, že daná úloha má řešení, je třeba doplnit krok 4 o testování podmínky, zda je hodnota α_k konečná. Pokud není, jedná se o případ, kdy je funkce (41) na \mathbb{K} zdola neohraničená.

Poznámka 3.4 Úloha (76) je jednou z možností, jak postupovat v případě, že soustava (75) nemá řešení. Jinou poskytuje volba směru podle lemmatu 3.1.

Poznámka 3.5 Otevřenou otázkou ovšem je, jak rozpoznat v kroku 1, zda je matice \mathbf{K}_k singulární a dále zda soustava (75) pak v tom případě má řešení. Pokud se k řešení soustav (75) použije algoritmus vyžadující regularitu matice \mathbf{K}_k , nelze ji vyřešit ani když řešení existuje. U rozměrově malých úloh je snad ještě únosné stanovit prostory $\mathcal{N}(\mathbf{C})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}_k)$ a testovat podmínku (71), u větších úloh však takto postupovat nejde. Lze se tedy jenom spoléhat na selhání řešících algoritmů, které bude indikovat některou z uvedených skutečností, a potom přejít ke kroku 2.

Situaci, kdy se může v právě popsaném algoritmu měnit regulární soustava na singulární a naopak popisuje následující tvrzení. Indexy označující krok algoritmu pro jednoduchost vynecháme.

Věta 3.3 (i) *Nechť*

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

je regulární matice. Potom matice

$$\mathbf{K}_- = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}_-^T \\ \mathbf{A}_- & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{A}_- vznikla z \mathbf{A} vyřazením řádku \mathbf{a}^T , tj.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_- \\ \mathbf{a}^T \end{pmatrix},$$

je singulární právě tehdy, když existuje $\mathbf{s} \in (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_-))$ tak, že

$$\mathbf{a}^T \mathbf{s} \neq 0.$$

(ii) Je-li matice \mathbf{K} singulární, potom matice

$$\mathbf{K}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}_+^T \\ \mathbf{A}_+ & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{A}_+ vznikla z \mathbf{A} přidáním řádku \mathbf{a}^T , tj.

$$\mathbf{A}_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{a}^T \end{pmatrix},$$

je regulární právě tehdy, když existuje $\mathbf{s} \in (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}))$ tak, že

$$\mathbf{a}^T \mathbf{s} \neq 0.$$

Je-li \mathbf{K} regulární, je také \mathbf{K}_+ regulární.

Důkaz (i) Podle [41] je matice \mathbf{K}_- singulární tehdy a jen tehdy, když

$$(\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}_-)) \neq \{\mathbf{o}\}$$

a existuje tedy nenulový vektor \mathbf{s} z tohoto průniku. Platí

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_-\mathbf{s} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{s} \end{pmatrix}.$$

Ježto \mathbf{K} je dle předpokladu regulární, musí být $\mathbf{a}^T \mathbf{s} \neq 0$.

(ii) Existence nenulového vektoru $\mathbf{s} \in (\mathcal{N}(\mathbf{C}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{A}))$ je nutnou i postačující k tomu, aby matice \mathbf{K} byla singulární. Protože je

$$\mathbf{A}_+\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{s} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{a}^T \mathbf{s} \end{pmatrix},$$

vede požadavek na regulárnost matice \mathbf{K}_+ k splnění podmínky $\mathbf{a}^T \mathbf{s} \neq 0$. Je-li \mathbf{K} regulární, pak \mathbf{K}_+ je nutně také regulární, neboť $\mathcal{N}(\mathbf{A}_+) \subset \mathcal{N}(\mathbf{A})$. \square

Poznámka 3.6 Z právě dokázaného tvrzení plyne, že máme-li v k -tém kroku singulární matici \mathbf{K}_k , bude následující matice \mathbf{K}_{k+1} z algoritmu aktivní množiny regulární, pokud nově zařazené omezení splní podmínku z části (ii). To se jeví obecně pravděpodobnější než to, že i \mathbf{K}_{k+1} bude singulární.

K realizaci algoritmu aktivní množiny využijeme regularizačních technik z [41]. Nyní v kroku 1 nezáleží na tom, zda je matice \mathbf{K}_k singulární či nikoliv. Pokud má soustava (75) řešení, získáme ho výše popsaným způsobem. Pokud řešení nemá, nejsme již nuceni počítat směr podle kroku 2, ale pomocí již vypočítané regulární matice $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{E}$ dokážeme určit spádový směr \mathbf{p}^k řešením soustavy s regulární maticí

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{A}_k^T \\ \mathbf{A}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (83)$$

V následujícím procesu výpočtu řešení původní soustavy pak stačí zajistit, aby růst složek vektorů nepřekročil z výpočetního hlediska přijatelné meze (což je v algoritmu každopádně rozumné zavést). Řešení nyní sice neexistuje algebraicky, ale výpočtem získáme potřebný spádový směr. Tím docílíme jednotného postupu ve všech možných případech, a to bez testování regularity popř. podmínky řešitelnosti.

Zvážíme-li celý postup řešení, jak byl diskutován v této kapitole, je zřejmé, že nejsme nijak nuceni řešit soustavy (75) zcela přesně, ale že v podstatě potřebujeme pouze získat „dobrý“ spádový směr. Přesným řešením získáme tzv. *newtonovský směr*, který je v jistém smyslu optimální (viz [19], [22]). Řešením soustavy s maticí (83) obdržíme směr $\bar{\mathbf{p}}^k$, který je newtonovskému směru „blízký“ a který je buďto nulový (a pak jsme hotovi) nebo spádový, jak plyne z lemmatu .2, a tudíž vyhovující pro potřeby řešení.

4 Závěr

Autor v této práci předkládá úpravu postupu numerické realizace řešení semikoercivní kontaktní úlohy, jak je známa z [30]. Algoritmy, které využívají regularizaci singulární soustavy pomocí modifikované Choleského faktorizace, umožňují bez problémů řešit soustavy s nejednoznačně daným řešením a nejsou citlivé na jejich konsistenci. V případě, že je matice soustavy regulární (a neblíží se výpočetně singulární matici), neprovedou navrhované algoritmy žádné změny a chovají se jako standardní. Jistou nevýhodou je nutnost počítat v dvojnásobné přesnosti. Nový postup řešení lze využít jak v rámci prosté úpravy algoritmu z [30], kde pouze vyměníme metodu konjugovaných gradientů, tak i jako novou variantu metody blokové eliminace v rámci algoritmu aktivní množiny. Příklady ukazující řešení jednoduchých kontaktních úloh dvou těles pomocí výše popsaných postupů jsou uvedeny a popsány v [42].

Reference

- [1] Arioli, M., Duff, I., Ruiz, D.: *Stopping criteria for iterative solvers*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. **13**, 1 (1992), 1992.
- [2] Axelsson, O.: *Iterative Solution Methods*. Cambridge Univ. Press, 1994.

- [3] Axelsson, O., Barker, V. A.: Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation. *Academic Press*, 1984.
- [4] Best, M. J.: *Equivalence of some quadratic programming algorithms*. Math. Programming **30** (1984), 71–87.
- [5] Blaheta, R., Jakl, O., Kuhut, R., Starý, J.: *Iterative displacement decomposition solvers for HPC in geomechanics*. In: Proc. Large Scale Scientific Computing LSSC'99. Ed. by S. Margenov, P. Vassilevski and P. Yalamov. Vieweg, 1999.
- [6] Cea, J.: Lectures on Optimization—Theory and Algorithm. *Springer-Verlag, Berlin*, 1978.
- [7] Ciarlet, P. G.: Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimization. *Cambridge Univ. Press*, 1988.
- [8] Dilintas, G., Laurent-Gengoux, P., Trystram, D.: *A conjugate projected gradient method with preconditioning for unilateral contact problems*. Comp. & Struct. **29**, 4 (1988), 675–680.
- [9] Dostál, Z.: *Conjugate projector preconditioning for the solution of contact problems*. Int. J. Numer. Meth. Engng. **34** (1992), 271–277.
- [10] Dostál, Z.: *Duality based domain decomposition with proportioning for the solution of free boundary problems*. J. Comput. Appl. Math. **63** (1995), 203–208.
- [11] Dostál, Z.: *Box constrained quadratic programming with proportioning and projections*. SIAM J. Optim. **7**, 3 (1997), 871–887.
- [12] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A.: *Solution of coercive and semicoercive contact problems by FETI domain decomposition*. Contemporary Math. **218** (1998), 82–93.
- [13] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A.: *Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with equality constraints*. Comput. Opt. and Appl. **14** (1999), 1–17.
- [14] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A., Malík, J.: *Analysis of semicoercive contact problems using symmetric BEM and augmented Lagrangians*. Engng Anal. with BE **18** (1996), 195–201.
- [15] Dostál, Z., Gomes Neto, F. A. M., Santos, S. A.: *Solution of contact problems by FETI domain decomposition with natural coarse-space projections*. Comp. Meth. Appl. Math. Eng. (1999) (zasláno k publikaci).
- [16] Duff, I. S., Erisman, A. M., Reid, J. K.: Direct Methods for Sparse Matrices. *Oxford Univ. Press, Oxford*, 1986.
- [17] Duvaut, G., Lions, J. L.: Les inéquations en mécanique et en physique. *Dunod, Paris*, 1972.
- [18] Fiedler, M.: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. *SNTL, Praha*, 1981.
- [19] Fletcher, R.: Practical Methods of Optimization. *John Wiley & Sons, Chichester*, second edition, 1987.
- [20] Friedlander, A., Martínez, J. M.: *On the maximization of concave quadratic functions with box constraints*. SIAM J. Optim. **4** (1994), 177–192.
- [21] George, A., Liu, J. W.-H.: Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.*, 1981.
- [22] Gill, P. E., Murray, W., Wright, M. H.: Practical Optimization. *Academic Press*, 1981.

- [23] Glowinski, R.: Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. *Springer-Verlag, Berlin*, 1984.
- [24] Glowinski, R., Le Tallec, P.: Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics. *SIAM, Philadelphia*, 1989.
- [25] Golub, G. H., Van Loan, C. F.: Matrix Computations. *The John Hopkins Univ. Press, Baltimore and London*, second edition, 1989.
- [26] Gould, N. I. M.: *On practical conditions for the existence and uniqueness of solutions to the general equality quadratic programming problem*. Math. Programming **32** (1985), 90–99.
- [27] Gould, N. I. M.: *An algorithm for large-scale quadratic programming*. IMA J. of Numerical Analysis **11** (1991), 299–324.
- [28] Hackbusch, W.: Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme. *Teubner-Verlag, Stuttgart*, 1991.
- [29] Haslinger, J., Neittaanmäki, P.: Finite Element Approximation for Optimal Shape Design: Theory and Applications. *John Wiley & Sons, Chichester*, 1988.
- [30] Haslinger, J., Tvrdý, M.: *Approximation and numerical solution of contact problems with friction*. Aplikace Matematiky **28** (1983), 55–71.
- [31] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J.: *Numerical solution of variational inequalities in mechanics*. Springer series in Applied Mathematical Sciences 66, Springer-Verlag, 1988.
- [32] Horák, J., Netuka, H.: *Numerical realization of contact problem with friction—semi-coercive case*. In: Mathematical methods in Engineering, Plzeň, 1991, 147–152.
- [33] Kaasschieter, E. F.: *A practical termination criterion for the conjugate gradient method*. BIT **28** (1988), 308–322.
- [34] Kikuchi, N., Oden, J. T.: Contact Problems in Elasticity. Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. *SIAM, Philadelphia*, 1988.
- [35] Kohnke, P. (ed.): ANSYS Theory Reference. Release 5.5. *SAS IP, Inc.*, ninth edition, 1998.
- [36] Kornhuber, R.: Adaptive Monotone Multigrid Methods for Nonlinear Variational Problems. *Teubner, Stuttgart*, 1997.
- [37] Lenard, M. L.: *A computational study of a active set strategies in nonlinear programming with linear constraints*. Math. Progr. **16** (1979), 81–97.
- [38] Moré, J. J., Toraldo, G.: *On the solution of large quadratic programming problems with bound constraints*. SIAM J. Optim. **1** (1991), 93–113.
- [39] Nečas, J., Hlaváček, I.: Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles. *SNTL, Praha*, 1983.
- [40] Netuka, H.: *Řešení pozitivně semidefinitních soustav rovnic kontaktní úlohy*. Výzkumná zpráva č. 2438/86-DVZ/2500. SIGMA Výzkumný ústav, Olomouc, 1986.
- [41] Netuka, H.: *Řešení Kuhn–Tuckerových rovnic kontaktní úlohy*. Proceedings ODAM'99, Olomouc, 1999, 61–86.
- [42] Netuka, H.: *Užití metod optimalizace při řešení semikoercivní kontaktní úlohy teorie pružnosti*. Disertační práce. Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP, Olomouc, 2000.

- [43] Netuka, H., Horák, J.: *Použití ANSYSu při řešení úlohy šroubování stropů*. In: 2. ANSYS Users Meeting, 25.–26. říjen 1994, Nové Město na Moravě, SVS FEM Brno, 1994, 113–120.
- [44] Notay, Y.: *Solving positive (semi)definite linear systems by preconditioned iterative methods*. In: Preconditioned Conjugate gradient Methods. Proceedings. Nijmegen 1989. Ed. by O. Axelsson and L.Yu. Kolotilina. Lecture Notes in Mathematics 1457, Springer-Verlag, 1990.
- [45] Panagiotopoulos, P. D.: *Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions*. Birkhäuser, Boston, 1985.
- [46] Пшеничный, B. N., Данилин, Ю. М.: *Численные методы в экстремальных задачах*. Наука, Москва, 1975.
- [47] Raous, M., Barbarin, S.: *Conjugate gradient for frictional contact*. In: Proceedings. Contact Mechanics. Int. Symposium. Ed. by A. Cournier. PPUR, 1992, 423–432.
- [48] Schöberl, J.: *Solving the Signorini problem on the basis of domain decomposition techniques*. Computing **60**, 4 (1998), 323–344.
- [49] Simo, J. C., Laursen, T. A.: *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*. Comp. Meths Appl. Mech. Engng **92** (1991), 353–375.
- [50] Strang, G.: *Linear Algebra and Its Applications*. Academic Press, 1976.



Effective Sensitivity Analysis in Shape Optimization^{*}

VÍT VONDRÁK

*Department of Applied Mathematics, VŠB – Technical University of Ostrava,
tř. 17. listopadu 15, CZ-70833 Ostrava–Poruba, Czech Republic*

1 Introduction

Experience shows that most of the computational cost and storage requirement for optimal design of structures result from the solution of state problem that arise in repeated analysis and design sensitivity analysis. In this paper, the effective algorithms for sensitivity analysis will be proposed.

Let us consider that the shape of the body that defines state problem $\Omega(\alpha)$ is controlled by discrete design variables $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Then the abstract shape optimization problem could be defined as a minimization problem

$$\min_{\alpha \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(u(\alpha)), \quad (1)$$

where \mathcal{U}_{ad} is set of all admissible shapes and $u(\alpha)$ is solution of the state problem that usually has form of minimization of potential energy

$$\min_{u \in \mathcal{C}_\alpha} J_\alpha(u). \quad (2)$$

The goal of the sensitivity analysis is to evaluate the gradient of the solution u of the state problem as function of variable α

$$\nabla u(\alpha) = \left(\frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right). \quad (3)$$

^{*}Supported by grant GAČR 101/98/0535.

This gradient is for example used in process of optimization for evaluation of the gradient of the cost function $\mathcal{J}(u(\alpha))$.

The simplest method for computation of these derivatives is based on usage of the forward finite difference approximation $\Delta_i u / \Delta \alpha_i$ to the design sensitivity $\partial u / \partial \alpha_i$ that is given by

$$\frac{\partial u(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \frac{\Delta_i u(\alpha)}{\Delta \alpha_i} = \frac{u(\alpha_1, \dots, \alpha_i + \Delta \alpha_i, \dots, \alpha_k) - u(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}{\Delta \alpha_i} \quad (4)$$

It follows that the overall finite difference method for evaluation of the gradient of u as a function of the design variables α requires k perturbations of the body $\Omega(\alpha)$ by perturbation parameters $\Delta \alpha_i$ and $k + 1$ solutions of the state problem (2). This method is not optimal due to high computational cost and due to troubles connected with choosing right perturbation parameter. Too small or too large perturbation parameter may lead to very high inaccuracy in sensitivity computations.

2 Sensitivity analysis for linear elasticity state problems

We shall consider linear elasticity problem as the state problem (2). After discretization by finite element method, this problem has a form of the following system of n equations with n unknowns

$$K(\alpha)u(\alpha) = f(\alpha), \quad (5)$$

where $K(\alpha)$ is the positive definite stiffness matrix, $f(\alpha)$ is the force vector, and $u(\alpha)$ is the unknown vector of nodal displacements. Sensitivity analysis is involved in most design optimization problems, and direct differentiation of (5) and rearrangement leads to the wellknown equation for the sensitivity of the unknown displacement field with respect to a design variable, α_i

$$K \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} u \quad (6)$$

which clearly demonstrates that the sensitivity analysis merely amounts to solving (5) with several new right hand sides. Thus, the formula (6) can be rewritten as the system of n equations with k right hand sides

$$KX = B. \quad (7)$$

The computations of sensitivities by formula (6) is often called semi-analytic method for design sensitivity analysis.

Several strategies for the solution of systems with multiple righthand sides have been proposed in the literature. The most simple and in many cases very efficient method may be based on re-using of the conjugate directions p_i generated

by the conjugate gradient (CG) method for the solution of the system with the first righthand side. In this case, the conjugate directions p_i are used to get better initial approximation to the solution of remaining systems whose solution is then completed by the CG method. This approach was introduced by Suarjana and Law [11] who labelled it the Successive Conjugate Gradient (SCG) method. The performance of SCG depends on the angle of each righthand side to the space $V = \text{span}(p_1, \dots, p_m)$ that is formed by the combinations of the conjugate directions p_1, \dots, p_m . Even though no improvement is granted when the right hand side b_i is conjugate to V , it does not seem that this happens often in sensitivity analysis. It follows by the theory of the Lanczos method for eigenvalue analysis that the residuals corresponding to initial approximations generated by the SCG method will have very small coordinates in the directions of eigenvectors that correspond to outer eigenvalues of K . Thus the first stage of the SCG method may be considered as preconditioning. The idea of preconditioning of the subsequent systems may be implemented more explicitly by an algorithm that combines the CG method with the Lanczos method in the solution of the first system. In the first run, in addition to the conjugate directions p_i , to the approximate solutions u_i , and to the residuals r_i that are generated by the CG algorithm, the combined algorithm generates and stores orthonormal Lanczos vectors $q_i = r_i/\|r_i\|$ and entries of a tridiagonal matrix

$$T_i = Q_i^T K Q_i \quad (8)$$

where $Q_i = [q_1, \dots, q_i]$. Since we use formulae

$$T_{ii} = \frac{r_i^T K p_i - \beta_{i-1} r_i^T K p_{i-1}}{\|r_i\|^2}, \quad T_{i,i+1} = -\frac{\|r_{i+1}\|}{\alpha_i \|r_i\|} \quad (9)$$

the cost of each step is dominated, as in the standard conjugate gradient algorithm, by one multiplication of an n -vector by K . The matrices T_i and Q_i are then used to evaluate a few eigenvectors that correspond to the smallest eigenvalues. In the solution of subsequent systems, the eigenvectors are used to reduce the error of the initial approximation in their direction nearly to zero. The advantage of this approach, which we label CGLAN, is that, after the first run is finished, only a very small number of vectors are used in the further solution. We observed that for realistic problems the time for the solution of subsequent problems was reduced by 75 % even with approximation of only 10 eigenvectors that correspond to the smallest eigenvalues. The explanation of such a performance may also be given in terms of the multigrid methods. Approximate eigenvectors may also be used by the projector preconditioning methods (Dostál [2]).

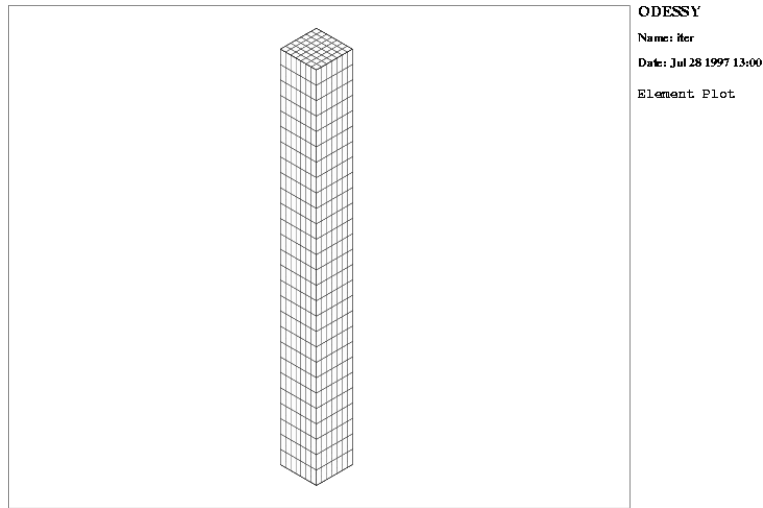
3 Numerical experiments for linear problems

For the comparison of all methods mentioned in previous section we have chosen two model problems. The first, ITER, is a relatively ill-conditioned long

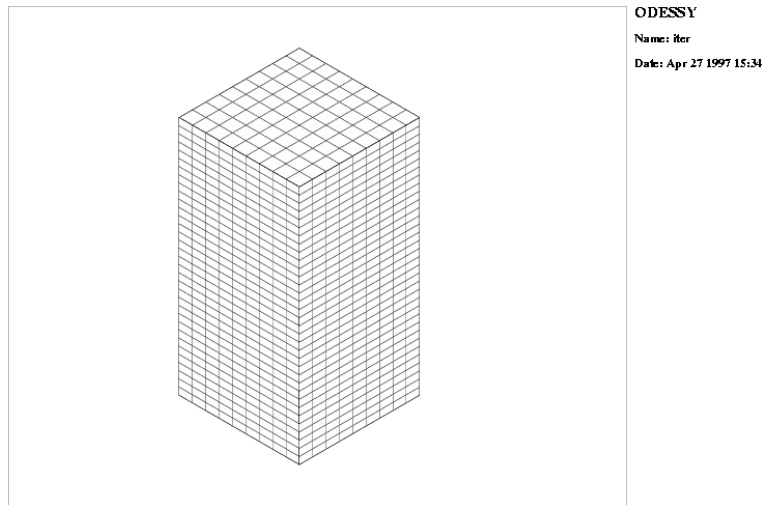
	LL ^T	CG				SSCG				CGLAN			
		SSOR		ILL ^T		SSOR		ILL ^T		SSOR		ILL ^T	
	time	time	iter	time	iter	time	iter	time	iter	time	iter	time	iter
Anal.	83	55	251	63	175	60	251	65	175	87	251	83	175
1	8	39	189	57	161	8	10	7	8	4	13	7	16
2	9	46	217	62	173	9	11	8	8	9	37	13	34
3	8	41	200	57	161	9	10	8	8	6	23	8	19
4	8	46	217	61	173	9	11	8	7	9	39	14	36
5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum1	133	227	1074	324	843	95	293	120	206	115	363	149	280
Sum2	133	227	1074	300	843	95	293	96	206	115	363	125	280
Sum3	50	172	823	237	668	35	42	31	31	28	112	42	105
Total	288	329	x	425	x	211	x	239	x	221	x	259	x

Tabulka 2: Comparison of algorithms for ITER problem

cantilever beam with a lateral end load (Figure 5). The second, ITER2 (Figure 6), has the same boundary conditions and load, but it is wider and therefore better conditioned than ITER. The models have identical meshes, $10 \times 10 \times 35$ nodes, that is, 3500 nodes, 2754 elements and 10500 degrees of freedom. For the preconditioned conjugate gradient method we have implemented two types of preconditioning. The first is a very simple SSOR preconditioner (Axelsson [1]) implemented with the Eisenstat's trick (Eisenstat [12]) that has no additional memory requirement. It is characterized by a small number of floating point operations in each CG step. For ill-conditioned problems, we have implemented a more robust incomplete Cholesky factorization preconditioning by position with respect to the sparsity pattern of the stiffness matrix (Saint-Georges [13]). In this preconditioning, the preconditioner takes additional memory of the same amount as the stiffness matrix. Also one CG step takes approximately twice the number of flops of the SSOR preconditioning. Incomplete factorization of the stiffness matrix took in both problems 24s. For eigenvalues and eigenvectors computation in the CGLAN method we have used the RATQR and TINVIT algorithms from the EISPACK library. The optimal number of eigenvectors is chosen by $neig = \arg \max \{l(i+1)/l(i), i = 10, \dots, 30\}$, where $l(i)$ is the i -th eigenvalue in ascending order. The comparisons of all methods is collected in Table 2 for the ITER problem and in Table 3 for ITER2. "Sum1" is the total time or number of iterations taken by the solver for the analysis and design sensitivity analysis. "Sum2" is the same as "sum1", but it does not include the process of preconditioning. Very important is "sum3" which expresses times spent by the solvers only in design sensitivity analysis. "Total" is the total time of one design iteration, i.e. including the assembly of the stiffness matrix and load vector, etc. Notice also that the skyline stiffness matrix storage used by finite solvers takes 24.899 MB of RAM, whereas the sparse storage typical of iterative solvers needs only 3.214 MB of memory.



Obrázek 5: Model problem ITER



Obrázek 6: Model problem ITER2

	LL ^T	CG				SSCG				CGLAN			
		SSOR		ILL ^T		SSOR		ILL ^T		SSOR		ILL ^T	
	time	time	iter	time	iter	time	iter	time	iter	time	iter	time	iter
Anal.	83	19	86	16	44	20	86	18	44	29	86	22	44
1	8	17	80	15	42	5	17	4	8	5	18	6	13
2	9	17	80	12	32	5	15	4	7	5	17	5	13
3	8	13	58	13	34	5	17	4	7	5	17	5	13
4	8	17	83	15	43	6	20	5	9	5	20	9	24
5	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum1	133	83	387	95	195	41	155	59	75	49	158	71	107
Sum2	133	83	387	71	195	41	155	35	75	49	158	47	107
Sum3	50	64	301	55	151	21	69	17	31	20	72	25	63
Total	288	185	x	200	x	145	x	165	x	152	x	177	x

Tabulka 3: Comparison of algorithms for ITER2 problem

4 Sensitivity analysis for contact shape optimization

Let us now assume that the energy functional (2) has the form

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2}u^T K(\alpha)u - f^T(\alpha)u \quad (10)$$

with the stiffness matrix $K(\alpha)$ and the vector of nodal forces $f(\alpha)$. The matrix $N(\alpha)$ and the vector $c(\alpha)$ that describe the linearized incremental condition of non-interpenetration also depend on α , so that the solution $u(\alpha)$ of the state contact problem with the region $\Omega(\alpha)$ satisfies

$$u(\alpha) = \arg \min_{u \in C_\alpha} J_\alpha(u), \quad (11)$$

where

$$C_\alpha = \{u : N(\alpha)u \leq c(\alpha)\}.$$

More details about formulation and discretization of contact problems may be found in Kikuchi and Oden [16] or Hlaváček et al [15].

The sensitivities of the solution of the state problem could be obtained by overall finite difference method for sensitivity analysis described in section 1. The more efficient semi-analytical method will be derived in the rest of this section.

The Lagrange function of the problem (11) has the form

$$\mathcal{L}(u, x, \alpha) = \frac{1}{2}u^T K(\alpha)u - f^T(\alpha)u + x^T (N(\alpha)u - c(\alpha)) \quad (12)$$

where u and x also depend on the vector of design variables α . For the problem (11) we can prescribe Karush–Kuhn–Tucker conditions in following terms

$$K(\alpha)u = f(\alpha) - N^T(\alpha)x \quad N(\alpha)u - c \leq 0 \quad x \geq 0 \quad (13)$$

Let the set $I = \{i : n_{i*}(\alpha)u = c_i(\alpha)\}$ denote set of indices of nodal variables in contact, let $n_{i*}(\alpha)$ denote the i^{th} row of matrix $N(\alpha)$ from the problem (11) and let vector u denote solution of the state problem (11). Further, for analysis of all contact cases we divide the set I to the two sets

$$I_s = \{i : i \in I \wedge x_i > 0\} \quad I_w = \{i : i \in I \wedge x_i = 0\} \quad (14)$$

where I_s is the set of indices of nodal variables in, so called, strong contact, I_w is the set of indices in weak contact and x is the solution of the dual formulation of the state problem (11). After formal differentiation of conditions (13) and after some simplification we obtain the new problem

$$\min_{z \in G(\alpha, \beta)} \mathcal{H}(\alpha, \beta) \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} z^T K(\alpha) z - z^T \left(f'(\alpha, \beta) - K'(\alpha, \beta)u - N'^T(\alpha, \beta)x \right) \\ G(\alpha, \beta) &= \left\{ z : n_{j*}(\alpha)z \leq f'_j(\alpha, \beta) - n'_{j*}(\alpha, \beta)u \quad \text{for } j \in I_w, \right. \\ &\quad \left. n_{j*}(\alpha)z = f'_j(\alpha, \beta) - n'_{j*}(\alpha, \beta)u \quad \text{for } j \in I_s \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Symbols $K'(\alpha, \beta)$, $f'(\alpha, \beta)$ and $N'(\alpha, \beta)$ represent directional derivatives in direction β . At this place it is important to notice that these derivatives can be simply evaluated. It has been proved [14] that the solution of this problem is the directional derivative $\mathbf{u}'(\alpha, \beta)$ of solution of problem (11).

Let us make some notifications for simplifying the problem (15)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\alpha, \beta) &= f'(\alpha, \beta) - K'(\alpha, \beta)u - N'^T(\alpha, \beta)x \\ N_w(\alpha) &= (n_{j*}(\alpha))_{j \in I_w}, \quad c_w(\alpha, \beta) = (f'_j(\alpha, \beta) - n'_{j*}(\alpha, \beta)u)_{j \in I_w} \\ N_s(\alpha) &= (n_{j*}(\alpha))_{j \in I_s}, \quad c_s(\alpha, \beta) = (f'_j(\alpha, \beta) - n'_{j*}(\alpha, \beta)u)_{j \in I_s} \end{aligned}$$

where $N_w(\alpha)$, $N_s(\alpha)$ are matrices that are composed from the rows of the original matrix $\mathbf{N}(\alpha)$ of contact conditions from problem (11) which are in weak or strong contact and $c_w(\alpha, \beta)$, $c_s(\alpha, \beta)$ are vectors of dimensions corresponding to number of rows of matrices $N_w(\alpha)$, $N_s(\alpha)$. Then, we can rewrite problem (15) in the form

$$\min_{z \in \tilde{G}(\alpha, \beta)} \tilde{\mathcal{H}}(\alpha, \beta) \quad (17)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} z^T K(\alpha) z - \tilde{f}^T(\alpha, \beta)z \\ \tilde{G}(\alpha, \beta) &= \{z : N_w(\alpha)z \leq c_w(\alpha, \beta), N_s(\alpha)z = c_s(\alpha, \beta)\} \end{aligned}$$

It is easy to see that the last problem is again a quadratic programming problem with linear constraints in the form of equalities and inequalities. These problem then could be very efficiently solved by duality based algorithms (Dostál, Friedlander, Santos [17, 18]).

5 Numerical experiments for contact problems

In this section a numerical solution of a contact shape optimization problem with the coercive contact problem of two elastic bodies in contact will be presented. This problem was named “cont” and is defined on Figure 7. The elastic parameters such Young modulus and Poisson ratio are $E_1 = 2.1\text{e}+05$, $E_2 = 1.0\text{e}+05$ and $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, where subscript 1 denotes the upper body and 2 the bottom body respectively. The density of the loading force is equal to -1000 .

The shape of the upper body is controlled by a B-spline with 6 controlling points on the bottom edge as shown on the figure. These points can move in the vertical direction with such limits that non-interpenetration of the bodies are preserved for any position of these points. This defines a vector of 6 design variables $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_6)$, where each design variable defines position of the corresponding controlling point.

The meshes for both the bodies are defined by 41×21 nodes. The discretized model is displayed on Figure 8 and consists of 1600 rectangular finite elements, 1722 nodes and 3298 unknown displacements.

As the cost function it was used the compliance that is the negative value of the total potential energy

$$C(u) = -\frac{1}{2}u^T K u + u^T f, \quad (18)$$

where u is the primal solution of the state problem. One constraint on the admissible shapes was described above and defines bounds for each design variable such that

$$l_i \leq \alpha_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (19)$$

Second constraint sets admissible designs such that the volume of the bodies is less or equal to the initial volume. It means, that for any design variables α and the initial design variables α^0 the inequality

$$\int_{\Omega_h(\alpha)} d\Omega \leq \int_{\Omega_h(\alpha^0)} d\Omega \quad (20)$$

has to be fulfilled.

The sequential linear programming with the simplex method was used as the optimizer. Hence, the first order sensitivity analysis has to be carried out and both the methods of sensitivity analysis were used. The overall finite difference method was used with three values of the perturbation parameters ($2.5\text{e}-02$, $2.5\text{e}-03$, $2.5\text{e}-05$). The relative change of design smaller than 0.01 % was used as the stopping criterion.

All the important data from the optimization process are collected for used sensitivity analysis methods in Table 4. The overall finite difference method with perturbation parameter $2.5\text{e}-05$ was skipped because the optimization process did

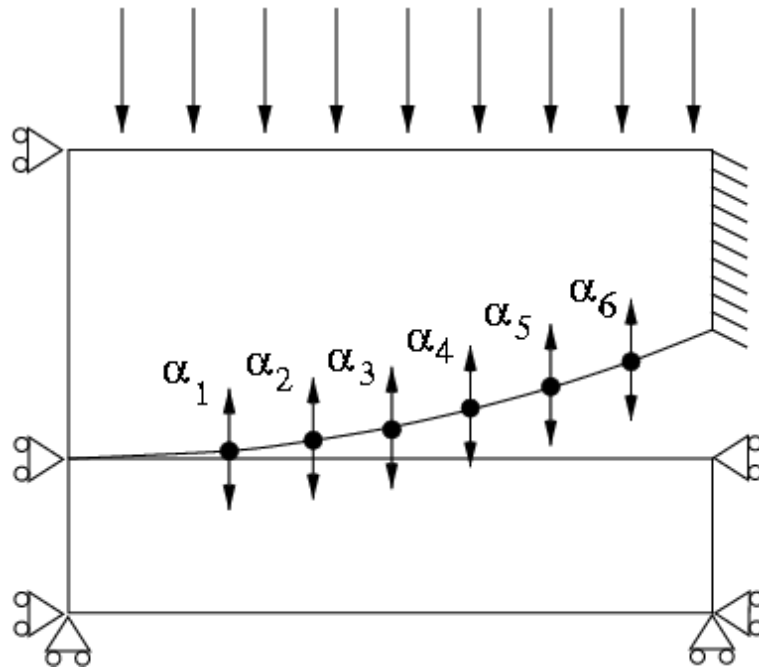
not converge. From this table it is easy to see that the semi-analytical method is the most accurate because the smallest cost function value was reached in the smallest number of design iterations. This table also proves that the semi-analytical method is much more faster than the overall finite difference method. Total time includes times necessary for assembles and factorizations of the stiffness matrices and the solutions of all quadratic programming problems solved during the optimization. In case of the overall finite difference method, each design iteration consists of 7 assembles and 7 factorizations while the semi-analytical method needs only 1 assemble and 1 factorization. This is the main source of speed up of the semi-analytical method. Total solution time summarizes only times of solutions of the quadratic programming problems which appear during the optimization process. Total analysis time and total sensitivity analysis time collect solution times for solution of the state problem and the sensitivity analysis respectively. Since, these times are dependent on the number of design iterations, average times for the solution of the sensitivity analysis of one design variable in one design iteration step are displayed in row "Avg. time per DV". Here, we can compare efficiency of the semi-analytical method qualitatively and we conclude that the semi-analytical method is approximately four times faster than the overall finite difference method. Similarly, the total numbers of conjugate gradient steps of the quadratic programming solver are compared in the rest of the table.

The sensitivities of the y-displacements computed from the initial state problem are displayed for semi-analytical and overall finite difference sensitivity analysis method in the figures 9 and 10. In case of the overall finite difference where the round-off errors have large influence, some of these derivatives are obviously unreasonable, specially in case of the smallest perturbation parameter $h = 2.5e-03$ and design variables 4 and 5.

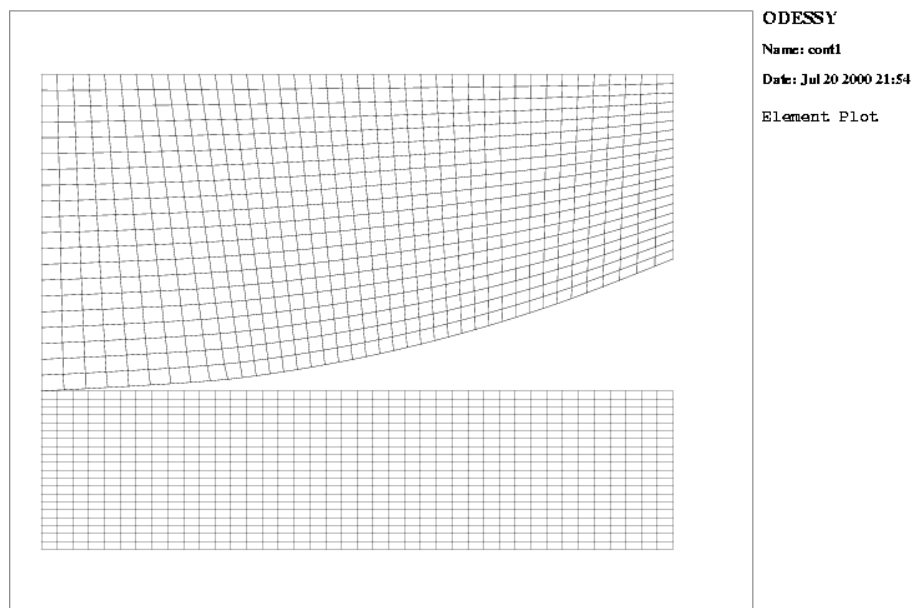
All these observation leads to the conclusion that the semi-analytical method is more efficient in all tested directions. Also the duality based solution of the coercive contact problem is very stable and fast. The problem cont was solved on the software package for optimization ODESSY installed on PC Pentium 300MHz and the relative precision for all computations was set to $1.0e-06$.

Reference

- [1] Axelsson, O. (1994). Iterative Solution Methods. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [2] Dostál, Z. (1988). Conjugate gradient method with preconditioning by projector. Int. J. Computer Math., 23, 315-324.
- [3] Farhat, C. Crivelli, L., Roux, F. X. (1994). Extending substructure based iterative solvers to multiple load and repeated analyses. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 117, 1995-209.

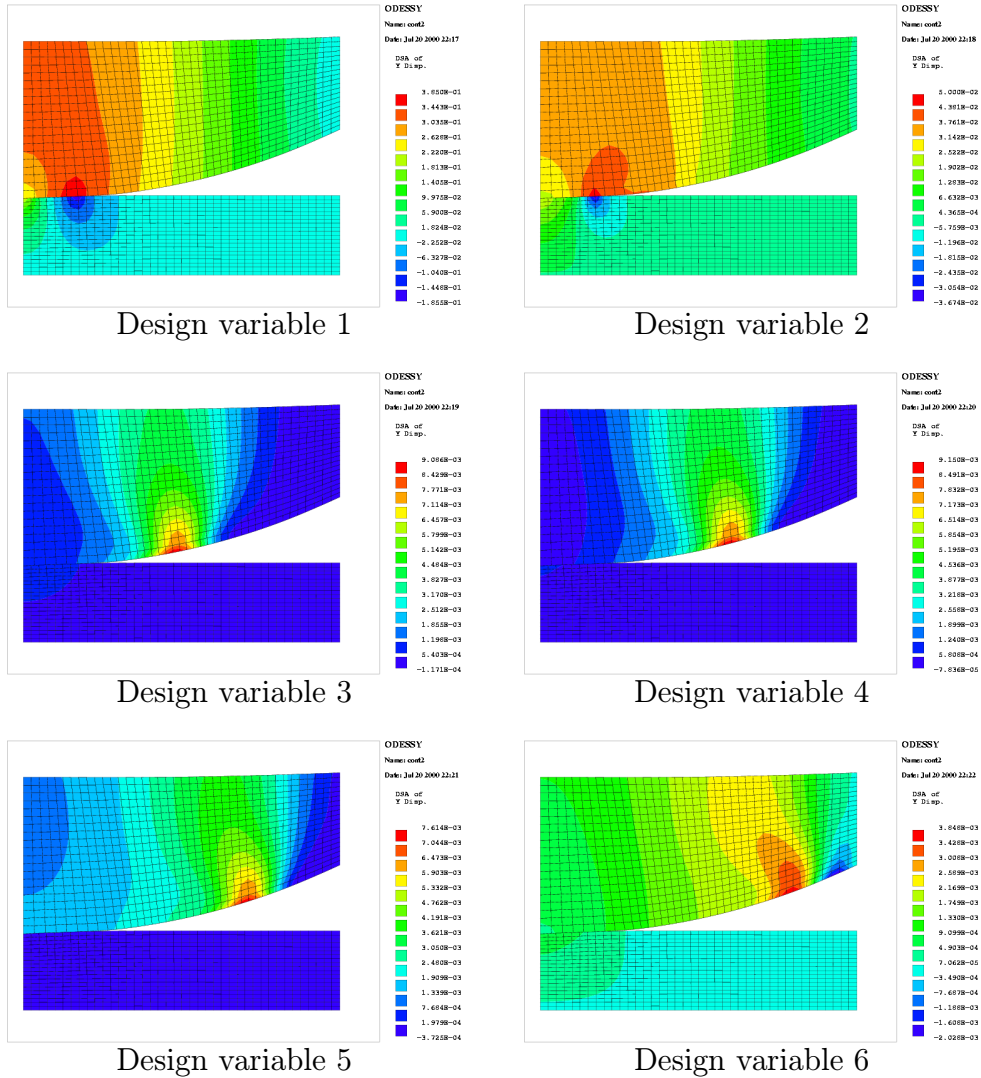


Obrázek 7: Definition of model problem

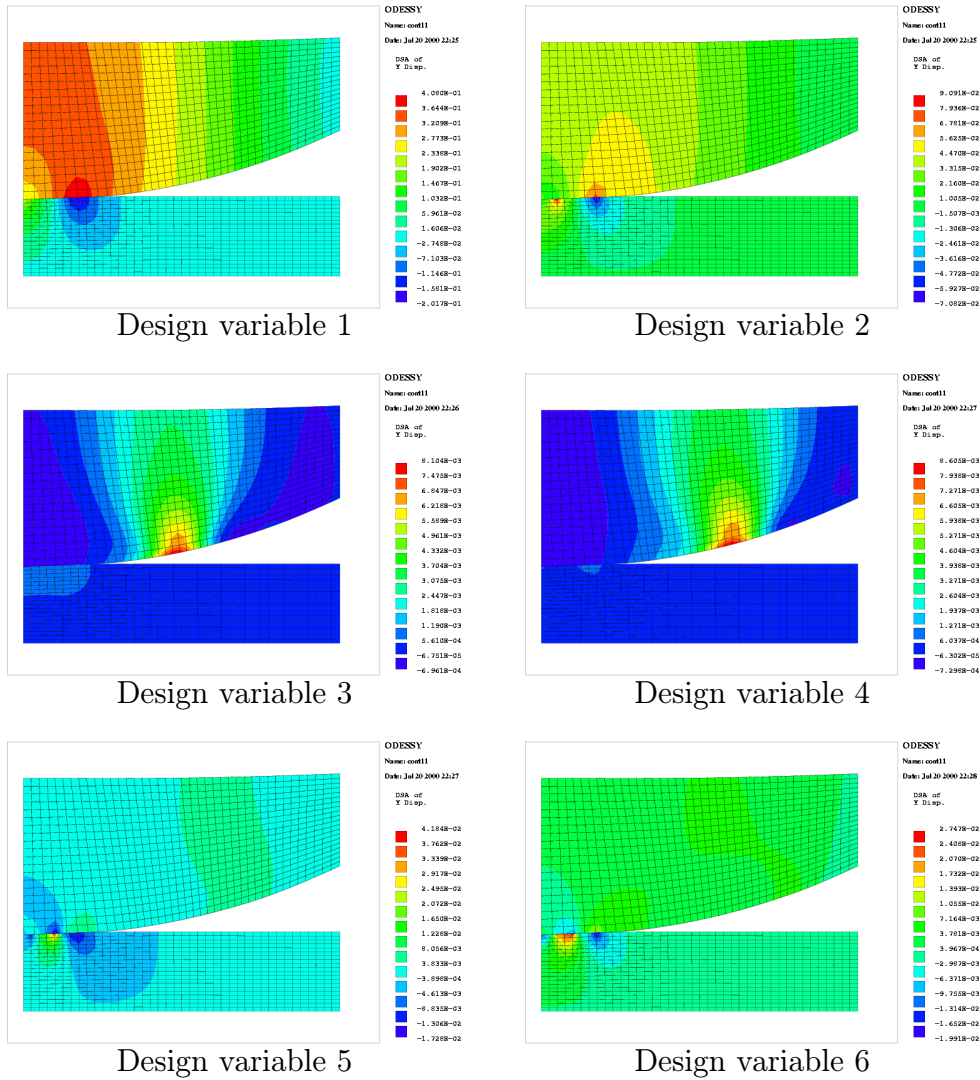


Obrázek 8: Discretized model

- [4] Feng, Y. T., Owen, D. R. J. and Peric', D. (1995) A block conjugate gradient method applied to linear systems with multiple right hand sides. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 127, 203-215.
- [5] O'Leary, D. P. (1980). The block conjugate gradients and related methods. *Linear Algebra Appl.*, 29, 323-346.



Obrázek 9: Semi-analytical method



Obrázek 10: OFD method for $h = 2.5e-3$

	SA	OFD, h=2.5e-2	OFD, h=2.5e-3
# designs	36	87	46
Initial cost function	25.1552	25.1552	25.1552
Final cost function	8.7547	9.9906	12.0877
Total time	504	1533	792
Total solution time	84.7	649.64	305.47
Total analysis time	32.3	101.19	43.41
Total sensitivity analysis time	52.4	548.45	262.06
Avg. time per DV	1.5	6.3	5.58
Total cg steps	1118	6409	2927
Total analysis cg	310	810	425
Total sensitivity analysis cg	808	5599	2502
Avg. cg steps per DV	23.09	64.36	53.23

Tabulka 4: Comparison of methods of sensitivity analysis

- [6] Papadrakakis, M., Smerou, S. (1990). A new implementation of the Lanczos method in linear problems. *Int. J. Num. Met. Eng.*, 29, 141-159.
- [7] Parlett, B. N. (1980). *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Prentice Hall, New York.
- [8] Rasmussen, J., Dostál, Z., Byczanski, P. (1995). Structural optimization based on iterative solution of state equations. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* (N. Olhoff and G. I. N. Rozvany Eds.) Pergamon, pp. 407-412.
- [9] Saad, Y. (1987). On the Lanczos method for solving symmetric linear systems with several Righthand sides. *Mathematics of Computation*, 48, 651-662.
- [10] Schmit, L. A., YeChen Lai (1994). Structural optimization based on preconditioned conjugate gradient methods. *Int. J. Num. Met. Eng.* 37, 943-964.
- [11] Suarjana, M., Law, K. H. (1994). Successive conjugate gradient methods for structural analysis with multiple load cases. *Int. J. Num. Met. Eng.* 37, 4185-4203.
- [12] Eisenstat, S. C. (1981). Efficient implementation of a class of preconditioned conjugate gradient methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 2, 1-4.
- [13] SaintGeorges, P., Warzee, G., Beauwens, R., Notay, Y. (1996). Highperformance PCG solvers for FEM structural analysis. *Int. J. Num. Met. Eng.* 39, 1313-1340.
- [14] Haslinger, J., Neittanmaki, P. (1996). *Finite element approximation for optimal shape, material and topology design*, John Wiley & Sons.
- [15] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J. (1988). *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- [16] Kikuchi, N., Oden, J.-T. (1988). *Contact Problems in Elasticity*, SIAM, Philadelphia.
- [17] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A. (1996). Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with simple bounds and equality constraints, IMECC-UNICAMP, Campinas, RP 74/96.
- [18] Dostál, Z., Friedlander, A., Santos, S. A. (1998). Solution of contact problems of elasticity by FETI domain decomposition, *Contemporary Math.*, 218, 82-93.

- [19] Dostál, Z., Vondrák, V., Rasmussen, J. (1997). Implementation of iterative solvers in shape optimization. In W. Gutkowski and Z. Mroz, editors, 2nd World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, pages 443–448, Zakopane, Poland. IFTR Warsaw.
- [20] Dostál, Z., Vondrák, V., Rasmussen, J. (1998). Feti domain decomposition algorithms for sensitivity analysis in contact shape optimization. In Choi-Hong Lai, P. E. Bjorstadt, M. Cross, and O. B. Widlund, editors, 11th International Conference on Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering, pages 561–567, Greenwich. Domain Decomposition Press, Bergen.